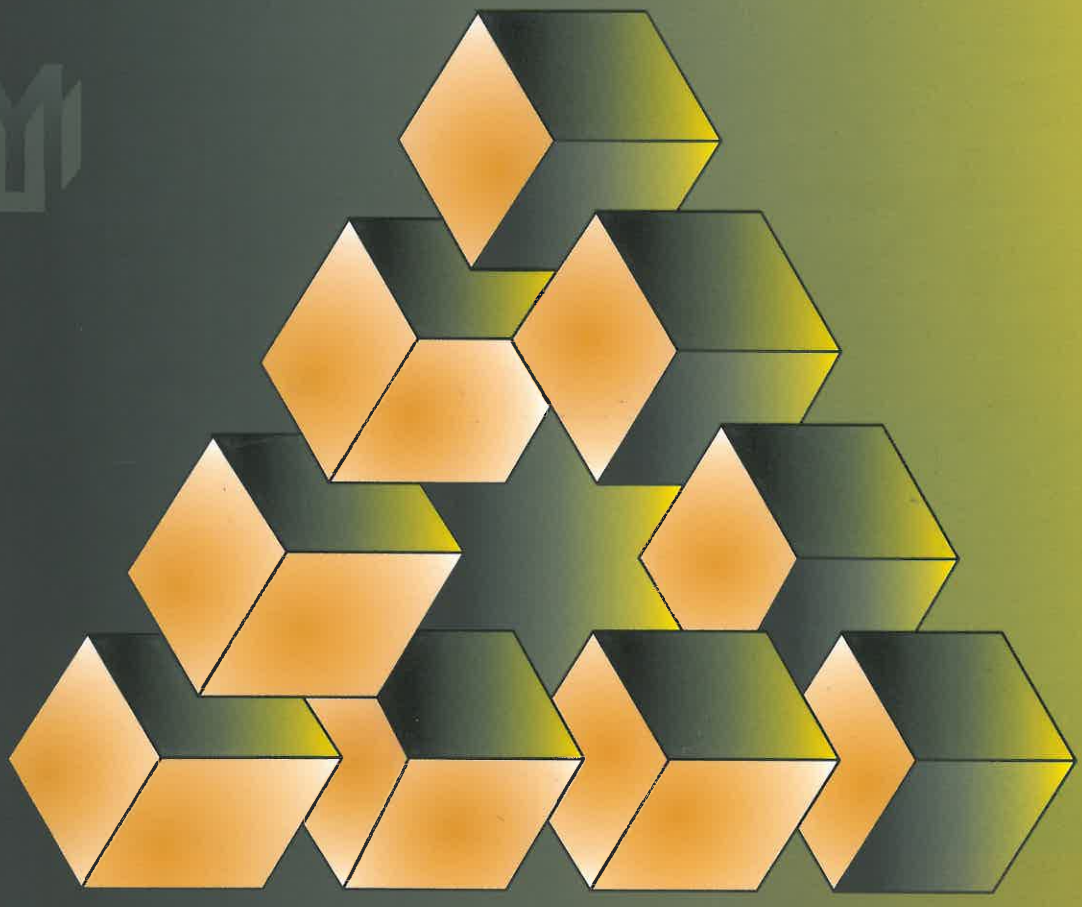


MY GEOMETRİ-1

KONU ANLATIMLI - ÖRNEK ÇÖZÜMLÜ

Mustafa YAĞCI

ALTIN NOKTA

ÜÇGEN DERS NOTLARI

Türkiye Matematik Öğretmenleri Zümresi TMOZ'un katkılarıyla



ÜÇGEN

Mustafa YAĞCI



ALTIN NOKTA YAYINEVİ
ADANA
2011

Copyright © Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım

ISBN: 978-975-6146-77-4

Akademik Yayınlar Serisi
MY GEOMETRİ 1 - ÜÇGENLER
Mustafa YAĞCI
yagcimustafa@yahoo.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır. **Tüm hakları yazarına aittir.** Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

Dizgi
Altın Nokta Grafik

Kapak:
Altın Nokta Grafik

Basım Yeri
ERTEM BASIM YAYIN DAĞ. SAN. TİC.LTD. ŞTİ.
Nasuh Akar Mah. 25. Sok. No: 19 Çankaya / ANKARA
Tel: 0 (312) 640 16 23

Satış-Dağıtım

Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
859 Sk. No:1/Z-4 Konak / İZMİR
Tel – Fax: 0 (232) 441 25 95

www.nokta2000.com
E-mail: nokta@nokta2000.com

Nisan - 2011
Birinci Basım

İÇİNDEKİLER

Bölüm	Konu	Sayfa
1	Önsöz	001-006
2	Düzlem Geometrisi'ne Giriş	007-014
3	Açı ve Açı Ölçüsü	015-022
4	Açı Çeşitleri	023-028
5	Doğruda Açı	029-040
6	Üçgen	041-046
7	Üçgenin Açıları	047-057
8	İkiz Kenarlar ve İkiz Açılar	058-077
9	Açıortayların Açıları	078-091
10	Eşlik	092-112
11	Dik Üçgen	113-131
12	Yükseklik Teoremi	132-139
13	Eş Dik Üçgenler	140-153
14	Orta Taban	154-159
15	Muhteşem Üçlü	160-168
16	Öklit Teoremi	169-180
17	30^o– 60^o–90^o Üçgeni	181-190
18	45^o– 45^o–90^o Üçgeni	191-198
19	15^o–75^o–90^o Üçgeni	199-204
20	$22,5^o$– $67,5^o$–90^o Üçgeni	205-208
21	İkizkenar Üçgen	209-223
22	Eşkenar Üçgen	224-239
23	Çevrel Çember	240-247
24	Azıcık Trigonometri	248-261
25	Sinüs Teoremi	262-268
26	Kosinüs Teoremi	269-283
27	Stewart Teoremi	284-290
28	Benzerlik	291-295

Bölüm	Konu	Sayfa
29	Açı Açı Benzerliği	296-310
30	Dik Üçgen Benzerlikleri	311-326
31	Tales Teoremi	327-337
32	Kelebek Teoremi	338-351
33	Kuvvet Teoremi	352-361
34	Diklik Merkezi	362-373
35	Menelaus, Ceva ,Von Aubel	374-386
36	Üçgensel Bölge Alanı	387-409
37	Benzerlik – Alan İlişkisi	410-436
38	Sinüslü Alan Formülü	437-452
39	Heron Formülü	453-458
40	Diğer Alan Formülleri	459-464
41	Açıortay	465-472
42	İç Açıortay	473-488
43	İç Açıortayın Boyu	489-495
44	İç Teğet Çember	496-516
45	Dış Açıortay	517-527
46	Dış Açıortayın Boyu	528-529
47	Dış Teğet Çemberler	530-543
48	Kenarortay	544-551
49	Ağırlık Merkezi	552-565
50	Simedyan Noktası	566-573
51	Alanortay	574-586
52	Üçgen Eşitsizliği	587-613
53	Pisagor Eşitsizlikleri	614-625
54	Kesen Eşitsizlikleri	626-641
55	Geometrik Eşitsizlikler	642-655
56	Üçgen Çizimleri	656-672

ÖNSÖZ

MY GEOMETRİ Serisi'nin ilki olan bu kitap, serinin yakında çıkacak olan diğer kitapları gibi, geometriyi ne kadar bildiği konusunda kendisini sınamak isteyenler için değil, geometriyi en temelinden başlayarak, bir eksik bırakmadan öğrenmek (veya öğretmek) isteyenler için yazılmıştır. Kitap, amacı sadece üniversite sınavını kazanmak veya sadece olimpiyatlara hazırlanmak veya sadece sınıfı geçmek olanlara da elbette hitap ediyor ama aslen geometri öğrenmeyi hedef alanların kitabıdır. Yazar, hedef bu olduktan sonra, bahsi geçen amaçlara zaten rahatlıkla ulaşılabileceği düşüncesindedir. Bu yüzdendir ki bu kitapta cevap anahtarı yoktur! Cevap kimileyin sorunun hemen bitimine konmuştur, kimileyin de doğru olan seçenek koyu yapılarak belirtilmiştir. Cevabın ne olduğunu görerek o cevaba ulaşma çabası gütmeyen kimsede zaten öğrenme gayretinden söz edilemez. Hiç olmazsa bu gayrette olanların vakitten tasarruflarıyla birlikte, daha öğrenme safhasında olunduğu düşünülerek cevap için olası bir ipucuna sahip olmaları sağlanmıştır. 'Madem doğru cevap işaretlenmiş, o zaman neden diğer seçenekler var ki?' sorusu sizin de aklınıza gelmiş olmalı. Onun sebebi de ders anlatırken bu kitabı kılavuz kabul eden öğretmenlerin aklımıza gelmiş olması. Zira, hangi sebepten dolayı hangi seçeneğin doğru cevap olamayacağını anlatmak da güzel bir öğretme metodu değil midir? Bazen doğru seçeneği, dört yanlış seçenek sayesinde bulmaz mıyız? Her neyse... İyisiyle, kötüsüyle, doğrusuyla, yanlışıyla ÜÇGENLER kitabını beğeninize sunduk. Ne mutlu istifade edene!

Kitabın hayat bulmasında ilk tohumu atmakla kalmayıp büyümesinde gelişmesinde serpilmesinde ve son olarak tashihinde yardımlarını esirgemeyen tüm TMOZ üyelerine sonsuz teşekkürler!...



Canım Oğlum Tales'e ...

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Düzlem Geometrisi'ne Giriş

Yazıma değerli hocam Prof. Dr. Ali Nesin'in Matematik Dünyası Dergisi'nde yazdığı bir giriş yazısında yaptığı yoruma kendi yorumlarımı katarak başlamak istiyorum.

İnsanların büyük çoğunluğunun zekâ bakımından üç aşağı beş yukarı aynı düzeyde olmasına rağmen kiminin matematiğinin iyi, kimininse kötü olmasının nedeni nedir?

Çeşitli nedenleri olmalı ama matematikteki (dolayısıyla geometrideki) başarısızlığın başat nedeni, matematiğin sürekli çalışma istemesi olsa gerek. Tarih dersinde bir konuyu kaçıran öğrenci, o konuyu hiç anlamadan da pekâlâ bir sonraki konuyu anlayabilir ve sınavı başarabilir, oysa matematikte durum böyle değildir. Matematik bir piramide benzer, taban olmazsa tepe inşa edilemez. 12-13 yıllık ilk ve ortaöğrenim yaşamında matematikte geri kalmamak da oldukça zordur. Gerçi, sağ olsun var olsunlar, okullarda sık sık geriye dönüş yapılıyor ve öğrencinin eksiklerini tamamlamasına izin veriliyor ama bu bile öğrenci gözünde "Adam taaa nereden de soracakmış ya!" diye algılanıyor. Hâl böyleyken bir kez matematiği anlamadığına veya geç kaldığına inanan öğrenci psikolojik olarak etkileniyor (hatta çöküntüye uğruyor) ve ondan sonra kendini toparlaması ya zor oluyor ya da olanaksız.

İkinci nedenin de size o matematiği öyle anlatan biz öğretmenlerin olduğunu düşünüyorum. Neyin nerden geldiğini, ötesi niye geldiğini izah etmeden, hatta bazen de belli bir sıra bile takip etmeden anlatarak anlamanızı beklemiyor muyuz çoğumuz? Ben bu kitapta şahsım adına bu hatayı yapmamaya çalıştım.

Öncelikle günlük konuşma dilinde çok kullanmadığımız bazı kavramları vereceğiz. İlk kavramımız: Önerme.

Önerme nedir, ne değildir? Doğru ya da yanlış fark etmez –ama ya doğru ya da yanlış olmalı– kesin bir hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir.

Örneğin, biraz önce okuduğunuz cümle de bir önermedir. Kesin hüküm bildiren ifadelere dilimizde önerme denmiyorsa da, o cümle matematiksel anlamda bir önermedir.

"*Doğru ya da yanlış fark etmez, kesin bir hüküm bildiren ifadelere armut denir*" cümlesi de bir önermedir yani. "*Her üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı* 190 *derecedir*" önermesi gibi, yanlıştır ama nihayetinde bir önermedir. "*Karenin kenar uzunlukları birbirine eşittir*" cümlesi de bir önermedir, ama bu önerme doğrudur.

Önermede bildirilen hüküm doğruysa önermeye **doğru önerme**, yanlışsa **yanlış önerme** deriz.

Önermeler soru, emir, ünlem, istek bildiremezler. Yani, "*Bu paragrafta geçen cümlelerin kaçı önermedir*?" cümlesi bir önerme değildir. Çünkü doğru ya da yanlış bir hüküm bildirmiyor.

Teorem nedir? İlk ve ortaokulda geometri hakkında birçok önerme duydunuz. Fakat çoğu zaman bu önerme doğru mudur, yanlış mıdır diye düşünmediniz. Çoğu şu an zihinlerinize kazınmış durumda ancak bu bilgileri belki hiçbir kanıt yapmadan edindiniz. Örneğin bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamının 180 derece olduğunu hemen hemen hepiniz bilirsiniz fakat kaçınız bunun niye olduğunu bilir? Daha da ötesi doğru olduğunu kim garantiliyor ki sebebini bileceksiniz, belki de yanlış bir önermedir. Kim bilir? Ben söyleyeyim kimin bileceğini, kanıtlayan bilir!

Artık geometride kanıtlar vereceğiz ve doğruluğunu kanıtladığımız bu önermelere **teorem** diyeceğiz. Siz siz olun, kanıtlanmamış hiçbir önermeyi nasıl olsa doğrudur diyerek kullanmaya kalkışmayın. Nedenini düşünün, bulamazsanız sorun, öğrenmeden yolunuza devam etmeyin.

Aksiyom nedir? Bir önermenin doğruluğunu kanıtlarken doğal olarak daha önce kanıtlanmış teoremlerden yararlanacağız. Önceki teoremlerin kanıtını da daha önce kanıtlanmış teoremlere dayandıracağımızdan ve bu "dayanma" geriye doğru sonsuza dek ilelebet gidemeyeceğinden, yani bir noktadan başlamak zorunda olduğumuzdan, dayanacağımız ilk birkaç önermeyi kanıtlamadan doğru kabul etmek zorundayız. İşte doğruluğunu kabul etmek zorunda kalacağımız bu önermelere **aksiyom** ya da **belit** adı verilir. Kitabi tanımsa şöyle veriliyor:

İspat zincirinde, doğruluğu herkes tarafından kabul edilen ilk önermelere **aksiyom** denir.

Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanamayan ama doğru olarak **kabul** edilen önermelere de **postülat** denir.

Biz bu kitapta bir karışıklığa meydan vermemek için aksiyom terimini kullanacağız.

Aksiyomlar, şu veya bu nedenle, kanıtlanmadan doğru kabul edilen önermelerdir. Aksiyomlar olmasaydı başlangıç noktamız olmaz ve matematikte bir adım ileri gidemezdik. Ama rastgele bir önermeyi aksiyom olarak kabul etmek de pek doğru olmaz. Örneğin doğru olmadığını deneyle ya da sezgiyle bildiğimiz $0 = 1$ önermesini aksiyom olarak kabul etmek ancak delilik delaleti olarak addedilebilir. Aksiyomlar, kanıtlanmadan doğru olan önermeler olduğundan, mümkünse, "her noktadan her doğruya bir paralel geçer" örneğinde olduğu gibi "doğruluğundan kuşku duyulmayan" önermeler olmalıdır. (Kanıtlanmayan bir önermenin doğruluğundan kuşku duymamanın ne demek olduğu felsefi bir sorudur; bizi ve matematiği aşan bu felsefi soruyu okurun derin irdelemelerine terkediyoruz.) Doğruluğundan kuşku duyulsa da, aksiyomlar akla yatkın olmalı, en azından aksiyomlardan yola çıkarak doğru olmadığını bildiğimiz ya da teorem olması istenmeyen bir önerme elde edememeliyiz.

Eğer elimizde doğru olan önermelerin bir listesi olsaydı, bu listeyi aksiyom olarak kabul eder ve matematikten kurtulurduk. Ama ne yazık ki (ya da iyi ki, hayat böyle daha güzel çünkü) böyle bir listemiz yok.

Aksiyomlar ayrıca basit ve kolayca anlaşılır olmalı. Yani ne dedikleri bariz olmalı. Anlamları üzerine ilelebet süren tartışmalar olmamalı. Böyle tartışmalar ancak sosyal bilimlerde olabilir.

Ayrıca aksiyomlar olabildiğince az sayıda olmalı. Kanıtlanabilen bir teoremi aksiyom olarak kabul etmek zekâmıza hakaret olduğu gibi estetik duygularımızı da zedeler. Bir başka deyişle aksiyomlar, birbirinden bağımsız, yani birbirinden elde edilemeyen önermeler olmalıdır. Aksiyomları matematiğin açık yanları gibi düşünmek abesle iştigalden başka bir şey olamaz. Zira biz matematikçiler, kanıtlayamadığımız şeylere aksiyom diyor değiliz, sadece "Ona veya ona; ama birine aksiyom demeliyiz." diyoruz. Çünkü mutlaka dön-dolaş bir şeyleri doğru kabul etmek zorunda kalıyoruz. Aslında hangisini seçelim diye düşündüğümüz şeylerin hepsi doğru.

Dedik ya, matematikte taban olmadan tepe inşa edilemez, yani matematikte belli bir sıra takip edilmelidir diye, bu sıranın da doğru bir sıra olması lazım gelir. Yoksa herkes zaten bir sırayla anlatıyor ama "ya sıra yanlışsa?" değil mi?

İşte bu yüzden 1905 yılında matematikçiler en doğru sıralamayı yapmak üzere Okul Matematiği İnceleme Grubu (School Mathematics Study Group) adı altında David Hilbert önderliğinde buluşmuşlar. Bu toplantıda, varılan sonuca göre yaşanmış olması muhtemel konuşmaları size aktarayım:

Önce Profesör X söz almış:

– Bunca yıllık geometri hayatımda her şeyin temelinin üçgen olduğunu anladım. Sanırım hepiniz bana katılırsınız. Ben önce üçgeni anlatalım derim, demiş.

Hemen Profesör H söz almış:

– Üçgenin önemi konusunda sana katılırız ama üçgenden başlama konusunda, en azından ben katılmam. Çünkü nokta veya doğru parçasını tanımlamadan üçgeni nasıl tanımlayacağız ki? Diyelim bir şekilde üçgeni tanımladık, ardından iç açılarının ölçüleri toplamını vermeyecek miyiz? Bırakın iç açıyı, daha açıyı tanımlamadık ki!

Toplantıya katılan herkes H'yi onaylar biçimde kafalarını sallamışlar. H devam etmiş:

– İş onunla da bitmiyor. Açıyı tanımlamadan önce ışını tanımlamak gerekir. Bunun için de önce doğru ve doğru parçası gibi kavramların öğretilmesi gerekmez mi?

Dr. M:

–Doğru, gerekir. Hatta onlardan önce de noktanın tanımlanması lazım.

Profesör W:

– O zaman nerden başlayacağımızı bulduk demektir. Çünkü Euclid, Elementler isimli eserinde noktayı tanımlamış. "Parçasız nesne." demiş. Beğenmezseniz, Legendre gibi "çizgilerin ucuna" nokta diyelim. O da olmadı, Roche gibi "Çizgilerin arakesitidir." deriz.

Bu sözlerden sonra geriye sadece hangi tanımın seçileceği kaldığını düşünenler, tekrar H'nin söz almasıyla hatalarını anlamışlar.

– Değerli arkadaşlar, hâlâ aynı hataya devam etmektesiniz. Noktanın tanımı için açıklamaları hiç de kolay olmayan 'nesne', 'parça', 'çizgi', 'uç', 'arakesit' gibi kavramlar kullanmaktasınız.

Dr. M araya girmiş:

– Siz büyüklerin yanında bana laf düşmez ama her kullandığımız kelimeyi açıklayacaksak, bunun sonu gelmez ki hocam!

Profesör H duymak istediğini duymuş olmanın mutluluğuyla;

– "Ha şunu bileydin!" demiş. Ben de bunu duymak istiyordum. Öteden beri geometride (hatta pozitif bilimlerin hepsinde) ilk birkaç kavramın tanımsız olarak kabul edilmesi gerektiğini düşünürdüm. Sebebi de tam burada konuşulanlardır. Sizce de öyle değil mi?

Büyük bir sessizlik olmuş. Sanırım "Bugüne kadar benim niye aklıma gelmedi ki bu?" üzüntüsü sebep olmuştur bu sessizliğe. Ama yine de çok önemli bir yere ulaşmanın sevinci okunuyormuş yüzlerde.

H devam etmiş:

– Herkes de onaylıyorsa "nokta"yı tanımsız olarak alalım. Peki "nokta" kavramını kullanarak doğruyu tanımlayıp tanımlayamayacağımıza bir bakalım. Ben buraya gelmeden önce saygıdeğer W hocamın yaptığı gibi birkaç araştırma yaptım. Edindiğim şu bilgileri vereyim. Euclid aynı eserinde "Doğru, noktalarına göre düzgün yayılan nesnedir." demiş. Heron "Sabit tutulan iki nokta etrafında döndürüldüğünde durumunu değiştirmeyen nesneye doğru denir." demiş. Grassman ise "Hareketi esnasında yönünü koruyan bir noktanın çizdiği çizgiye doğru denir." demiş. Legendre "Doğru, iki nokta arasındaki en kısa yoldur." demiş. Barbarin ise "İki noktasıyla tamamen belirli nesneye doğru denir." demiş. Bence buradaki durum da noktayı tanımlamaya çalışırken yaşadığımız sıkıntıyla aynı. Çünkü halihazırda 'düzgün', 'nesne', 'çizgi', 'yol' gibi kavramlar tanımlanmadı.

Oybirliğiyle "doğru"yu da tanımsız olarak ele almak gerektiği sonucuna ulaşmışlar. Şimdi bu iki kavramı kullanarak geometriyi inşa edip edemeyeceklerine gelmiş sıra. Bunun için de "düzlem" kavramının öğretilmesi gerekmiş. Dr. M tekrar söz almış:

–Hocam, doğruyu tanımlama gafletine düşmüş olan bu büyüklerimiz, düzlemi de tanımlamışlar mı? Ona da baktınız mı? O tanımların bize ışık tutacağını düşünüyorum.

–Bakmaz olur muyum? demiş Profesör H. ve devam etmiş:

–Nokta ve doğru tanımsız olarak alındığında düzlemin tanımlanması diğerlerine göre daha başarılı olmuş ama bence yine de havada kalan şeyler var. Ben, kim ne demiş size söyleyeyim, siz kendi kararınızı kendiniz verin. Euclid "Düzlem, doğrularına göre düzgün yayılan nesnedir." demiş. Leibniz "İki noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yerine düzlem denir." demiş. Theon–Simson–Legendre üçlüsü "Düzlem, herhangi iki noktasından geçen doğruyu içine alan yüzeydir." demiş. Duhamel ise "Bir noktadan bir doğruya dik olarak çizilen doğruların geometrik yerine düzlem denir." demiş. Bana soracak olursanız en güzel açıklama Leibniz'inki ama "geometrik yer" kavramını daha en başta nasıl açıklayacağız? Bu yüzden "düzlem"i de tanımsız kavramlar içine almayı öneriyorum.

Tahmin ettiğiniz üzere itiraz eden çıkmamış ve nokta, doğru, düzlem kavramları tanımsız olarak alınmış. Buradaki çok önemli ayrıntıya tekrar değinmekte fayda görüyorum. Zira "O kadar profesör bir araya gelmiş; nokta, doğru ve düzlemi tanımlayamamışlar mı ya? Bizim dershanedeki hoca hepsini tanımladı walla!" diyenler olabilir. Buradaki sorun tanımlayamamak değil, daha önceden tanımlanmış kavramlarla tanımlayamamak. Bu da olanaksız; çünkü "daha önce"si yok ki, en baştayız.

Bu toplantıdan bir asır sonra, bugün, 'nokta' ve 'doğru'nun ne olduğunu sözlükten öğrenmeyi kendiniz deneyecek olsanız, örneğin Türk Dil Kurumu'nun sözlüğünde nokta için şu tanımı bulacaksınız:

Nokta: Hiç bir boyutu olmayan işaret.

Noktanın tanımı boyut kavramına dayandırıldığı için boyutun ne olduğunu anlamak ister ve sözlükten şunu okursunuz:

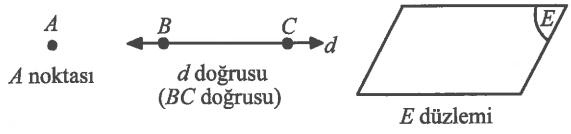
Boyut: Doğruların, yüzeylerin veya cisimlerin ölçülmesinde ele alınan üç doğrultudan yani uzunluk, genişlik ve derinlikten biri.

Boyut kavramının 'doğru', 'yüzey', 'ölçü', 'doğrultu', 'uzunluk', 'genişlik', 'derinlik' gibi kavramlara dayandırıldığını yani sonuç olarak "nokta"nın tanımının "doğru" kavramına ve "doğru"nun tanımının da "nokta" kavramına dayandırıldığını görmüş oluyorsunuz, o halde "nokta", "doğru" ve "düzlem"i neden tanımsız nesneler olarak ele aldığımızı bir kez daha anlamış olduk.

"Tanımsız" olmak "var olmamak" demek değildir. Zihinde de olsa (ki zaten öyle) nokta, doğru ve düzlemlerin varlığından bahsedebiliriz. Onları hayal edebilir ve hayalimize göre şekillendirebiliriz. Unutmayın ki neye benzediklerinin hiçbir önemi yoktur, sadece onlara yüklediğimiz görevleri yapsınlar bize yeter!

Nokta, doğru ve düzlemleri alışık olduğunuz üzere sırayla ".", "—" ve "▱" sembolleriyle resmedeceğiz. Böyle göstermemizin nedeni, doğadaki temsilcilerinin de bu biçimde görünmeleridir. Örneğin, bir tarlanın köşeleri "nokta"yı, kenarları "doğru"yu ve yüzeyi de "düzlem"i temsil etmektedir. Yalnız, tanımsız oldukları için bu üç nesnenin hiç de ".", "—" ve "▱" gibi gösterilmeleri gerekmez. Eğer üniversitede geometri okursanız noktanın "—" ve doğrunun "." sembolleriyle gösterildiği geometriler de öğreneceksiniz. Bunun tek sebebi, tekrar tekrar söyleyelim, tanımsız olmalarıdır. "Benim hayalimde böyle canlanıyor." derse adam ne yapacaksınız? Haklı da!

Şimdi biz onları bırakıp kendimizin bu "şey"leri nasıl göstereceğini ve onları nasıl adlandıracağımızı anlatalım. Noktaları A, B gibi büyük harflerle, doğruları a, b gibi küçük harflerle ve düzlemleri ise α, β gibi küçük Yunan harfleriyle veya yine A, B gibi büyük harflerle göstereceğiz. Böyle yapmakla yazılan şeyleri daha rahat anlarız.



A noktası — d doğrusu (BC doğrusu) — E düzlemi

Bununla birlikte '$\Rightarrow$' işareti 'ise'yi, '$\Leftrightarrow$' işareti veya 'ise' kelimesi de çift gerektirmeyi anlatacak.

A ve B gibi iki noktanın aynı (çakışık) olmasını $A \equiv B$ olarak göstereceğiz. $a \equiv b$ ve $\alpha \equiv \beta$'nın anlamlarını anlatmaya da utanırız artık.

Doğru ve düzlemler tanımsız nesneler olup eski alışkanlığımızı bırakıp bunları başlangıçta birer nokta kümesi olarak değil, bütün noktalardan arınmış nesneler olarak düşüneceğiz. Sonra aksiyomlar yardımıyla bu nesneler üzerinde noktalar alabilerek sayılarını artıracak ve süreklilik aksiyomu ile de bu nesneleri tam anlamıyla noktalarla dolduracağız.

Örneğin,



şekilleri, hiçbir noktası olmayan bir a doğrusu ile hiçbir noktası olmayan bir α düzlemini göstermektedir. Öte yandan;



şekilleri ise sadece üçer noktası bulunan b doğrusu ile β düzlemini göstermektedir. Alışık olmadığımız bu durumu şöyle açıklığa kavuşturabiliriz: Çıplak telgraf teline "doğru" ve kuşa "nokta" diyecek olursak, çıplak telde hiçbir kuş bulunmamış olur. Eğer tele üç kuş konarsa doğrumuzda sadece üç nokta bulunur. Bunun gibi, masa yüzeyine "düzlem" ve sineğe "nokta" diyecek olursak, üzerine bir sinek konmuş masamız sadece bir noktası olan düzlem olmuş olur.

Tanımsız olarak, nokta, doğru ve düzlem dediğimiz nesneler doğadan soyutlama yolu ile elde edilen ve sadece zihinde yer alan soyut nesneler olup bunlar arasındaki ilişkileri gösteren aksiyomlar da gene doğadan soyutlama ile ifadelerini bulan sade ve doğru önermelerdir.

Okul Matematiği İnceleme Grubu'nun okullarda okutulması için benimsediği aksiyomatik sistem şöyledir:

Aksiyom 1. *Farklı iki noktadan geçen bir ve yalnız bir doğru vardır.*

Yani, farklı iki nokta sadece tek bir doğruyu işaret eder diyor. Örneğin A ve B farklı iki nokta olsun. Hem A'dan hem de B'den geçen iki farklı doğrunun olamayacağı anlamına geliyor.



Doğruyu bizim resimlediğimiz gibi çizmek şartıyla, yukardaki A ve B noktalarından geçen doğruyu çizin deseler, kim gelirse gelsin çizeceği doğru bizim de maviyle çizmiş olduğumuz doğru olacaktır. Öyle değil mi?

Aksiyom 2. *Bir doğrunun noktaları ile reel sayılar öyle karşılaştırılabilir ki;*

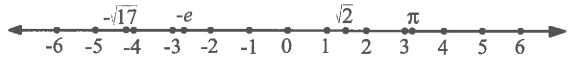
i) *Doğrunun her noktasına bir ve yalnız bir reel sayı karşılık gelir.*

ii) *Her reel sayıya doğrunun bir ve yalnız bir noktası karşılık gelir.*

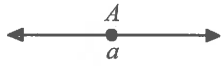
iii) *İki nokta arasındaki uzaklık, bu noktalara karşılık gelen sayıların farkının mutlak değeridir.*

Bu aksiyomla birlikte ölçümsel geometriye giriş yapılmaktadır. Bu aksiyom **Cetvel Aksiyomu** olarak bilinir. Hani daha ilkokula bile başlamamış 5-6 yaş civarı bir anaokulu çocuğuna defterin şeklini sorsanız dikdörtgen, tekerleğin şeklini sorsanız çember veya daire der ama onların çevrelerini veya alanlarını hesaplayamaz ya, noktaları reel sayılarla birebir ve örten olacak şekilde eşleyen bu aksiyomla birlikte, uzunluk hesaplamalarına geçiş yapılabilecektir.

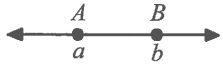
Buradaki temel fikir şudur: Bir doğru üzerinde sonsuz farklı nokta alma hakkımız var ya, onun için doğruyu bir an noktalar kümesi olarak düşünelim. E reel sayılar da sonsuzdur. O halde doğru üzerindeki her farklı noktayı farklı bir reel sayı ile eşleştirmek mümkündür diyor.



Böyle bir doğruya daha önceki derslerimizde **sayı doğrusu** dendiğini de söylemiştik.



Eğer doğru üzerindeki bir A noktası, bir "a" reel sayısıyla eşlenmişse "a" gerçel sayısına "***A* noktasının koordinatı**" denir. Gerekliyse eğer, $A(a)$ diye gösterilir.



Noktalara sayıların eşlenmesi aralarındaki mesafenin niceliğini bir başkasına rahat anlatma olanağı verir. A ile B noktaları arasındaki uzaklık, noktaların karşılık geldiği sayıların pozitif farkıyla hesaplanır. Bu uzaklık $|AB|$ ile gösterilir. Yukardaki şekil için $|AB| = b - a$ yazarız.

Aksiyom 3. *Birbirinden farklı herhangi iki noktaya bir tek pozitif sayı karşılık gelir.*

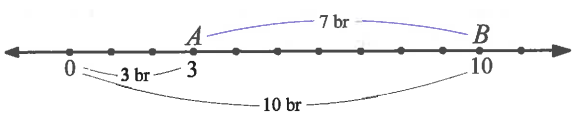
Bu aksiyom da farklı sabit iki nokta arasındaki uzaklığın da sabit olduğunu söylüyor. Noktalar yer değiştirmedikçe aralarındaki mesafe de sabit kalır. İyi ki bu aksiyom var. Bu sayede sabah çözdüğümüz sorunun cevabı 4 iken akşam 5 olmaz. ☺ Bu aksiyom **Uzaklık Aksiyomu** olarak bilinir.

Örnek. $A(3)$ *ile* $B(10)$ *noktaları arasındaki uzaklık kaç* br *dir*?

A) –7 B) 0 C) 3 D) 7 E) 10

Çözüm: $A(a)$ ve $B(b)$ noktaları arasındaki uzaklık $b - a$ br olarak tanımlandığından $A(3)$ *ile* $B(10)$ noktaları arasındaki uzaklık $10 - 3 = 7$ br dir.

Bir de şekille izah etmeye çalışalım: $A(3)$ noktası sayı doğrusu üzerinde 0'a denk gelen noktanın 3 br sağında olan noktadır. $B(10)$ noktası da 0'a denk gelen sayının 10 br sağında olan nokta demektir.



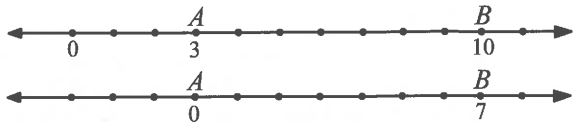
Şekilden de görüleceği üzere; $|AB| = 10 \text{ br} - 3 \text{ br} = 7 \text{ br}$.

Doğru cevap: D.

Aksiyom 4. *Bir doğru üzerinde P ve Q gibi iki nokta verildiğinde P'nin koordinatı sıfır ve Q'nun koordinatı pozitif olacak şekilde bir koordinat sistemi seçilebilir.*

Bu aksiyom da **Cetvel Yerleştirme Aksiyomu** olarak bilinir. Bu sayede örneğin bir üçgenin kenar uzunluklarını hesaplamak için üçgenin köşelerini teker teker cetvelin bir ucuna getirmek yerine, cetvelin ucunu üçgenin bir köşesine koyarak diğer köşenin cetvelin neresine geldiğine bakabilirsiniz diyor. Bu aksiyom olmasa ne yapardık acaba? ☺

Sanırım bir örnek versek daha iyi olacak.



$A(3)$ *ile* $B(10)$ noktaları arasındaki uzaklığı yani $|AB|$'yi hesaplamanın bir yolu da aynı sayı doğrusunun 0'a denk gelen noktasını A'ya getirince B noktasının o doğru üzerinde hangi reel sayıya geldiğine bakmaktır. Yukardan da görüldüğü üzere böyle bir hareket sonucunda B noktasının koordinatı 7 olacağından $|AB| = 7$ br dir.

Uzun lafın kısası A'nın koordinatını 0 yapmak için ona kaç eklemek ya da ondan kaç çıkarmak gerekiyorsa aynı işlemi B'nin koordinatına da yapın, bulduğunuz değer $|AB|$ değerine eşit olacaktır.

Örnek. *$A(-5)$ ile $B(12)$ noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?*

A) –17 B) 0 C) 7 D) 12 E) 17

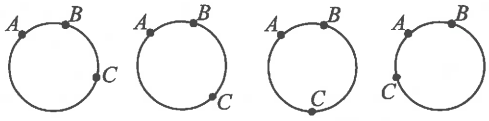
Çözüm: A'nın koordinatını 0 yapmak için –5'e 5 eklemeliyiz. B'nin koordinatına da 5 ekleyince 17 olduğundan $|AB| = 17$ br dir.

Doğru cevap: E.

Ara bağıntısı ve Ara aksiyomları. B noktasının A ile C arasında olduğunun ne ifade ettiğini herkes bilir. Şekildeki gibi iki durum mümkündür:



Eğer *arada olmayı* bir matematik kavramı olarak kullanacaksak, kesin olarak ne kastettiğimizi ifade edecek bir tanım vermeliyiz. Çünkü hislerimiz bizi aldatabilir. Bunu daha iyi anlamak için durumu çember üzerinde inceleyelim.



En soldaki şekilde B noktası A ile C arasındadır demek akla uygun geliyor. C noktası sağdaki şekillerde görüldüğü üzere çember üzerinde hareket ettirilip A'ya yaklaştırılırsa bu kez A noktası B ile C arasında görünür. O halde bir çemberde arada olma kesin değildir. Çember üzerinde verilen üç noktadan her biri diğer ikisi arasındadır denebilir. Bununla beraber bir doğru üzerindeki üç noktadan hangisinin diğer ikisi arasında olduğunu söylemek kolaydır ama şimdi matematikçesini söyleyeceğiz:

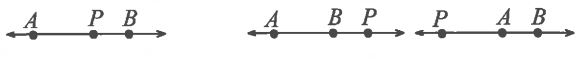
Tanım. *Eğer A, B ve C aynı doğrunun farklı noktaları ve $|AB| + |BC| = |AC|$ ise B noktası A ile C arasındadır.*

Ara aksiyomları, tanımsız ara bağıntısı ya da daha açık olarak "arada olma" bağıntılarıyla ilgilidir. Gauss, geometride böyle bir bağıntı ve bununla ilgili aksiyomların yer almadığını görerek, meslektaşı Farkas Bolyai'ye yazdığı bir mektupta bunların eksikliğinden ve bunları bir yerde göremediğinden yakınmıştır. Bu boşluk sonraları Pasch tarafından doldurulmuştur.

Bir P noktasının A ve B gibi noktalar arasında olmasını $[APB]$ veya $A*P*B$ simgesi ile göstereceğiz. Noktalara da aynı doğru üzerinde bulunduklarından "doğrudaş noktalar" diyeceğiz. Bu bağıntı ile ilgili aksiyom şudur:

A1. *$A*P*B$ ise A, P, B noktaları farklı olup doğrudaştır ve $B*P*A$'dır.*

P noktası A ile B arasında ise şu şekillerden hangisini benimseyeceğiz, (a)'dakini mi yoksa (b)'dekileri mi?



(a) (b)

Sezgimizi kullanarak (a)'yı benimseriz. Bağıntımız tanımsız olduğundan, acaba (a) yerine (b)'dekileri benimseyemez miyiz? Ben şahsen benimsemem, benimseyeni de sevmem☺ Ama böyle insanlar da bizle aynı havayı soluyor olabilir diye (b)'dekileri benimseme A2 aksiyomu ile önlenmektedir.

A2. *Farklı ve doğrudaş olan üç noktadan ancak birisi öteki ikisi arasındadır.*

Eğer (b)'yi, örneğin (b)'de soldakini benimsersek, bu üç noktadan hem A hem P öteki ikisi arasında kalmış olur; bu da A2'ye aykırıdır.

A3. *A ve B bir l doğrusu üzerinde farklı iki nokta ise l üzerinde A*B*P olacak biçimde bir P noktası vardır.*

Bu aksiyomla geometrimizdeki noktaların ve dolayısıyla doğru ile düzlemlerin sayısı sınırsız artmış oluyor. Çünkü $P_1 = P$ varlığından sonra $A*P_1*P_2$ olacak biçimde bir P_2 noktasını, sonra bir P_3 noktasının ve böyle devam ederek P_1, P_2, ... , P_n, ... gibi (birbirleriyle doğrudaş denilen) sayılabilir çoklukta noktaların varlığı bulunmuş olur. Böylece bu üçüncü aksiyomumuz geometrimizin sonlu geometri olmasını ortadan kaldırmış oluyor.

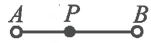
Doğrunun Parçaları. Bir doğru üzerinde A ve B gibi farklı iki nokta alınsın. A ve B noktaları ile bu noktaların arasında ve onlarla doğrudaş olan noktaların kümesine **doğru parçası**, A ve B noktalarına da **doğru parçasının uç noktaları** denir.

Bu doğru parçası $[AB]$ ya da $[BA]$ simgesiyle gösterilir. Şekille anlatımını da aşağıdaki gibi yaparız:



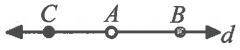
$[AB]$ doğru parçası

$A*P*B$ ise, P'ye $[AB]$'nin bir **iç noktası** denir.



İç noktaların kümesini (AB) ya da $]AB[$ ile gösteririz.

Bir d doğrusunun herhangi bir noktası doğrudan çıkartılırsa, d doğrusu iki parçaya ayrılır.



Bu parçaların her birine **yarıdoğru** ya da **yarımdoğru** denir.



$]AB$ yarıdoğrusu $]AC$ yarıdoğrusu

Bir A noktası ile AB yarıdoğrusunun birleşimine ***AB* ışını** denir ve $[AB$ ile gösterilir. Özel olarak, A'ya $[AB$'nin **başlangıç noktası** denir.



$[AB$ ışını

Doğru, doğru parçası, yarıdoğru ve ışın arasında sadece doğru parçasının boyunun hesaplanabileceğine dikkat ediniz. Çünkü diğer üçü en az bir yönde sonsuza uzamaktadır.

Bu kavramlar arasındaki ilişkiyi daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

d bir doğru ve A, B, C, D noktaları bu doğrunun üstünde olsun.



Yukardaki şekle göre;

✓ $d \cap [AB] = [AB]$

$[AB]$ üzerindeki her nokta zaten d üzerinde bulunduğundan $[AB]$ kümesi d'nin bir alt kümesidir. Böyle bir kesişim durumunda cevap tabii ki alt küme yani $[AB]$ çıkacaktır.

✓ $d \cup [BC = d$

$[BC$ üzerindeki her nokta zaten d üzerinde bulunduğundan $[BC$ kümesi d'nin bir alt kümesidir. Böyle bir birleşimde cevap tabii ki üst küme yani d çıkacaktır.

✓ $[AB \cup [CA = d$

$[AB$ ışını A noktasıyla birlikte A'nın sağında kalan tüm noktaları temsil etmektedir. Diğer yandan $[CA$ ışınıysa C noktası ile bu noktanın solundaki tüm noktaları temsil etmektedir. Bahsi geçen noktalar d doğrusu üzerindeki tüm noktaları temsil ettiğinden böyle bir birleşim bize d'yi verecektir.

✓ $[AB \cap [CA = [AC]$

$[AB$ ışını A noktasıyla birlikte A'nın sağında kalan tüm noktaları, $[CA$ ışınıysa C noktası ile bu noktanın solundaki tüm noktaları temsil etmektedir. Kesişim istendiğinden her iki ışın üzerinde bulunan noktalar kümesini cevap olarak vermeliyiz. Bu da kolayca görüleceği üzere $[AC]$ doğru parçasıdır.

✓ $[AB \cup [BC = [AB$

$[AB$ ışını A noktasıyla birlikte A'nın sağında kalan tüm noktaları, $[BC$ ışınıysa B noktası ile bu noktanın sağında kalan tüm noktaları temsil etmektedir. Anlayacağınız $[BC$ kümesi $[AB$ kümesinin altkümesidir. Birleşim bize üst kümeyi vereceğinden cevap $[AB$ ışını olmalıdır.

✓ $[AB \cap [BC = [BC$

Yukarda birleştirdiğimiz kümeleri şimdi kesiştirmemiz isteniyor. Bu durumda cevabın alt küme çıkacağını biliyoruz. O halde cevap $[BC$ ışını olmalıdır.

✓ $[BA \cap [BC = \{B\}$

$[BA$ ışını B noktasıyla birlikte B'nin solunda kalan tüm noktaları simgelerken $[BC$ ışını B noktasıyla birlikte B'nin sağında kalan tüm noktaları simgeler. İlk ışınla ikinci ışın arasında ortak olan tek nokta B noktası olduğundan bu kümelerin kesişimi $\{B\}$ olmalıdır.

✓ $\{A\} \cup]AB = [AB$

$]AB$ bir yarıdoğru olup sadece A'nın sağında kalan noktaların kümesidir. Bu kümeye A noktası eklenirse oluşacak küme A noktasıyla birlikte A'nın sağındaki tüm noktaları içereceğinden cevap $[AB$ ışını olmalıdır.

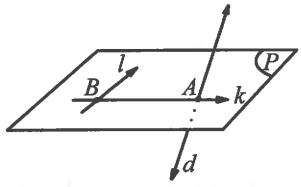
✓ $[AB[\cup \{B\} = [AB]$

$[AB[$ kümesi A noktasıyla birlikte A ile B arasındaki noktaları simgeler. Bu kümeye B'nin eklenmesiyle hem aradaki noktalar hem de A ile B noktaları kümeye dahil olacağından cevabımız $[AB]$ doğru parçası olmalıdır.

✓ $[BA \cup]BD = d$

$[BA$ ışını B noktasıyla B'nin solunda kalan tüm noktaları temsil eder. $]BD$ yarıdoğrusu ise B'nin sağında kalan tüm noktaları temsil eder. Birleşme durumunda kümede hem B'nin solu, hem B'nin kendisi, hem de B'nin sağı yani tüm noktalar olacağından cevap d doğrusu olmalıdır.

Aşağıdaki şekilde P düzlemi ve bu düzlemde bulunan l ve k doğruları ile bu düzlemi delip geçen bir d doğrusu görülmektedir.



Yukardaki şekle göre;

✓ $d \cap P = \{A\}$

Kesişim sorulduğundan kümelerin ortak elemanlarına bakmalıyız. A noktasından başka ortak eleman olmadığı aşikar.

✓ $l \cap P = l$

l doğrusu P düzleminde bulunduğundan l'nin üstündeki her nokta zaten P düzlemindedir. O halde ortak olan elemanlar l'nin kendisini belirtir.

✓ $l \cap k = \{B\}$

Farklı iki doğrunun en çok 1 tane ortak noktası olur o da kesişiyorlarsa kesişim noktasıdır. Şu durumda cevabımız B noktası olmalıdır.

✓ $d \cap k = \{A\}$

Üstteki durumla aynı durum söz konusudur. d ile k doğruları A noktasında kesiştiklerinden cevap A noktası olmalıdır.

✓ $d \cap l = \emptyset$

d ve l doğruları farklı düzlemlerde olup kesişmediklerinden cevap $\emptyset$ olmalıdır. Böyle doğrulara **aykırı doğrular** denir.

✓ $k \cup P = P$

k doğrusu P düzleminde bulunduğundan k'nin üstündeki her nokta zaten P düzlemindedir. O halde bu kümelerin birleşimi üstkümeyi yani P düzlemini belirtir.

✓ $A \in P$

A noktası k doğrusunun üzerindedir. k doğrusu P düzleminde olduğundan her noktası P düzlemindedir. O halde A noktası gerçekten P'nin bir elemanıdır.

✓ $A \in d$

A noktası d ile k doğrularının kesim noktası yani bu kümelerin kesişimidir. Kesişim kümesindeki elemanlar her iki kümeye de ait olduğundan A noktası d'nin elemanıdır.

✓ $d \not\subset P$

d'nin noktalarından sadece bir tanesi P'nin elemanıdır o da A noktası. Tüm noktaları P'ye ait olmadığından d doğrusunun P düzleminin bir altkümesi olduğunu söyleyemeyiz.

✓ $l \subset P$

l'nin tüm noktaları P düzleminde bulunduğundan l doğrusu P düzleminin altkümesidir.

✓ $k \subset P$

l gibi k'nin de tüm noktaları P düzleminde bulunduğundan k doğrusu P düzleminin altkümesidir.

✓ $AB \subset P$

$AB \subset k$ olduğunu görüyoruz. Diğer yandan $k \subset P$ olduğundan $AB \subset P$ olur.

✓ $B \in l$

B noktası k ile l doğrularının kesim noktası yani bu kümelerin kesişimidir. Kesişim kümesindeki elemanlar her iki kümeye de ait diye B noktası l'nin elemanıdır.

✓ $\{B\} \subset k$

B noktası k doğrusunun üzerinde olduğundan tek elemanı olan $\{B\}$ kümesi, B'yi de içeren noktalara sahip k kümesinin altkümesidir.

✓ $A \notin l$

Hem A noktası hem de l doğrusu P düzlemindedir fakat l doğrusu A noktasından geçmediğinden A, l'nin elemanı değildir.

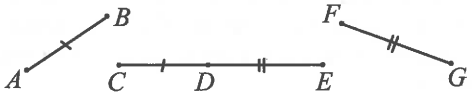
Eşlik Bağıntısı ve Eşlik Aksiyomları. Dersimizin başında her nesneyi veya bağıntıyı tanımlayamayacağımızı ve her önermeyi kanıtlayamayacağımızı söylemiştik. Bunun nedenini de dilimiz döndüğünce açıklamıştık. Tanımsız kabul edilen kavramlar "nokta", "doğru" ve "düzlem" idi, tanımsız kabul edilen bağıntılar da "üzerinde/içeriyor olmak", "arasında olmak" ve "eş olmak" demiştik. Şimdiki dersimiz, tanımsız bağıntıların sonuncusu olan "eşlik" bağıntısıyla ilgili. Tanımı olmadığından sezgisel olarak anlamaya çalışacağız.

"Eşlik" bağıntısı tanımsızdır. Çoğu zaman "≅" simgesiyle gösterilir. Yani A ile A' şekilleri eş ise $A \cong A'$ yazacağız.

Önce A'nın bir doğru parçası olduğunu, daha sonra bir açı daha sonra da bir üçgen olduğunu farz ederek eşlik belitlerini (aksiyomlarını) sırasıyla ve yeri gelince vereceğiz. Şu an sıra doğru parçalarının!

Doğru Parçaları İçin Eşlik Aksiyomları. Aşağıda bu iş için bilimsel açıklama var ama iki doğru parçasının eş olması, kabaca aynı boyda olmaları demektir.

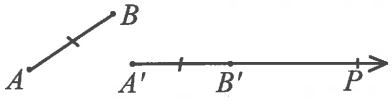
$[AB]$ ve $[CD]$ gibi iki doğru parçasının tanımsız eşliğini $[AB] \cong [CD]$ olarak yazacak ve eşlikleri şekilde doğru parçalarının üzerine birer ikişer eğik çizgiler çizerek göstereceğiz.



Yukardaki şekilde hem $[AB] \cong [CD]$ hem de $[DE] \cong [FG]$'dir. Yani $|AB| = |CD|$ ve $|DE| = |FG|$'dir. Dikkat edilecek olursa doğru parçalarında eşlik için yön veya doğrultunun önemi yokmuş, sadece uzunluğun önemi varmış!

Hilbert, doğru parçalarının eşliği için şu üç aksiyomu vermiştir:

E1. *A ve B farklı iki nokta ve $[A'P$ herhangi bir ışın olsun.*



Bir ucu A' noktasında, öteki ucu ışın üzerinde olan ve $[AB]$'ye eş bulunan bir tek $[A'B']$ vardır.

Anlatılmak istenen şudur: $|AB| = a$ br olsun. $A'P$ ışını üzerinde A' noktasına uzaklığı a br olan tek bir nokta vardır. O nokta da şekilde gösterilen B' noktasıdır.

E2. *Doğru parçaları için eşlik bağıntısı geçişkendir.*

Yani $[AB] \cong [A'B']$ ve $[A'B'] \cong [A''B'']$ ise $[AB] \cong [A''B'']$.

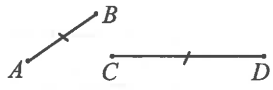
Burada anlatılmak istenen de iki farklı doğru parçasının boyu aynıyken, üçüncü bir doğru parçası ilk ikisinden biriyle aynı boydaysa, diğeriyle de aynı boydadır. Evet farkındayım, çok açık ama bunu kanıtlamak şu an için mümkün değil. Aksiyomlar da zaten böyledir, doğruluğu su götürmez ama kanıtlamak da mümkün değil, dikkat edin 'kolay değil' değil, mümkün değil.

E3. *$A*P*B$ ve $A'*P'*B'$ için $[AP] \cong [A'P']$ ve $[PB] \cong [P'B']$ ise $[AB] \cong [A'B']$ olur.*

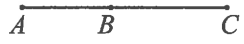


$[AB]$ ve $[A'B']$ gibi iki farklı doğru parçası düşünün. Her iki doğru parçası üzerinde de birer nokta alın. Her iki doğru parçasında da bu noktanın hem sol köşeye uzaklıkları eşit hem de sağ köşeye uzaklıkları eşitse, o zaman bu doğru parçalarının boyları eşittir demek istiyor.

$[AB]$ ve $[CD]$ gibi iki doğru parçasının eşliği, Öklid anlamında, bu doğru parçalarının çakışabilmeleridir. Bu da $[CD]$'nin yerinden kaldırılıp(!) bir hareketle $[AB]$ ile üst üste getirilmesi, yani C'nin A'ya konması halinde D'nin de B'ye gelebilmesidir(!). Bu iş başarılamayacağına göre, görev maddesel bir nesne olan pergele yüklenir. Pergelin birer molekül yığını olan uçları, $[CD]$'nin uçlarına konur ve hareketle pergelin bir ucu A'ya konup öteki ucun B'ye tam gelip gelmediğine bakılır. Bu iki işin anlamsızlığı ve olanaksızlığı böylece açıklanınca, eşliği belirtmek üzere bir tek yol kalıyor: Ya $[AB] \cong [CD]$ yazmakla yetinmek ya da bunu şekille şöyle göstermek:



Bu iki doğru parçasından birisi gözünüze daha kısa görünüyorsa da eşlikleri birer çizgiyle belirtilmiş bulunan bu doğru parçalarına eş gözüyle bakmak zorundayız.



Ancak yukardaki gibi $A*B*C$ durumunda $[AB] \cong [AB]$ olup, $[AB] \cong [AC]$ alamayız. $[AB] \cong [AB]$ olmasına hatta daha genel olarak bir geometrik nesnenin kendisine eş olmasına **özeşlik** adı verilir.

Bu tanımla birlikte giriş yazımızın sonuna gelmiş bulunuyoruz. Şu an "Oh be, sonunda şıklı sorulara geldik!" diye düşünenler, bu yazıyı 3 kez daha okusunlar. Bu yazıyı okumadan geçmiş olanlar da vardır. Ey okuyanlar! Onlara söyleyin, Allah onları bildiği gibi yapacak! ☺ "Tüh ya, keşke daha uzun olsaydı bu giriş yazısı" diyenlere de selam olsun!

www.mustafayagci.com.tr, 2011

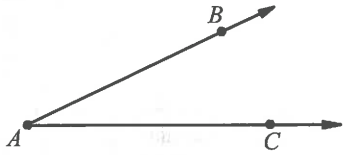
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Açı ve Açı Ölçüsü

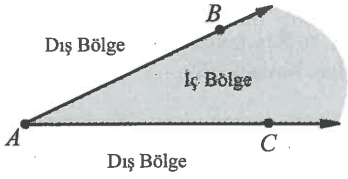
Herkes yerini alsın. Sırtına yaslansın. Geometrinin en temel konularından birine başlıyoruz. Tüm geometri dersi boyunca kullanılacak bir kavramı tanımlayarak notlarımıza başlıyoruz:

Açı. ***Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine* açı *denir.***



Üstteki şekilden neye benzediğini görebilirsiniz. A noktaları ortak olan AB ve AC ışınları birleşerek CAB açısını oluşturmuşlar. Bazı kaynaklarda, nedense açı 'doğrusal olmayan iki ışın' ile tanımlanır. Biz bu yasağı koymayıp noktaların doğrusallığını daha kolay bir şekilde anlatabileceğiz.

Yukardaki gibi bir açı $\widehat{CAB}$ yazarak gösterilir. Bu açıya, karışıklığa meydan verecek bir durum yoksa sadece A açısı da denebilir. Sıranın değil ama ortadaki köşenin önemli olduğuna dikkat ediniz. A noktasına **açının köşesi**, AC ve AB ışınlarına da **açının kolları** veya **kenarları** denir.



Açı bir bölge değildir, sadece üzerinde bulunduğu düzlemi bölgelere ayırır. Üstteki şekilde de görüldüğü üzere, açının kolları arasında kalan bölgeye **iç bölge**, dışarıda kalan bölgeye de **dış bölge** denir.

Açı ile iç bölgesinin birleşimi de **açısal bölge** diye isimlendirilir. $(\widehat{CAB})$ ile gösterilir. Benzer durum ilköğretimden ne olduğunu bildiğiniz çokgenlerde de vardır. İç bölge çokgene dahilse, birleşime **çokgensel bölge** denir.

Açı ile açısal bölgenin ayrımını çok iyi anlatan yandaki örnekleri bir güzel inceleyiniz.

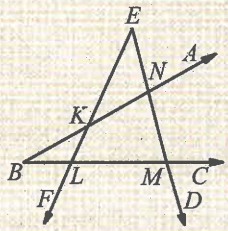
Örnek. *Yanda çizilmiş ABC ve DEF açıları için aşağıdaki soruları cevaplandırınız.*

i. $\widehat{ABC} \cap \widehat{DEF} = ?$

ii. $\widehat{ABC} \cap (\widehat{DEF}) = ?$

iii. $(\widehat{ABC}) \cap \widehat{DEF} = ?$

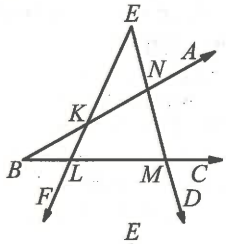
iv. $(\widehat{ABC}) \cap (\widehat{DEF}) = ?$



Çözüm: Bilmeyenler yukardan açı ile açısal bölgenin tanımlarını okuyup, sembollerini öğrensinler.

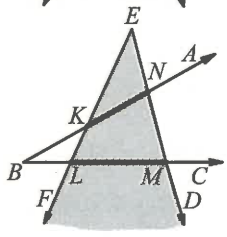
i. Açının tanımına göre; açı sadece ışınlardan oluştuğundan bu iki açının kesişimleri noktalardan ibaret olacaktır.

$$\widehat{ABC} \cap \widehat{DEF} = \{K, L, M, N\}$$



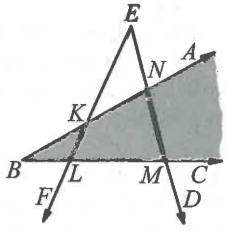
ii. DEF açısal bölgesine, DEF açısının iç bölgesi de girdiğinden ABC açısıyla DEF açısal bölgesinin kesişimi yandaki doğru parçaları olacaktır.

$$\widehat{ABC} \cap (\widehat{DEF}) = [KN] \cup [LM]$$



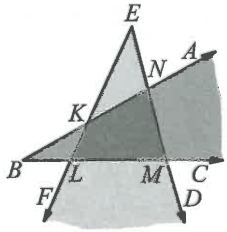
iii. Bu sefer ABC açısal bölgesinin ABC açısının iç bölgesini de kapsadığını unutmamalıyız. O halde bu bölgenin DEF açısıyla kesişimi yandaki doğru parçaları olacaktır.

$$(\widehat{ABC}) \cap \widehat{DEF} = [KL] \cup [MN]$$

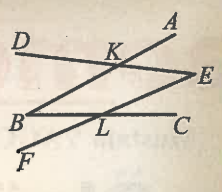


iv. Bu sefer kesişen kümelerin ikisi de bölge olduğundan cevap bir bölge çıkmalıdır. Cevaba $KLMN$ dörtgeni değil, $KLMN$ dörtgensel bölgesi dediğimize dikkat ediniz.

$$(\widehat{ABC}) \cap (\widehat{DEF}) = (KLMN)$$

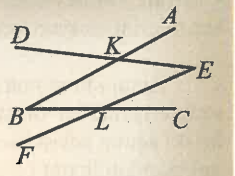


1.
Yanda çizilmiş *ABC* ve *DEF* açılarının kesişimi aşağıdakilerden hangisidir?



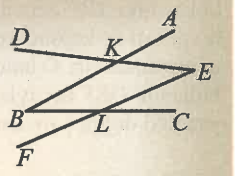
A) *KBLE* dörtgeni
B) *KBLE* dörtgensel bölgesi
C) *K*, *B*, *L*, *E* noktaları
D) *K* ve *L* noktaları
E) *BK* ve *BL* doğru parçaları

2.
Yanda çizilmiş *ABC* ve *DEF* açısal bölgelerinin kesişimi aşağıdakilerden hangisidir?



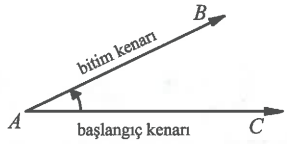
A) *KBLE* dörtgeni
B) *KBLE* dörtgensel bölgesi
C) *K*, *B*, *L*, *E* noktaları
D) *K* ve *L* noktaları
E) *BK* ve *BL* doğru parçaları

3.
Yanda çizilmiş *ABC* açısı ve *DEF* açısal bölgesinin kesişimi aşağıdakilerden hangisidir?

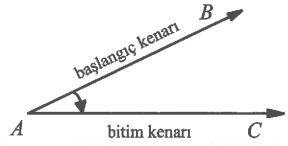


A) *KBLE* dörtgeni
B) *KBLE* dörtgensel bölgesi
C) *K*, *B*, *L*, *E* noktaları
D) *K* ve *L* noktaları
E) *BK* ve *BL* doğru parçaları

Yönlü Açı. Geometride değil ama trigonometride açının kenarları arasında da bir ayrım yapılır: Biri **başlangıç kenarı**, diğeri **bitim kenarı** diye bilinir. Hangisinin hangisi olduğu, alt şekildeki gibi oklarla belirtilir.



Pozitif yönlü *CAB* açısı



Negatif yönlü *BAC* açısı

Başlangıç kenarından bitim kenarına ilerlerken saatin ters yönünde gidiyorsak (üst soldaki şekil) açıya **pozitif yönlü açı**, saatle aynı yönde gidiyorsak (üst sağdaki şekil) açıya **negatif yönlü açı** deriz. Yönlü açıların yazımında sıra önemlidir!

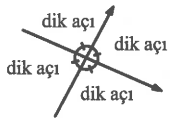
Üzülerek ifade edeyim ki; öğretmenliğimin ilk zamanlarında (ama azımsanmayacak kadar uzun bir süre) daha açının ne olduğunu bile bilmiyormuşum. Üzüntüm o ki, benim gibi onlarca yıllık binlerce geometri öğretmeni var. Hepimiz bildiklerimizi doğru zannediyormuşuz desem daha doğru olur. İşin garip tarafı hepimiz de aynı yanlışı doğru biliyormuşuz. İki ışının arasına, köşeye yakın bir yay çizip (bizim yukardaki şekilde yaptığımız gibi), ''İşte, açı budur!'' diyordum. Halbuki o çizdiğimiz çizginin, yazacağımız açı ölçüsünün hangi açıya ait olduğunu belirtmek, yani diğer açılarla karışmasını önlemek için bir belirteç olduğunu öğrendiğimde kelli felli bir adamdım. 'Kalem' ile 'Kalemin uzunluğu' kavramlarının farklı olduğu cinsinden bir gerçeği nasıl da yıllarca farkedememişim, hayret! Uzun lafın kısası ''Açı'' başka şeydir, ''Açının ölçüsü'' başka...

Açının kolları arasındaki açıklık büyüdükçe açının ölçüsünün arttığını, küçüldükçe azaldığını anlamak ve anlatmak için bu açıklığın niceliğini (yani büyüklüğünü) bir sayıya karşılık getirmemiz gerekir. Bu sayıya da **açının ölçüsü** deriz. Bir açının ölçüsünü biz önüne *m* koyarak göstereceğiz. *m*(*BAC*), *m*(*A*) gibi. Fakat *m* yerine $\angle$ veya α simgeleri de koyulabilir.

Bir açının ölçüsü, günümüzde üç değişik ölçüm sistemiyle yapılmaktadır. Tek bir açının ölçüsüne farklı üç sayının verilebilmesi sizi şaşırtmasın. Nasıl ki, Adana ile Ankara arasındaki mesafe sana-bana göre yaklaşık 500 km ama bir başkasına göre 300 mil olabiliyor, bu da onun gibi bir şey. İki şehir arasındaki mesafeye bir şey olduğu yok, uzayıp kısalmıyor ama o uzunluk farklı farklı anlatılabiliyor.

İşte insanoğlunun uzunluk ölçülerine verdiği km veya mil birimleri gibi, biz de açı ölçülerine farklı birimler vereceğiz. Birimi ne olursa olsun, ölçüsü aynı iki açıya **eş** diyeceğiz. Birimlerin içinde en yaygın kullanımda olanı derece olduğundan, dereceyi anlatmakla işe başlayalım. Tabi önce bir açı tanımlamalıyız ki, ölçüsüne isim verebilelim.

Dik Açı ve Derece Birimi. İki doğru birbirini kestiğinde oluşan dört açının dördü de eş oluyorsa, *doğrular birbirini dik kesiyor* denir.



Açılara da **dik açı** adı verilir. Ortak kenarları göz ardı edilerek, 'iki dik açı bir **doğru açı**, dört dik açı da bir **tam açı** oluşturur' diye düşünmek mümkündür.

Dik açının ölçüsü 90 derece (90°) olarak tanımlanmıştır. Bu durumda doğru açının ölçüsü 180°, tam açının ölçüsü de 360° olur.

Genel olarak, ölçüsü 0° olan açıya **yoz açı**, (0°, 90°) aralığındaki açıya **dar açı**, 90° olana **dik açı**, (90°, 180°) aralığındakine **geniş açı**, 180° olana **doğru açı** ve 360° olanına da **tam açı** denir.

Ölçüsü (180°, 360°) aralığındaki açılara **üstün** diyeceğiz, 180°'den ne kadar büyükse ona göre özel isimler vereceğiz: (180°, 270°) aralığındaki açılara **üstün dar açı**, 270° olanına **üstün dik açı**, (270°, 360°) aralığındakilere **üstün geniş açı** denir.

Birçok kaynakta, bir açının ölçüsünün derece cinsinden değerinin 0 ile 180 arasında değiştiği yazılıdır. Ama görüldüğü gibi ölçüsü 180'den büyük olan açılar da varmış, peki neden öyle yazılıyor sizce? Hatta siz de ''Ama ben 330 derece gibi 180 dereceden daha büyük ve –30 derece gibi 0 dereceden daha küçük açı ölçüleri de gördüm'' diyor olabilirsiniz. Doğrudur, ölçülerde 0 ile 180 aralığının dışına çıkılması açının yönüyle, başlangıç bitim kenarlarıyla ilgilidir, yani hangi amaca hizmet edildiğini bilmek gerekir. Yoksa ölçüsü –30 derece ve 330 derece olan açıların, ölçüsü 30 derece olan açıyla görünüş olarak (kollar arasındaki açıklığın büyüklüğü olarak) farkı yoktur. Ama bunların (0°, 360°) aralığında olanına **esas ölçü** denir.

Derecenin Alt Birimleri. Bir tam açının 360'da birine **1 derecelik açı** denir ve 1° şeklinde gösterilir.

Her ne kadar 1 derecelik açı ölçüsünün katlarını kullanarak günlük hayatta dertlerimizi anlatabiliyorsak da çok hassas durumlarda daha hassas açı ölçülerine gereksiniriz. Birer ışınları ortak 22° ölçüye sahip bir açıyla 23° ölçüye sahip bir açı arasında hiç mi boşluk yoktur? Elbette vardır, gözle göremesen de vardır. O boşluğa da bir ışın çizsek ölçüsü 22° ile 23° arasında olan bir açı çizmiş oluruz. Bunun için de 1°'lik ölçünün de parçalanması gerekir. Matematikçiler bu parçalamayı yapıp, adını da koymuşlar:



1 derecenin 60'da birine **1 dakika** denir ve 1′ yazarak gösterilir. Benzer şekilde, 1 dakikalık açı da parçalanabilir. 1 dakikanın 60'da birine de **1 saniye** denir ve 1″ ile gösterilir.

Bu durumda $1° = 60' = 3600''$ olacağına dikkat ediniz.

Gelelim açıyla ilgili soru tiplerine... Genel olarak; bir açının ölçüsü derece-dakika-saniye ölçü birimlerinden biri cinsinden verilerek diğer iki birim cinsinden değeri sorulur. Çözüm için şu metot izlenir:

Derece 60'la çarpılırsa dakika, dakika 60'la çarpılırsa saniye bulunur. O halde derece 3600'le çarpılırsa saniye bulunur. Saniye 60'a bölünürse dakika, dakika da 60'a bölünürse derece bulunur. O halde saniye 3600'e bölünürse derece bulunur.

Bir örnek versek iyi olacak.

Örnek. *60 derecelik açı kaç dakikalıktır?*

A) $\frac{1}{3600}$ B) $\frac{1}{60}$ C) 1 D) 60 E) 3600

Çözüm: 1 derece, 60 dakikaya eşit olduğundan, 60 derece 60·60 = 3600 dakikaya eşit olur.

Doğru cevap: E.

4.
30 derecelik bir açının ölçüsü kaç dakikadır?

A) $\frac{1}{120}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 180 **E)** 1800

Şimdi de büyükten küçüğe geçişe örnek verelim:

Örnek. *54000″ lik açı kaç derecedir?*

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Çözüm: Saniye 60'a bölünürse dakika, dakika 60'a bölünürse de derece bulunur. Dediklerimizi yapalım: 54000/60 = 900′ ve 900′/60 = 15° olur.

Doğru cevap: B.

5.
Ölçüsü 18000″ olan açı kaç dereceliktir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 **E)** 5

6.
229632 saniyelik bir açı kaç derece, kaç dakika ve kaç saniyedir?

A) $62^0\ 47'\ 12''$ B) $63^0\ 46'\ 22''$ C) $63^0\ 46'\ 12''$
D) $63^0\ 47'\ 22''$ E) $63^0\ 47'\ 12''$

1986 ÖYS

Şimdi de bu ölçülerle toplama-çıkarma yapacağız. Burada dikkat etmemiz gereken şey, saniye ve dakikanın 60'dan küçük kalmasıdır. Zira 60 saniye yerine 1 dakika, 60 dakika yerine de 1 derece deriz.

Örnek. *Ölçüleri toplamı* 90° *olan iki açıya birbirlerinin tümleri denir. Bu tanıma göre, ölçüsü* $23^\circ\ 35'\ 47''$ *olan bir açının tümlerinin ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $67^\circ\ 24'\ 13''$ B) $66^\circ\ 23'\ 47''$ C) $66^\circ\ 24'\ 13''$
D) $67^\circ\ 25'\ 13''$ E) $66^\circ\ 24'\ 47''$

Çözüm: $23^\circ\ 35'\ 47''$ ile toplayınca 90° edecek olan açı ölçüsünü arıyoruz.

$$\begin{aligned} 90^\circ &= 89^\circ + 1^\circ \\ &= 89^\circ + 60' \\ &= 89^\circ + 59' + 1' \\ &= 89^\circ + 59' + 60'' \end{aligned}$$

olduğundan, cevabımız

$$(89^\circ + 59' + 60'') - (23^\circ\ 35'\ 47'') = 66^\circ\ 24'\ 13''$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

7.
Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya birbirlerinin bütünleri denir.
Bu tanıma göre, ölçüsü $123^\circ\ 25'\ 43''$ olan bir açının bütünlerinin ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $57^\circ\ 35'\ 17''$ B) $57^\circ\ 34'\ 17''$ C) $56^\circ\ 35'\ 17''$
D) $56^\circ\ 34'\ 17''$ E) $57^\circ\ 25'\ 43''$

Bir de minimum-maksimum sorusu sormasak olmaz.

Örnek. *a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere*

$$2007' = a^\circ\ b'$$

olduğuna göre a + b toplamı en az kaç olabilir?

A) 34 B) 40 C) 50 D) 60 E) 67

Çözüm: Bakalım kaç olabilirmiş. $2007' = 1^\circ\ 1947'$ olarak yazılabildiği gibi $2^\circ\ 1887'$ olarak da yazılabilir. Görüldüğü gibi dereceyi simgeleyen a sayısı büyüdükçe toplam küçülüyor. O halde a'yı mümkün mertebe büyük tutmak gerekir. 2007 sayısı 60'a bölünürse bölüm 33 kalan 27 olacaktır. O halde $2007' = 33^\circ\ 27'$ yazılabilir. Bu durumda $a = 33$ ve $b = 27$ olduğundan $a + b$ toplamı 60'dır.

Doğru cevap: D.

8.
a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

$$200' = a^\circ\ b'$$

olduğuna göre $a + b$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 **D)** 23 E) 24

Açı ölçüleriyle toplama-çıkarma yapılabildiği gibi çarpma da yapılabilir. Dikkat edilecek tek nokta, çarpımdan sonra dakika ve saniye kısmı 59'dan büyük olursa, onları uygun şekilde parçalayacağız.

Örnek. $m(A) = 19^\circ\ 20'\ 40''$ *olduğuna göre* $2 \cdot m(A)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $38^\circ\ 41'\ 20''$ B) $38^\circ\ 40'\ 40''$ C) $38^\circ\ 40'\ 20''$
D) $39^\circ\ 40'\ 20''$ E) $39^\circ\ 41'\ 20''$

Çözüm: A açısının ölçüsünü tamamen saniye cinsinden yazıp, sonra 2 ile çarpıp, daha sonra da çıkan sonucu derece ve dakikaya çevirebiliriz ama bu zekamıza hakaret olur. Şöyle yapacağız:

Bize verilen değerleri derhal 2 ile çarpalım, 59'u geçenin kulağını çekelim. Şöyle ki:

$$\begin{aligned} 2 \cdot m(A) &= 38^\circ\ 40'\ 80'' \\ &= 38^\circ\ 40'\ 60'' + 20'' \\ &= 38^\circ\ 41'\ 00'' + 20'' \\ &= 38^\circ\ 41'\ 20'' \end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

9.

$m(A) = 19° 20' 40''$

olduğuna göre $3 \cdot m(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $57° 00' 20''$ B) $58° 00' 40''$ C) $58° 01' 00''$
D) $58° 02' 00''$ E) $59° 02' 00''$

Çarpma yapılabilir de bölme yapılamaz mı? Öyle bir yapılır ki... Buradaki temel espri, ölçünün yarısı soruluyorsa derece, dakika ve saniyeyi çift yapmak, üçte biri soruluyorsa üçün katları yapmak, dörtte biri soruluyorsa dördün katları yapmak, vs...

Örnek. $m(A) = 19° 20' 40''$ *olduğuna göre* $\frac{1}{2}m(A)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $9° 10' 20''$ B) $9° 20' 40''$ C) $9° 40' 10''$
D) $9° 40' 20''$ E) $9° 11' 20''$

Çözüm: 20 ve 40 ikiye bölünür ama 19 bölünmediğinden şöyle yapacağız: $19 = 18 + 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(A) &= 19° 20' 40'' \\ &= 18° 20' 40'' + 1° \\ &= 18° 20' 40'' + 60' \\ &= 18° 80' 40'' \end{aligned}$$

olur ki $\frac{1}{2}m(A) = 9° 40' 20''$ bulunur.

Doğru cevap: D.

10.

$m(A) = 13° 40' 20''$

olduğuna göre $\frac{1}{2}m(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6° 20' 10''$ **B)** $6° 50' 10''$ C) $6° 40' 40''$
D) $7° 20' 20''$ E) $7° 41' 10''$

Bir de bir ölçünün üçte birini bulmaya örnek verelim de tam süper olsun.

Örnek. $m(A) = 19° 20' 48''$ *olduğuna göre* $\frac{1}{3}m(A)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $6° 25' 16''$ B) $6° 26' 16''$ C) $6° 26' 21''$
D) $6° 6' 56''$ E) $6° 26' 56''$

Çözüm: Ne 19, ne de 20 üçe bölünmektedir. O halde zenginden alıp fakire verir gibi, dereceden alıp dakikaya o da olmadı dakikadan alıp saniyeye vereceğiz.

$$\begin{aligned} m(A) &= 19° 20' 48'' \\ &= 18° 80' 48'' \\ &= 18° 78' 168'' \end{aligned}$$

olur ki şu an hepsi üçe bölünebilmektedir. Şu durumda

$$\frac{1}{3}m(A) = 6° 26' 56''$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

11.

$m(A) = 13° 40' 21''$

olduğuna göre $\frac{1}{3}m(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $4° 33' 27''$ B) $4° 33' 07''$ C) $4° 13' 07''$
D) $4° 13' 27''$ E) $4° 33' 21$

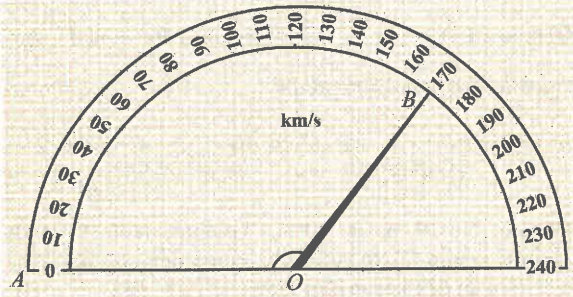
12.

$m(A) = 16° 40' 21''$

olduğuna göre $90° - \frac{1}{3}m(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $85° 26' 27''$ B) $84° 33' 27''$ C) $84° 33' 33''$
D) $85° 26' 33''$ **E)** $84° 26' 33''$

Örnek. *Yapabileceği maksimum hız* 240 km/s *olan bir otomobilin hız göstergesi aşağıda verilmiştir.*



Bu araç 170 km/s *hız ile seyahat ederken, göstergenin ibresi otomobilin harekete başladığı andan itibaren kaç derece dönmüştür?*

A) 120 B) 135 C) 142,5 D) 147,5 E) 152,5

Çözüm: Burada mühim olan, ibrenin, bir tam dönüşün ya da bir yarım dönüşün kaçta kaçı kadar döndüğünü bulmaktır. Araç, gidebileceği maksimum hızda gitse, ibre tam olarak yarım dönme yapmış olmayacak mıydı? O halde şu durumda yarım dönmenin 240'da 170'i kadar dönmüştür. Yarım dönme, 180 derecelik dönme olarak kabul edildiğinden

$$m(AOB) = 180^\circ \cdot \frac{170}{240} = 147{,}5^\circ$$

olur.

Doğru cevap: D.

Grad. Bir tam açının 400'de birine **1 gradlık açı** denir. Yani 400 gradlık açı bir tam açıdır. O halde 400 grad, 360 dereceye eşittir diyebiliriz.

1 gradlık açının ölçüsünü 1^g yazarak göstereceğiz.

Not: Grad cinsinden ölçüyü, maksimum hızı 200 km/s olan bir aracın hız göstergesi gibi düşünebilirsiniz. Yani '140 grad kaç derecedir?' şeklindeki bir soruyu kadranı 200 km/s olan arabanın, ibresi 140 km/s'yi gösterirken, ibrenin yatay konumdan itibaren kaç derece döndüğünü bularak cevaplayabilirsiniz.

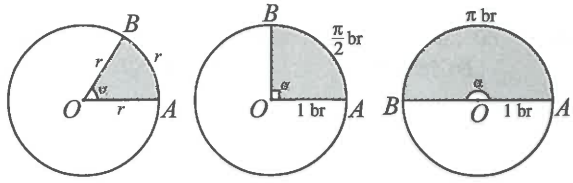
Örnek. *Ölçüleri toplamı* 90° *olan iki açıya birbirinin tümleri denir. Bu tanıma göre ölçüsü* 18° *olan açının tümlerinin ölçüsü kaç graddır?*

A) 60 B) 72 C) 75 D) 80 E) 100

Çözüm: 18 derecelik açının tümlerinin ölçüsü 72 derecedir. 72°, bir tam açı ölçüsünün 1/5'i olduğundan, grad cinsinden $400 \cdot 1/5 = 80$'e eşittir.

Doğru cevap: D.

Radyan. Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açıya **1 radyanlık açı** denir. Bir tam açının ölçüsü 2π radyandır.



$\alpha = 1$ radyan $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$ radyan $\quad \alpha = \pi$ radyan

Radyan cinsi açı ölçüsü ile anlatılmak istenen temel şey, çember üzerinde alınacak iki farklı noktanın çember yayı üzerinden birbirlerine uzaklıklarıdır. Sabit bir çemberde iki nokta arasındaki uzaklık değiştikçe, köşesi çemberin merkezi olup bu verilen noktalardan geçen açının derece cinsinden ölçüsü de değişir. Yani her farklı uzunluğa farklı bir açı ölçüsü tekabül eder. Aralarındaki bu ilişkiyi aşağıdaki orantı tayin eder:

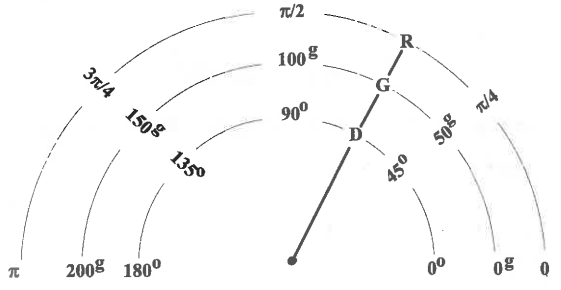
Not: Radyan cinsinden ölçüyü, maksimum hızı π km/s olan bir aracın hız göstergesi gibi düşünebilirsiniz.

Soru tipi. Bir açının ölçüsü, derece-grad-radyan ölçü türlerinden biri cinsinden verilir ve verilmeyen iki ölçü türünün biri cinsinden sorulur.

Çözüm yolu: Derece(D), grad(G), raydan (R) arasında

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

eşitliği geçerlidir. Verilen ölçü eşitlikte yerine yazılır ve sorulan değer orantı kurularak rahatlıkla bulunur.



Yukardaki şekilden de görüleceği üzere; bir açının ölçüsünü değişik birimler kullanarak söylemek, açıyı değiştirmez. Yani kolların arasındaki açıklığı değiştirmez. Mühim olan verilen açının bir tam dönüşün kaçta kaçı olduğuna bakmak ve onla kıyaslamaktır. Ha tam dönmeye 360 derece dönmek demişsin, ha 400 grad dönmek demişsin, ha 2π radyan dönmek demişsin…

Örnek. 36 *derecelik bir açı ölçüsü kaç grad ve kaç radyandır?*

A) 40^g ve $\frac{\pi}{10}$ B) 80^g ve $\frac{\pi}{10}$ C) 20^g ve $\frac{2\pi}{5}$

D) 40^g ve $\frac{\pi}{5}$ E) 80^g ve $\frac{\pi}{5}$

Çözüm: $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$ olduğundan $\frac{36}{180}=\frac{G}{200}$ eşitliğini kullanarak, ölçünün 40^g olduğunu buluruz. Diğer yandan $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$ olduğundan $\frac{36}{180}=\frac{R}{\pi}$ olur ki, aynı ölçü radyan cinsinden de $\frac{\pi}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 1 *dakikalık açı ölçüsü kaç radyandır?*

A) $\frac{\pi}{720}$ B) $\frac{\pi}{1080}$ C) $\frac{\pi}{5040}$ D) $\frac{\pi}{10800}$ E) $\frac{\pi}{21600}$

Çözüm: 1 derecenin 60 dakika olduğunu biliyoruz. O halde 1 dakika yerine 1/60 derece yazabiliriz. Bunu formülümüzde yerine yazarsak,

$$\frac{\frac{1}{60}}{180}=\frac{R}{\pi}$$

eşitliğinden $R=\frac{\pi}{10800}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

13.
1 dakikalık ölçü kaç graddır?

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{2}{27}$ C) $\frac{4}{27}$ **D)** $\frac{1}{54}$ E) $\frac{7}{54}$

14.
108 dakikalık açı ölçüsü kaç π radyandır?

A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{10}$ C) 1 D) 10 E) 100

Örnek. *Ölçüsü* $[0, \pi]$ *aralığında olan farklı açıların kaçının ölçüsü hem grad hem de derece cinsinden tam sayıdır?*

A) 7 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm: $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$ eşitliğinden $D=\frac{9}{10}G$ elde edilir. Bu eşitlikten de G, 10'un katı olduğu sürece D'nin de tam sayı olacağı anlaşılır. Radyan cinsinden $[0, \pi]$ demek grad cinsinden $[0, 200]$ demek olduğundan $[0, 200]$ aralığında kaç tane 10'un katı olan sayının olduğuna bakmalıyız. O da 0, 10, 20, 30, ..., 200 olmak üzere 21 tanedir.

Doğru cevap: E.

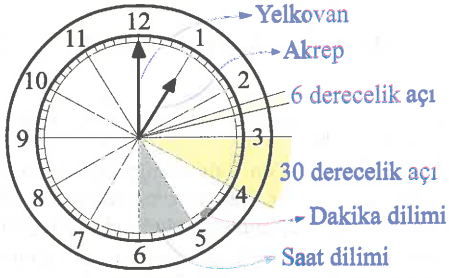
15.
Toplamları 180° olan üç açı ölçüsünün oranı 4:5:6 olduğuna göre üçü arasında en büyük ölçü kaç radyandır?

A) $\frac{1}{4}\pi$ B) $\frac{1}{5}\pi$ C) $\frac{1}{6}\pi$ **D)** $\frac{2}{5}\pi$ E) $\frac{2}{3}\pi$

16.
Esas ölçüsü 180° ile 360° arasında olan açılara **üstün açı** denir.
Bu tanıma göre aşağıdaki ölçülere sahip açılardan hangisi üstün açıdır?

A) 2008π B) 2008^g C) 2008° D) 200^g E) 5π

Saat Problemleri. Bazen durmuş bir saatte veya bir anlığına durduğunu düşündüğümüz bir saatte akrep ile yelkovanın belirttiği açının ölçüsünü sorarlar.



Bu tip soruları çözmek için akrep ile yelkovanın herhangi bir zaman diliminde kaç derece ilerlediğini bilmemiz lazımdır. 12 saatlik bir zaman dilimi bir tam çember belirttiğinden her saat dilimi 30 derecelik bir açı belirtir. Yani akrep 1 saatte 30° ilerler. Akrep 1 saatte 1 dilim giderken yelkovan 12 dilim gider. İşte bu saat problemlerinin temelini teşkil edecek.

Yelkovanın hızı akrebin hızının 12 *katıdır*!

Şu durumda yelkovan 1 saatte 360° ilerliyorsa 1 dakikada 6° ilerliyordur. Yani dakika dilimlerinin belirttiği açıların her birinin ölçüsü 6° dir.

Herhangi bir anda akrep ile yelkovanın belirttiği açı ölçüsünü hesaplamak için şu işlemleri yapacağız. Eğer saat başıysa sorun yok; zira her saat dilimi 30° lik açı belirttiğinden

1:00'da açının ölçüsü 30°
2:00'da açının ölçüsü 60°
3:00'da açının ölçüsü 90°
...
6:00'da açının ölçüsü 180°

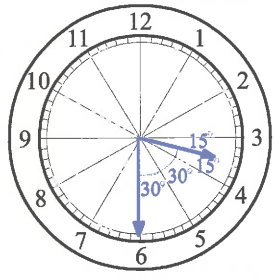
olur. 7:00'da açının ölçüsüne 210° demek yerine 150° deriz, genelde ölçü olarak küçük olanın ölçüsü söylenir.

Eğer problemdeki zaman bir saat başı değilse, saat başından itibaren akrebin ve yelkovanın kaçar derece ilerledikleri tayin edilir, aradaki fark cevap olacaktır. Bunun için önce yelkovanın kaç derece ilerlediği bulunur, akrebinki onun 1/12'sidir zaten.

Örnek. *Saat tam* 3:30'*da akrep ile yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 15 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

Çözüm: Önce saat başını düşünelim. Saat başından itibaren yani saat 3:00'dan itibaren yelkovan 6 dilim yani 180° ilerlemiş. Akrep bunun 1/12'si kadar yani 15° ilerlemiştir.



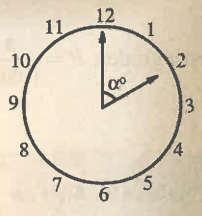
Üst şekilden de görüldüğü üzere arada 2 tane dilim ve 15° lik açı kalmıştır. Bu yüzden cevap

$$30^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 75^\circ$$

olmalıdır.

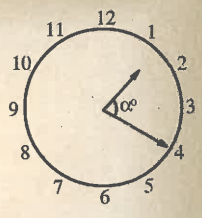
Doğru cevap: D.

17.
Saat tam 2:00'ı gösterirken akreple yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir?



A) 45 B) 52,5
C) 60 D) 67,5
E) 75

18.
Saat 01:20'yi gösterirken akreple yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir?



A) 67,5 B) 70
C) 75 **D) 80**
E) 82,5

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

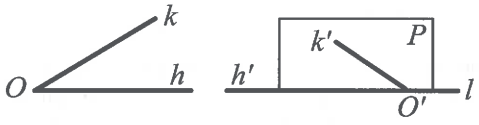
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Açı Çeşitleri

Açılarda Eşlik Aksiyomları. Hilbert, doğru parçalarının eşliğine ilişkin üç, açılar için ise tek aksiyom vermiştir. Biz, doğru parçalarıyla açılar arasındaki benzerliği göz önünde tutarak, Hilbert'ten ayrılıp açılar için de üç aksiyom vereceğiz. Sözünü ettiğimiz benzerliği, bu üç aksiyomu daha önce verdiğimiz E1, E2, E3 ile karşılaştırarak daha iyi anlayacaksınız.

Kabaca, açıların eşliği demek, o açıların ölçülerinin eşitliği demektir. Aksiyomları, bunu düşünerek okursanız daha iyi anlarsınız, gerçi ben gerekli açıklamaları da yaptım.

Aksiyomlarda ve açıklamalarda kolaylık olsun diye ABC açısını $\widehat{ABC}$ yerine ABC ile gösterdim, affedin.



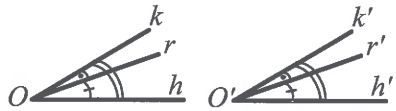
E4. *hOk bir açı ve $[lP$ herhangi bir düzlem-ışın ise bir kenarı l üzerinde öteki kenarı düzlem-ışın üzerinde olan ve hOk açısına eş bulunan bir tek $h'O'k'$ açısı vardır.*

Önce ''düzlem-ışın'' nedir onu açıklayayım: Yarı doğru ile ışın arasındaki fark neydi? Yarı doğrunun başlangıç noktası kendisine dahil değildi ama ışında dahildi. Yarı düzlem ile düzlem-ışın çiftindeki fark da öyledir. Yarı düzlemde, düzlemi bir tarafından sınırlayan doğru kendisine dahil değildir ama düzlem-ışında dahildir. Düzlem-ışın müfredatta sanırım kapalı yarı düzlem diye geçiyor.

Gelelim aksiyomun ne dediğine: Bir kenarı düzlem-ışını sınırlayan doğru olmak kaydıyla ölçüsü α° olan bir açı çizmek isterseniz, düzlem-ışın içinde bunu yapabilecek sadece tek bir ışın vardır diyor. Hani bazen, örneğin soruda $[AB]$ yapayalnız dururken, biz durduk yere $m(ABC) = 30^\circ$ olmak üzere bir BC çizelim diyoruz ya, bunun tek olduğunu bilerek, çizme hakkı veriyor bize bu aksiyom.

E5. *Açılar için eşlik bağıntısı geçişkendir. Yani; $hOk \cong h'O'k'$ ve $h'O'k' \cong h''O''k''$ ise $hOk \cong h''O''k''$.*

Bu aksiyomun ne demek istediği çok açık. Aynı ölçüye sahip iki açı varken, üçüncü bir açının ölçüsü ilk iki açının ölçüsünden birine eşitse diğerine de eşittir diyor, daha ne desin.



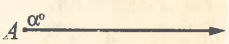
E6. *$hOr \cong h'O'r'$ ve $rOk \cong r'O'k'$ ise $hOk \cong h'O'k'$.*

Bu aksiyom da aynı doğru parçalarının boylarında olduğu gibi açı ölçülerinin de toplanabilmesine yetki veriyor. ''İki farklı açı düşünün, ölçüleri α_1 ve α_2 ama $\alpha_1 = \alpha_2$ olsun. Şimdi de iki farklı açı daha düşünün, ölçüleri θ_1 ve θ_2 olsun. Burada da $\theta_1 = \theta_2$ olsun. Ölçüsü $\alpha_1 + \alpha_2$ olan bir açıyla, ölçüsü $\theta_1 + \theta_2$ olan bir başka açı eş olur'' diyor, sağolsun!

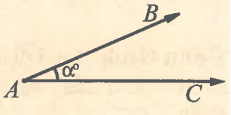
Doğru parçalarının eşliği üzerinde söylediğimiz sözler, açıların eşliği için de geçerli olup hOk ve pOq gibi iki açının eşliği ancak $hOk \cong pOq$ yazmakla ya da şekillerde eşitlikleri bunları belirleyen yaylar üzerinde birer ikişer çizgi çizmekle ifade olunabilir.

Açılar ölçülerinin büyüklüğüne göre çeşitlere ayrılırlar. Aşağıda açıların ölçülerine göre hangi adları aldıklarını göreceksiniz. Daha sonra da birden çok açının hangi özel durumlarda hangi adları alacaklarını vereceğiz. Başlıyoruz.

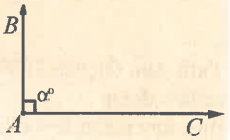
Sıfır (Yoz) Açı. Ölçüsü 0° olan açıya denir. Çakışık iki ışını düşünebilirsiniz. $\alpha = 0^\circ$.



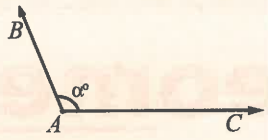
Dar Açı. Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara denir. $m(CAB) = \alpha < 90^\circ$.



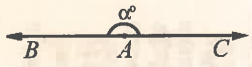
Dik Açı. Ölçüsü 90° olan açılara denir. $m(CAB) = \alpha = 90^\circ$. İki doğrunun dik kesişmesi $CA \perp AB$ ile gösterilir. 90°, bazı kaynaklarda 1 dik açı manasında 1^D olarak da gösteriliyor.



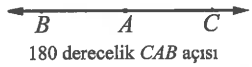
Geniş Açı. Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açılara denir.
$90° < m(CAB) = \alpha < 180°$.



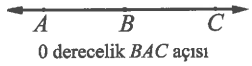
Doğru Açı. Ölçüsü 180° olan açılara denir. Başlangıç noktaları aynı olan zıt yönlü iki ışın bir doğru açı oluşturur.
$m(CAB) = \alpha = 180°$.
Bazı kaynaklarda 2 dik açı manasına gelen 2^D olarak da gösteriliyor.



Not. 0° ile 180° ölçüye sahip açıların yazılımındaki küçük ayrıntıya dikkatinizi çekmek istiyorum!



180 derecelik CAB açısı



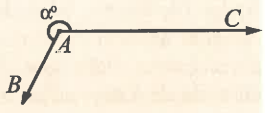
0 derecelik BAC açısı

Soru. 0° ile 360° ölçülerinin yazılımında bir fark var mıdır? Varsa neden yoksa neden?

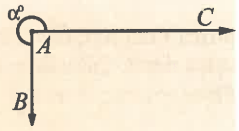
Geometride çok işimize yaramayacak ama trigonometride büyüklük kıyaslaması yaparken anlatım kolaylığı sağlaması açısından 180° den büyük ölçülü açılara da isimler vereceğiz.

Ölçüsü 180° ile 360° arasında olan açılara **üstün açılar** denir.

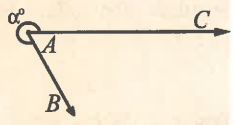
Üstün Dar Açı. Ölçüsü 180° ile 270° arasında olan açılara denir.
$180° < m(CAB) = \alpha < 270°$.



Üstün Dik Açı. Ölçüsü 270° olan açılara denir.
$m(CAB) = \alpha = 270°$.
Bazı kaynaklarda 3 dik açı manasında 3^D olarak da gösteriliyor.



Üstün Geniş Açı. Ölçüsü 270° ile 360° arasında olan açılara denir.
$270° < m(CAB) = \alpha < 360°$.

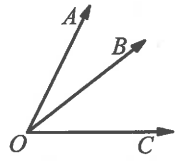


Tam Açı. Ölçüsü 360° olan açılara denir.
Bazı kaynaklarda 4 dik açı manasına gelen 4^D olarak da gösteriliyor.



Ölçülerine göre açı çeşitleri bununla birlikte son bulmuş oldu. Şimdi 1'den çok açının birbirleriyle olan ilişkilerini anlatıp yeni tanımlar vereceğiz. Başlıyoruz:

Komşu Açılar. Eğer iki açının birer kolu ortak ve iç bölgeleri ayrıksa, bu açılara **komşu açılar** denir. Şekildeki AOB açısı ile BOC açısının OB kolları ortak olduğundan AOB ile BOC açıları birbirlerine komşudur.

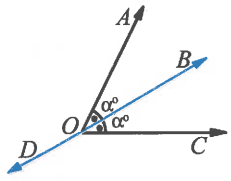


Yalnız, AOC ile BOC açılarının birer kolu ortak olmasına rağmen iç bölgelerinin kesişimi boşküme değil diye, bu açılara komşu diyemeyiz.

Komşu iki açı şekilden de görüldüğü üzere başka bir açıyı daha belirtirler. O açının ölçüsü birbirlerine komşu olan açıların ölçüleri toplanarak bulunur.

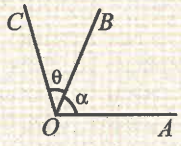
$$m(AOC) = m(AOB) + m(BOC).$$

Açıortay. AOB ve BOC komşu iki açı olsun. AOB ile BOC açılarının ölçüleri birbirlerine eşitse açıların ortak kolu olan OB'ye AOC (veya COA) açısının **açıortayı** denir.



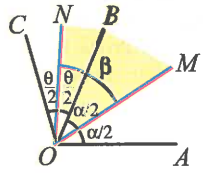
Açıortayın aynı zamanda AOD ve COD açılarının da ölçülerini eşit kıldığına dikkatini çekeriz. Bu yüzden ben açıortayın bir 'doğru' olduğunu söylerim ama farklı bir yerde 'ışın' olarak görmenizde mümkündür. Görevini düzgün yapsın da, gerisi sorun değil ☺

Soru Tipi. *AOB ve BOC komşu açılar*
$m(AOB) = \alpha$
$m(BOC) = \theta$
$\alpha < \theta$
olduğuna göre AOB ile BOC açılarının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?



A) $\frac{\theta+\alpha}{2}$ B) $\frac{\theta-\alpha}{2}$ C) $\theta-\alpha$ D) $\frac{\theta+\alpha}{4}$ E) $\theta+\alpha$

Çözümü: AOB açısının açıortayı $[OM$, BOC açısının açıortayı $[ON$ olsun.



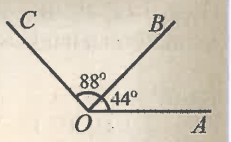
$$m(AOM) = m(MOB) = \frac{\alpha}{2}$$

$$m(BON) = m(NOC) = \frac{\theta}{2}$$

olacağını biliyoruz. Şu durumda $m(MON) = \beta = \frac{\alpha+\theta}{2}$ olarak bulunur.

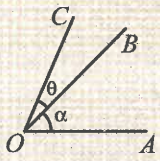
Doğru cevap: A.

1.
$m(AOB) = 44°$
$m(BOC) = 88°$
olduğuna göre *AOB* ile *BOC* açılarının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?



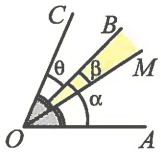
A) 44 B) 55 **C) 66** D) 77 E) 88

Soru Tipi. *AOB ve BOC komşu açılar*
$m(AOB) = \alpha$
$m(BOC) = \theta$
$\alpha < \theta$
olduğuna göre AOC açısının iç açıortayı ile [OB'nin belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?



A) $\frac{\theta+\alpha}{2}$ B) $\frac{\theta-\alpha}{2}$ C) $\frac{\alpha-\theta}{2}$ D) $\frac{\theta-\alpha}{4}$ E) $\theta-\alpha$

Çözümü: *AOC* açısının iç açıortayı [*OM* olsun. Şu durumda bize *BOM* açısının ölçüsü olan β sorulmaktadır. $m(AOC) = \alpha + \theta$ olduğundan

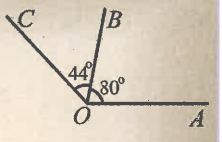


$$m(AOM) = m(MOC) = \frac{\alpha+\theta}{2}$$

olur. O halde β değeri $\theta - \frac{\alpha+\theta}{2}$ ile de bulunabilir, $\frac{\alpha+\theta}{2} - \alpha$ ile de. Hangisinden hesaplarsanız hesaplayın $\beta = \frac{\theta-\alpha}{2}$ bulunur.

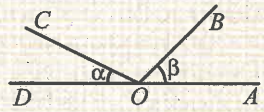
Doğru cevap: B.

2.
$m(COB) = 44°$
$m(BOA) = 80°$
olduğuna göre *COA* açısının açıortayının [OB ile belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?



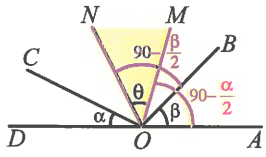
A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

Soru Tipi. *A, O, D doğrudaş*
$m(AOB) = \beta$
$m(COD) = \alpha$
olduğuna göre AOC ile BOD açılarının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{\beta+\alpha}{2}$ B) $\frac{\beta-\alpha}{2}$ C) $\frac{\alpha-\beta}{2}$ D) $\frac{\beta-\alpha}{4}$ E) $\beta-\alpha$

Çözümü: *AOC* açısının açıortayı [*OM*, *BOD* açısının açıortayı [*ON* olsun. *MON* açısının ölçüsüne de θ diyelim. Şu durumda aradığımız değer θ'dır.



$m(AOC) = 180° - \beta$ olduğundan

$$m(MOC) = 90° - \frac{\beta}{2}$$

ve $m(BOD) = 180° - \alpha$ olduğundan

$$m(NOD) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

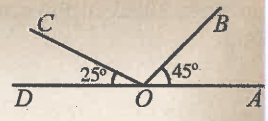
olacağını biliyoruz. Şimdi *MOD* açısının ölçüsünü iki farklı şekilde yazıp birbirlerine eşitleyeceğiz.

$$\theta + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} + \beta$$

eşitliği düzenlenirse $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

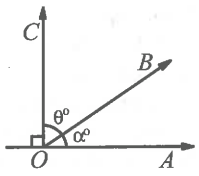
3.
A, O, D doğrudaş
$m(AOB) = 45°$
$m(COD) = 25°$



olduğuna göre *AOC* ile *BOD* açılarının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 25 B) 30 **C) 35** D) 40 E) 45

Tümler Açılar. Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya *tümler açılar* denir. $m(COB) + m(BOA) = \theta^\circ + \alpha^\circ = 90^\circ$ olduğundan COB ile BOA açıları birbirlerinin tümleridir.

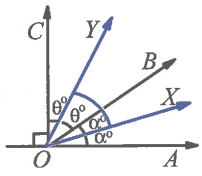


Üst şekilde iki tümler açının ortak bir kenarı olduğundan bu açılar **komşu tümler açılar** adını alırlar.

Örnek. *Komşu tümler iki açının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 40 B) 45 C) 50 D) 60 E) 90

Çözüm: Komşu tümler açılar şekildeki gibi 2α ölçülü AOB ve 2θ ölçülü BOC açıları olsun. $2\alpha + 2\theta = 90^\circ$ eşitliğini not edelim. Bu açıların açıortayları da sırasıyla OX ve OY olsun. Bu durumda açıortayların belirttiği açı XOY açısı olur ki bunun da ölçüsünün $\alpha + \theta$ olduğunu görmekteyiz. Not edilen eşitlikten $\alpha + \theta = 45^\circ$ bulunur.



Doğru cevap: B.

Örnek. *Tümler iki açının ölçüleri farkı 10° olduğuna göre küçük açının tümleri kaç derecedir?*

A) 40 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

Çözüm: Tümler açıların ölçülerine α° ve θ° diyelim. $\alpha + \theta = 90$ ve $\alpha - \theta = 10$ eşitliklerini birlikte çözmeliyiz. Taraf tarafa toplama yapılırsa $\alpha = 50$ ve $\theta = 40$ bulunur. Bu durumda küçük ölçülü açının tümleri $90 - 40 = 50$ derecedir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tümler iki açının ölçülerinin oranı 2,6 olduğuna göre küçük ölçülü açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 13 B) 18 C) 20 D) 25 E) 26

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.
Birinci yol. Tümler açıların ölçülerine α° ve θ° diyelim. $\alpha > \theta$ olsun. $\alpha + \theta = 90$ ve $\alpha = 2{,}6 \cdot \theta$ eşitliklerini birlikte çözmeliyiz. İkinci eşitliği birinci eşitlikte kullanırsak $3{,}6 \cdot \theta = 90$ buluruz ki bu da $\theta = 25$ anlamına gelir.
İkinci yol. $2{,}6 = 26/10 = 13/5$ olduğundan küçük ölçüye 5β dersek büyük ölçü 13β olur. Açılar tümler olduğundan $5\beta + 13\beta = 90^\circ$ eşitliğinden $\beta = 5^\circ$ çıktığından $5\beta = 25^\circ$ bulunur.

Doğru cevap: D.

4.
Ölçüsü 44° 45′ 46″ olan açının tümlerinin ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 44° 45′ 46″ B) 45° 46′ 47″ C) 45° 46′ 14″
D) 45° 15′ 14″ E) 45° 14′ 14″

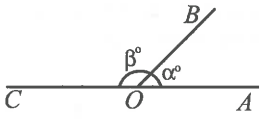
5.
Tümler iki açının tümlerlerinin ölçüleri toplamı kaç derecedir?

A) 90 B) 120 C) 135 D) 180 E) 270

6.
$$32^\circ < m(A) < 63^\circ$$
koşulunu sağlayan bir A açısının tümlerinin derece cinsinden alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 27 B) 28 C) 33 D) 57 E) 117

Bütünler Açılar. Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya *bütünler açılar* denir.



$$m(AOB) + m(BOC) = \alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$$

olduğundan AOB ile BOC açıları birbirlerinin bütünleridir.

Üst şekilde iki açının ortak bir kenarı olduğundan **komşu bütünler açılar** adını alırlar.

Örnek. *Bütünler iki açının ölçüleri farkı* 40° *ise küçük açının tümleri kaç derecedir?*

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Bütünler açıların ölçülerine α° ve θ° diyelim. $\alpha + \theta = 180$ ve $\alpha - \theta = 40$ eşitliklerini birlikte çözmeliyiz. Taraf tarafa toplama yapılırsa $\alpha = 110$ ve $\theta = 70$ bulunur. Bu durumda küçük ölçülü açının tümleri $90 - 70 = 20$ derecedir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bütünler iki açının bütünlerlerinin ölçüleri toplamı kaç derecedir?*

A) 90 B) 120 C) 135 D) 150 E) 180

Çözüm: Bütünler açıların ölçülerine α° ve θ° diyelim. $\alpha + \theta = 180$ olduğunu not edelim. Şu durumda bu açıların bütünlerleri $180^\circ - \alpha^\circ$ ve $180^\circ - \theta^\circ$ olacaktır. Bize bu açıların toplamı sorulduğundan hemen toplama yapalım.

$$180^\circ - \alpha^\circ + 180^\circ - \theta^\circ = 360^\circ - (\alpha^\circ + \theta^\circ) = 180^\circ.$$

EKY: Mustafa hocam, yorulduğun belli olmuş. ☺
Madem α ile θ birbirlerinin bütünleri, o halde α'nın bütünleri θ, θ'nın da bütünleri α olduğundan $\alpha + \theta = 180$.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bütünlerinin ölçüsü tümlerinin ölçüsünün* 4 *katı olan açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 22,5

Çözüm: Bahsi geçen açının ölçüsü α° olsun. Söylenene göre $180 - \alpha = 4 \cdot (90 - \alpha)$ imiş. Hemen çözelim:

$$180 - \alpha = 360 - 4\alpha$$
$$3\alpha = 180$$
$$\alpha = 60.$$

Doğru cevap: A.

7.
$180^\circ = 200$ grad
olduğuna göre 144° lik ölçüye sahip bir açının bütünlerinin ölçüsü kaç graddır?

A) 40 B) 80 C) 120 D) 160 E) 200

8.
Bir açı ölçüsünün yarısıyla çeyreği, birbirinin tümleridir.
Bu açının bütünlerinin ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

9.
Bütünler iki açıdan büyüğünün ölçüsünün üçte biri küçüğün ölçüsünün tümleridir.
Buna göre büyük açının ölçüsü, küçük açının ölçüsünden kaç derece fazladır?

A) 60 B) 70 C) 80 **D)** 90 E) 100

10.
Komşu bütünler iki açının açıortaylarının belirttiği açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 45 B) 60 **C)** 90 D) 120 E) 135

11.
Bütünlerinin ölçüsü tümlerinin ölçüsünün 3 katı olan açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 45 B) 60 C) 90 D) 120 E) 135

12.
Tümleriyle bütünlerinin ölçülerinin toplamı 150° olan açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 **E) 60**

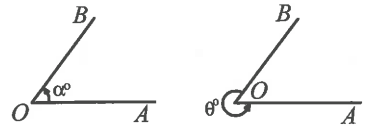
13.
A açısının ölçüsü α° olsun.

$$32 < \alpha < 63$$

Ölçüsü $2\alpha^\circ$ olan bir başka açının bütünlerinin derece cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 114 **B)** 115 C) 116 D) 125 E) 126

Tamlar Açılar. Ölçüleri toplamı 360° olan iki açıya *tamlar açılar* denir.



Üst şekilde

$$m(AOB) + m(BOA) = \alpha^\circ + \theta^\circ = 360^\circ$$

olduğundan BOA ile AOB açıları tamlardır.

Örnek. *Tamlar iki açının ölçüleri farkı* 140° *olduğuna göre küçük açının bütünleri kaç derecedir?*

A) 40 B) 50 C) 55 D) 60 E) 70

Çözüm: Tamlar açıların ölçülerine α° ve θ° diyelim.
$\alpha + \theta = 360$ ve $\alpha - \theta = 140$ eşitliklerini birlikte çözmeliyiz. Taraf tarafa toplama yapılırsa $\alpha = 250$ ve $\theta = 110$ bulunur. Bu durumda küçük ölçülü açının bütünleri $180 - 110 = 70$ derecedir.

Doğru cevap: E.

14.
Tamlar iki açının ölçülerinin oranı 2,6 olduğuna göre küçük ölçülü açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 52 B) 72 **C)** 100 D) 125 E) 126

15.

$$180^\circ = 200 \text{ grad}$$

olduğuna göre 50 gradlık bir açının tamlarının radyan cinsinden ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{8}\pi$ B) $\frac{3}{4}\pi$ C) $\frac{5}{8}\pi$ **D)** $\frac{7}{4}\pi$ E) $\frac{15}{16}\pi$

www.mustafayagci.com.tr, 2011

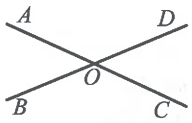
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Doğruda Açı

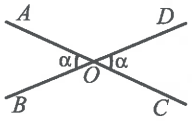
Tanımlayacağımız açılar daha bitmedi. Geriye kalan birkaç taneyi de vereceğiz artık her tür açı ölçüsüyle işlemler yapmaya başlayacağız. Bu arada sık kullanılan bazı çözüm tekniklerine de isimler vereceğiz. Çözümlerimizde kolaylık sağlasın diye bu isimleri kullanacağımızdan her birini hafızanızda tutmanızda fayda vardır.

Ters açılar. Birbirlerine paralel olmayan AC ve BD doğruları bir O noktasında kesişiyor olsunlar. Bu kesişim sonucu oluşan AOD ve COB ya da AOB ile DOC açılarına *ters açılar* denir.



Teorem. *Ters açıların ölçüleri eşittir.*

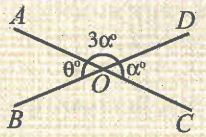
Kanıt: $m(AOB) + m(BOC) = 180^\circ$ ve $m(DOC) + m(BOC) = 180^\circ$ olduğundan $m(AOB) = m(DOC)$ olmak zorundadır.



AOD ve COB açıları eşit ölçülü olan bu açıların bütünlerleri olduklarından onlar da eşit ölçüye sahiptirler. Yani aynı zamanda $m(AOD) = m(COB)$ dir.

Ölçüleri birbirlerine eşit olan açılara ***eş açılar*** deniyordu. Dolayısıyla kısaca '*Ters açılar eştir*' diyebiliriz.

Örnek. $AC \cap BD = \{O\}$
$m(BOA) = \theta^\circ$
$m(AOD) = 3\alpha^\circ$
$m(DOC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre $2\alpha + \theta$ *kaçtır?*



A) 105 B) 120 C) 135 D) 150 E) 165

Çözüm: AOC bir doğru açı olduğundan ölçüsü 180° olmalıdır. $3\alpha + \alpha = 180$ eşitliğinden $\alpha = 45$ bulunur. Diğer yandan AOB ile COD açıları ters açılar olduklarından eş olmak zorundadırlar. O halde $\theta = \alpha = 45$ olduğundan

$$2\alpha + \theta = 90 + 45 = 135$$

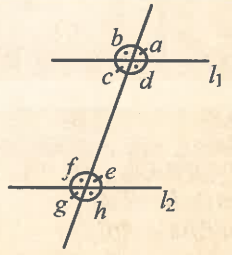
olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılar. l_1 ve l_2 doğrularının paralel olup; bir başka doğrunun bu iki doğruyu birden kestiğini düşünelim. Alttaki şekilden takip edebilirsiniz.

i. Yöndeş açılar *eştir.*
$a = e, b = f, c = g, d = h$

Bu eşitlikleri aksiyom olarak alıyoruz.



ii. İç ters açılar *eştir.*
$c = e, d = f$

Ters açıların eşliğinden $c = a$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan yöndeş açıların eşliği gereği $a = e$ olduğundan $c = e$ olur.

iii. Dış ters açılar *eştir.*
$a = g, b = h$

Yöndeş açıların eşliği gereği $a = e$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan ters açıların eşliği gereği $e = g$ dir. O halde $a = g$ olmalıdır.

iv. Karşı durumlu açılar *bütünlerdir.*
$c + f = d + e = 180^\circ$

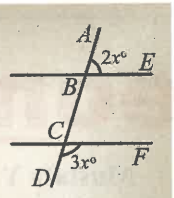
Ölçüsü a ve d olan açılar, doğru açı oluşturduklarından bütünlerdir. Yöndeş açıların eşliği gereği $a = e$ olduğundan $d + a = 180^\circ$ olduğu gibi $d + e = 180^\circ$ olur.

v. Yanal durumlu açılar *bütünlerdir.*
$a + h = b + g = 180^\circ$

Ölçüsü a ve d olan açılar, doğru açı oluşturduklarından bütünlerdir. Yöndeş açıların eşliği gereği $d = h$ olduğundan $d + h = 180^\circ$ olduğu gibi $a + h = 180^\circ$ olur.

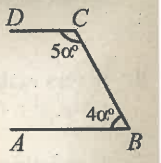
Biz derslerimizde iç ters açıların eşitliğine **'Z-Kuralı'**, karşı durumlu açıların bütünler olmasına da **'C-Kuralı'** veya **'U-Kuralı'** diyeceğiz.

1.
A, B, C, D doğrudaş
$BE \,//\, DF$
$m(ABE) = 2x^\circ$
$m(DCF) = 3x^\circ$
olduğuna göre x kaçtır?



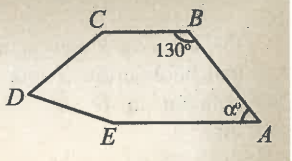
A) 9 B) 18 **C)** 36 D) 60 E) 72

2.
$DC \,//\, AB$
$m(DCB) = 5\alpha^\circ$
$m(CBA) = 4\alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



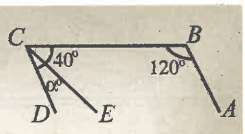
A) 20 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

3.
$BC \,//\, AE$
$m(CBA) = 130^\circ$
$m(BAE) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



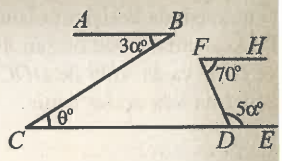
A) 20 B) 30 C) 40 **D)** 50 E) 60

4.
$AB \,//\, CD$
$m(ABC) = 120^\circ$
$m(BCE) = 40^\circ$
$m(ECD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



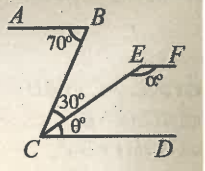
A) 10 **B)** 20 C) 30 D) 40 E) 50

5.
$AB \,//\, CE \,//\, FH$
$m(ABC) = 3\alpha^\circ$
$m(BCD) = \theta^\circ$
$m(EDF) = 5\alpha^\circ$
$m(DFH) = 70^\circ$
olduğuna göre θ kaçtır?



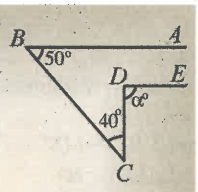
A) 52 B) 57 C) 58 D) 62 **E)** 66

6.
$AB \,//\, CD \,//\, EF$
$m(ABC) = 70^\circ$
$m(BCE) = 30^\circ$
$m(DCE) = \theta^\circ$
$m(CEF) = \alpha^\circ$
olduğuna göre $\alpha - \theta$ farkı kaçtır?



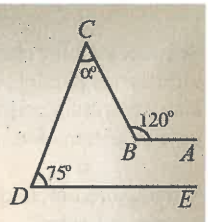
A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

7.
$BA \parallel DE$
$m(ABC) = 50^\circ$
$m(BCD) = 40^\circ$
$m(CDE) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



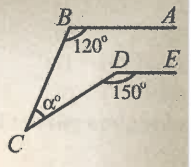
A) 60 B) 70 C) 80 **D)** 90 E) 100

8.
$BA \parallel DE$
$m(ABC) = 120^\circ$
$m(CDE) = 75^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



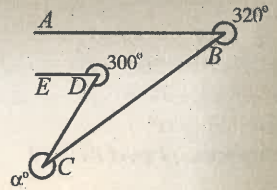
A) 15 B) 20 C) 30 D) 40 **E)** 45

9.
$BA \parallel DE$
$m(ABC) = 120^\circ$
$m(CDE) = 150^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



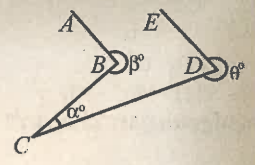
A) 20 **B)** 30 C) 40 D) 50 E) 60

10.
$AB \parallel ED$
$m(CBA) = 320^\circ$
$m(CDE) = 300^\circ$
$m(DCB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



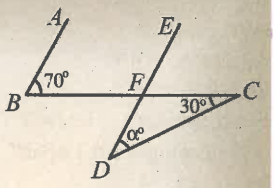
A) 300 B) 310 C) 320 D) 330 **E)** 340

11.
$BA \parallel DE$
$m(CDE) = \theta^\circ$
$m(CBA) = \beta^\circ$
$m(DCB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α, θ, β arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?



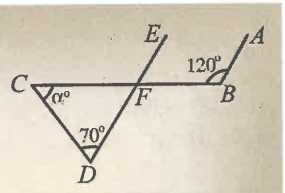
A) $\alpha + \theta + \beta = 180$ **B)** $\alpha + \beta = \theta$ C) $\beta - \alpha = \theta$
D) $\alpha + \beta - \theta = 180$ E) $\beta = 180 - \alpha$

12.
$AB \parallel DE$
$m(CBA) = 70^\circ$
$m(BCD) = 30^\circ$
$m(CDE) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



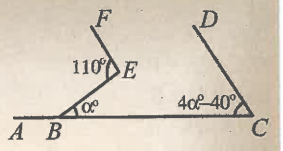
A) 50 **B)** 40 C) 30 D) 20 E) 10

13.
$DE \,//\, BA$
$m(ABC) = 120^\circ$
$m(EDC) = 70^\circ$
$m(DCB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



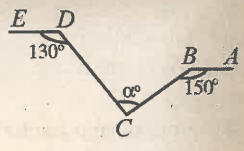
A) 30 B) 40 **C)** 50 D) 60 E) 70

14.
$EF \,//\, CD$
$m(FEB) = 110^\circ$
$m(CBE) = \alpha^\circ$
$m(DCA) = 4\alpha^\circ - 40^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



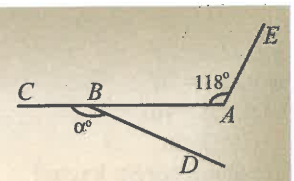
A) 10 B) 20 **C)** 30 D) 40 E) 50

15.
$ED \,//\, BA$
$m(EDC) = 130^\circ$
$m(CBA) = 150^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 70 B) 80 C) 90 **D)** 100 E) 110

16.
A, B, C, D, E
noktaları düzlemseldir.
$EA \perp BD$
$m(EAC) = 118^\circ$
$m(CBD) = \alpha^\circ$



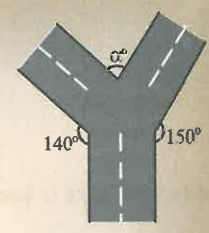
Yukarıdaki verilere göre α kaçtır?

A) 152 B) 150 C) 148 D) 146 E) 144

1994 ÖYS

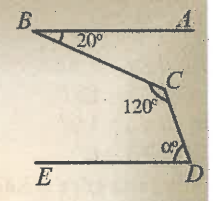
17.
Şekilde, karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olan karayollarının kesiştiği bir kavşak görülmektedir.

Verilen ölçüler şekildeki gibiyse α kaçtır?



A) 60 **B)** 70 C) 75 D) 80 E) 90

18.
$BA \,//\, ED$
$m(CBA) = 20^\circ$
$m(BCD) = 120^\circ$
$m(CDE) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?

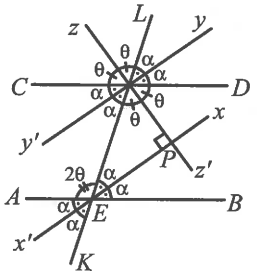


A) 60 B) 70 C) 75 **D)** 80 E) 90

Teorem. *AB ve CD paralel doğruları bir KL keseni ile kesiliyor. Meydana gelen sekiz açıdan;*

I. *Yöndeş iki açının açıortayları paraleldir.*
II. *İçters iki açının açıortayları paraleldir.*
III. *Dışters iki açının açıortayları paraleldir.*
IV. *Karşı durumlu iki açının açıortayları diktir.*
V. *Yanal durumlu iki açının açıortayları diktir.*

Kanıt: *KL* ile *CD* doğrularının arakesiti *F* olsun. Ters iki açının açıortayları aynı bir doğru olacağından *Ex* ile *Ex'*, *Fy* ile *Fy'* ve *Fz* ile *Fz'* birbirinin uzantısı olurlar. Birbirine eşit olan *LEB* ve *LFD* yöndeş açılarının yarımları da eşit olacağından $m(LEx) = m(LFy)$ olur.

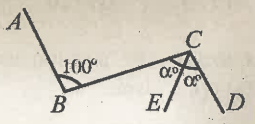


Halbuki bu iki açı, yöndeş durumlu iki açı olduğundan Öklit postülatının karşıtı gereğince kenarlarının paralel olması gerekir. Yani; *Ex* // *Fy* olur. Yukarıda verdiğimiz *xEx'* // *yFy'* yani *xx'* // *yy'* yazılabilir.

Böylece problemin I, II, III nolu şıkları çözülmüş olur. Şimdi IV ve V nolu şıkları çözelim:

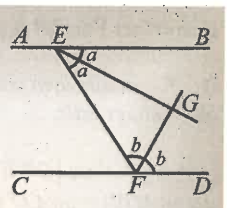
Komşu bütünler olan *DFL* ve *LFC* açılarının açıortayları birbirine dik olacağından *Fz* ⊥ *Fy* yani *zz'* ⊥ *yy'* olacağı anlaşılır. Halbuki *yy'* // *xx'* olduğundan *zz'* ⊥ *xx'* olur. Demek ki karşı durumlu olan *BEF* ve *DFE* açılarının açıortayları dik, yanal durumlu *BEL* ve *CFL* açılarının açıortayları da diktir.

19.
AB // *CD*
$m(BCE) = m(ECD) = \alpha^o$
$m(CBA) = 100^o$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 40 **C) 50** D) 60 E) 100

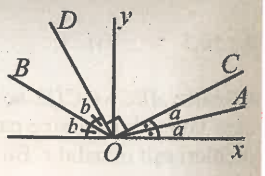
20.
$m(FEG) = a$
$m(GEB) = a$
$m(EFG) = b$
$m(GFD) = b$
Yandaki şekilde *AB* // *CD* olduğuna göre *m(FGE)* kaçtır?



A) $\frac{a+b}{2}$ B) $2(a+b)$ C) 45° D) 60° E) 90°

1988 ÖSS

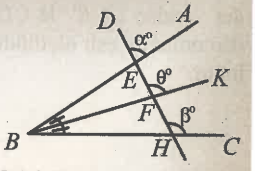
21.
Verilen şekilde *OX* ⊥ *OY* ve *OD* ⊥ *OC* doğruları ile eşit açılar işaretlenerek belirtilmiştir.
***AOB* açısının ölçüsü kaç derecedir?**



A) 120 B) 125 **C) 135** D) 145 E) 150

1979 ÜSS

22.
BF açıortay
$m(AED) = \alpha^o$
$m(KFE) = \theta^o$
$m(CHF) = \beta^o$

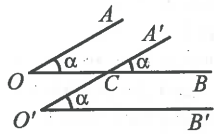


olduğuna göre α, θ, β arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\alpha = \theta + \beta$ B) $2\beta = \alpha + \theta$ C) $2\theta = \alpha + \beta$
D) $\alpha + \beta = \theta$ E) $\beta - \theta = \alpha$

Kenarları Paralel Açılar.

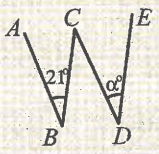
i) *Kenarları aynı yönde paralel olan iki açı eştir.*



$[OA \,//\, [O'A'$ ve $[OB \,//\, [O'B'$ ise $m(AOB) = m(A'O'B')$.

Sebebi oldukça basit. $[OB$ ile $[O'A'$ ışınlarının kesim noktasına C diyelim. AOB ile $A'CB$ açıları yöndeş olduğundan $m(AOB) = \alpha$ ise $m(A'CB) = \alpha$ olur. $A'CB$ ile $A'O'B'$ açıları da yöndeş olduğundan $m(A'O'B') = \alpha$ olmalıdır.

Örnek. $BA \,//\, CD$
$BC \,//\, DE$
$m(CBA) = 21^\circ$
$m(EDC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α *kaçtır?*

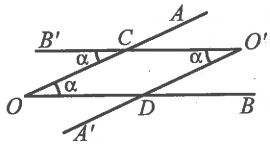


A) 10,5 B) 21 C) 31 D) 42 E) 51

Çözüm: ABC ve CDE açılarına dikkat edilirse kollarının aynı yönde birbirlerine paralel oldukları görülür. O halde ölçüleri eşit olmalıdır. Bu durumda $\alpha = 21$ olur.

Doğru cevap: B.

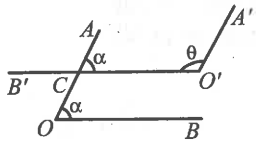
ii) *Kenarları zıt yönde paralel olan iki açı eştir.*



$[OA \,//\, [O'A'$ ve $[OB \,//\, [O'B'$ ise $m(AOB) = m(A'O'B')$.

Hemen sebebini açıklayalım: $[OA$ ile $[O'B'$ ışınlarının kesim noktasına C diyelim. $A'O'B'$ ile OCB' açıları yöndeş olduğundan $m(A'O'B') = \alpha$ ise $m(OCB') = \alpha$ olur. Diğer yandan OCB' ile COD açıları iç-ters açılar olduğundan onlar da eşit ölçülüdür. Bu durumda $m(COD) = \alpha$ bulunur.

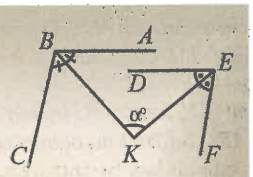
iii) *Birer kenarları aynı yönde, diğer kenarları zıt yönde paralel olan iki açı birbirinin bütünleridir.*



$[OA \,//\, [O'A'$ ve $[OB \,//\, [O'B'$ ise $m(AOB) + m(A'O'B') = 180^\circ$.

Bunun sebebi de çok basit. $[OA'$ ile $[O'B'$ ışınlarının kesim noktası C olsun. $m(AOB) = \alpha$ dersek $m(ACO') = \alpha$ olur. $[CA' \,//\, [O'A'$ diye C-Kuralı gereği $\alpha + \theta = 180^\circ$ olmalıdır.

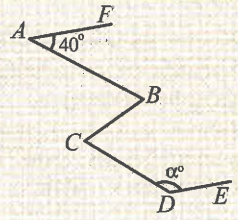
23.
$[BA \,//\, [ED$
$[BC \,//\, [EF$
ABC **ve** ***DEF*** **açılarının açıortayları** ***K*** **noktasında kesiştiklerine göre** $m(BKE) = \alpha$ **kaç derecedir?**



A) 60 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

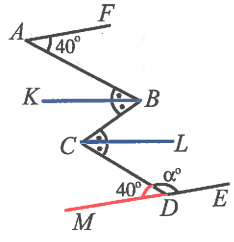
Örnek. $[AF \,//\, [DE$
$m(BAF) = 40^\circ$
$m(CDE) = \alpha^\circ$

ABC ile BCD açılarının açıortayları birbirlerine paralel olduklarına göre α *kaçtır?*



A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

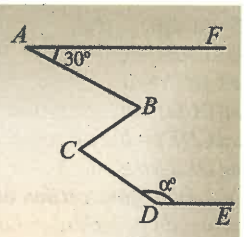
Çözüm: ABC açısının açıortayı $[BK$, BCD açısının açıortayı $[CL$ olsun.



$BK \,//\, CL$ olması KBC ile BCL açılarının dolayısıyla ABC ile BCD açılarının eşit ölçülü olmaları anlamına gelir. Demek ki $AB \,//\, CD$ imiş. Şimdi FAB ile CDE açılarına dikkat edilirse birer kolları aynı yönde diğer kolları da zıt yönde birbirlerine paralel olduğundan bu açılar birbirlerinin bütünleridir. O halde $m(CDE) = \alpha = 140^\circ$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

24.
$[AF] \,//\, [DE]$
$m(BAF) = 30°$
$m(CDE) = \alpha$
***ABC* ile *DCB* açılarının açıortayları birbirlerine paralel olduklarına göre α kaç derecedir?**

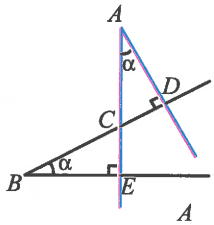


A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

Kenarları Dik Açılar.

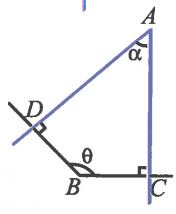
i) *Kolları birbirini dik kesen dar açılar eştir.*

Yani yandaki şekil için,
$m(CAD) = m(CBE) = \alpha$.

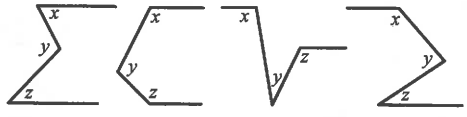


ii) *Kolları birbirini dik kesen açılardan biri dar diğeri geniş ise açılar bütünlerdir.*

Yani yandaki şekil için,
$m(CAD) + m(CBD) = \alpha + \theta = 180°$.



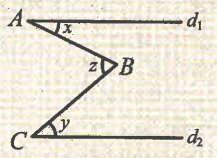
Doğruda Açılar Konusunda Bilinmesi Gerekenler. Aşağıda kanıtlarıyla birlikte verdiğimiz teoremler doğruda açılar ile ilgili problemleri çözmede bilinmesi gereken temel teoremlerdir.



Üstteki şekillerin herbirinde x, y, z değerlerinden herhangi ikisi verilerek üçüncüsü sorulur.

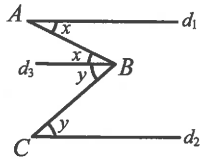
Bu soruların hepsini, birbirlerine paralel olarak verilmiş doğrulara paralel olup diğer iki doğrunun kesiştiği noktadan geçen bir doğru çizerek çözebilirsiniz. Aşağıdaki örneklere bakınız.

Soru tipi. $d_1 \,//\, d_2$
$m(d_1AB) = x$
$m(ABC) = z$
$m(BCd_2) = y$
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = x + z$ B) $x = y + z$ C) $z = x + y$
D) $x + y + z = 180°$ E) $x + y + z = 360°$

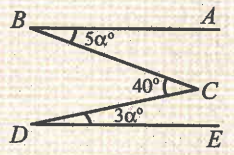
Çözümü: B köşesinden d_1 ve d_2 doğrularına paralel geçen bir d_3 doğrusu çizin.



d_1AB ve d_3BA açıları iç ters açılar olduğundan ölçüleri eşittir. Diğer yandan d_2CB ile d_3BC açıları da iç ters açı gereği eşit ölçülüdür. Uzun lafın kısası, sağ tarafta kalan açıların ölçüleri toplamı sol tarafta kalan açının ölçüsüne eşittir. Yani; $d_1 \,//\, d_2$ *ise* $x + y = z$.

Biz buna '**M-Kuralı**' diyeceğiz.

Örnek. $[AB] \,//\, [DE]$
$m(ABC) = 5\alpha°$
$m(CDE) = 3\alpha°$
$m(BCD) = 40°$
olduğuna göre α kaçtır?

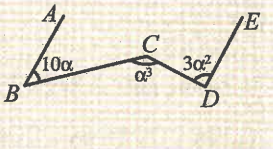


A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm: M kuralına göre $5\alpha + 3\alpha = 40$ olmalıdır.
Bu da $\alpha = 5$ olduğu anlamına gelir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $[BA] \,//\, [DE]$
$m(ABC) = (10\alpha)°$
$m(CDE) = (3\alpha^2)°$
$m(BCD) = (\alpha^3)°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

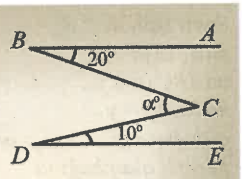
Çözüm: M kuralına göre $\alpha^3 = 3\alpha^2 + 10\alpha$ olmalıdır. α pozitif olduğundan eşitliğin her iki yanını α'ya bölebiliriz.

$$\alpha^2 = 3\alpha + 10$$
$$\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$$
$$(\alpha - 5)(\alpha + 2) = 0$$

eşitliğinden α, –2 olamayacağına göre $\alpha = 5$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

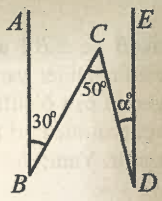
25.
$AB \parallel DE$
$m(ABC) = 20^\circ$
$m(CDE) = 10^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

26.
Yandaki şekilde
$BA \parallel DE$
$m(ABC) = 30^\circ$
$m(BCD) = 50^\circ$

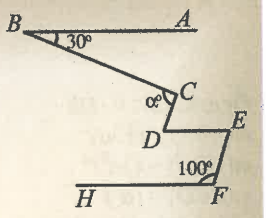
olduğuna göre $m(CDE)$ kaçtır?



A) 10 **B) 20** C) 30 D) 40 E) 50

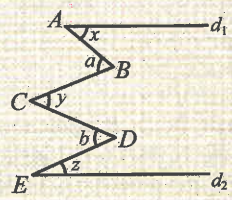
1980 ÜSS

27.
$BA \parallel DE \parallel HF$
$CD \parallel EF$
$m(ABC) = 30^\circ$
$m(EFH) = 100^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 110 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

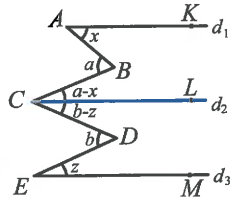
Soru tipi. $d_1 \parallel d_2$
$m(d_1AB) = x$
$m(ABC) = a$
$m(BCD) = y$
$m(CDE) = b$
$m(DEd_2) = z$
olduğuna göre verilen ölçüler arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x + a + b = y + z$ B) $xyz = ab$
C) $x + y + z = a + b$ D) $xyz = a + b$
E) $x + a + b + z = y$

Çözüm yolu: Zikzakların köşeleri olan B, C, D noktalarından d_1 ve d_2 doğrularına paraleller çizilerek iç ters açıların eşliklerini kullanarak soru çözülebilir. Sonuçta bir önceki soru tipine benzer şekilde, sağ tarafta kalan açıların ölçüleri toplamı, sol tarafta kalan açıların ölçüleri toplamına eşit çıkacaktır. Biz tek paralel çizerek sonuca gideceğiz:

C noktasından geçen d_1 ile d_2 doğrularına paralel olan bir d_3 doğrusu çizelim.

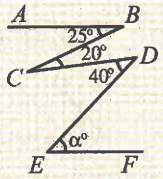


Dikkat ederseniz böylelikle şeklimizde iki farklı M-kuralı oluştu.

$m(BCL) = a - x$ ve $m(DCL) = b - z$ olduğundan
$m(BCD) = y = a - x + b - z$
olur. Gerekli işlemler yapılırsa
$x + y + z = a + b$
eşitliğine ulaşılır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $[BA \parallel [EF$
$m(ABC) = 25^\circ$
$m(DCB) = 20^\circ$
$m(CDE) = 40^\circ$
$m(FED) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?

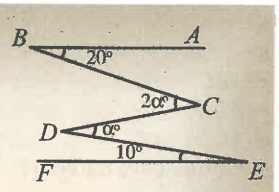


A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 45

Çözüm: Biraz önce anlattığımız zikzak kuralına göre
$25 + 40 = 20 + \alpha$
olmalıdır. Denklem çözülürse $\alpha = 45$ bulunur.

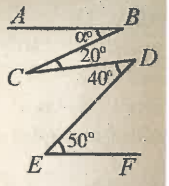
Doğru cevap: E.

28.
BA // EF
$m(ABC) = 20°$
$m(BCD) = 2\alpha°$
$m(CDE) = \alpha°$
$m(DEF) = 10°$
olduğuna göre
$m(BCD)$ kaç derecedir?



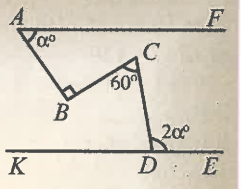
A) 10 **B) 20** C) 30 D) 40 E) 50

29.
AB // EF
$m(FED) = 50°$
$m(CDE) = 40°$
$m(DCB) = 20°$
$m(ABC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



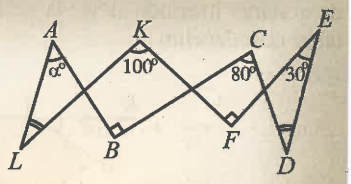
A) 10 B) 20 **C) 30** D) 40 E) 50

30.
AF // DE
AB ⊥ BC
$m(FAB) = \alpha°$
$m(BCD) = 60°$
$m(CDE) = 2\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



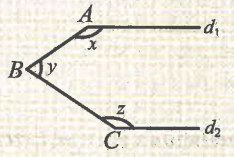
A) 20 B) 30 C) 40 **D) 50** E) 55

31.
AL // ED
AB ⊥ BC
KF ⊥ FE
$m(L) = m(D)$
$m(K) = 100°$
$m(C) = 80°$
$m(E) = 30°$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 40 **C) 50** D) 60 E) 70

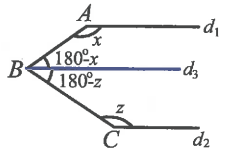
Soru tipi. $d_1 // d_2$
$m(d_1AB) = x$
$m(ABC) = y$
$m(BCd_2) = z$
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = x + z$ B) $x = y + z$ C) $z = x + y$
D) $x + y + z = 180°$ E) $x + y + z = 360°$

Çözümü: Öğrendiklerimiz çoğaldıkça bir soruyu 1'den fazla yolla çözme olanağımız artıyor. Bu soruyu da daha önce öğrendiğimiz iki farklı yolla çözeceğiz.

Birinci yol. B köşesinden d_1 ve d_2 doğrularına paralel geçen bir d_3 doğrusu çizelim. Bu sayede iki adet C-Kuralı uygulanacak şekil oluştuğuna dikkat ediniz.



$d_1 // d_2$ olduğundan

$$m(ABd3) = 180° - x$$

ve

$$m(CBd3) = 180° - z$$

olur. $m(ABC) = y$ olduğundan

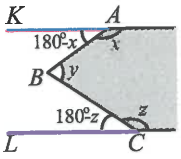
$$y = 180° - x + 180° - z$$

eşitliğine ulaşırız ki düzenlenirse

$$x + y + z = 360°.$$

elde edilir.

İkinci yol. d_1 ve d_2 doğrularını sırasıyla A ve C yönlerinde uzatarak üzerinde sırasıyla şekildeki gibi K ve L noktaları işaretleyelim.



$m(KAB) = 180° - x$ ve $m(LCB) = 180° - z$ olur. $KABCL$ şekline bakarsanız M-kuralı gereği

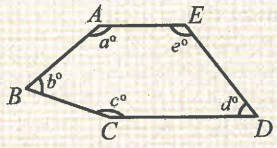
$$180° - x + 180° - z = y$$

olduğundan $x + y + z = 360°$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Biz buna bundan sonra **Kalemucu Kuralı** diyeceğiz.

Örnek. $BC \,//\, AE$
$m(EAB) = a°$
$m(ABC) = b°$
$m(BCD) = c°$
$m(CDE) = d°$
$m(DEA) = e°$
olduğuna göre $a + b + c + d + e$ *toplamı kaçtır?*

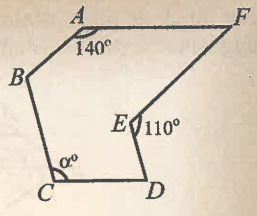


A) 270 B) 360 C) 450 D) 540 E) 720

Çözüm: C kuralına göre $a + b = 180$, kalemucu kuralına göre de $c + d + e = 360$ olduğundan, soruda sorulan toplam $180 + 360 = 540$ olmalıdır.

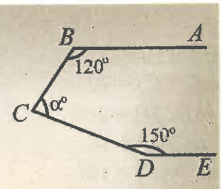
Doğru cevap: D.

32.
$AB \,//\, FE$
$BC \,//\, ED$
$CD \,//\, AF$
$m(DEF) = 110°$
$m(FAB) = 140°$
$m(BCD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



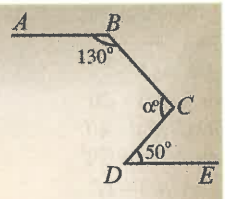
A) 100 **B) 110** C) 120 D) 130 E) 140

33.
$BA \,//\, DE$
$m(ABC) = 120°$
$m(CDE) = 150°$
$m(BCD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



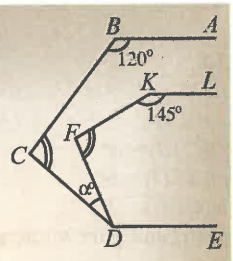
A) 50 B) 60 C) 80 **D) 90** E) 100

34.
$AB \,//\, DE$
$m(ABC) = 130°$
$m(EDC) = 50°$
$m(BCD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



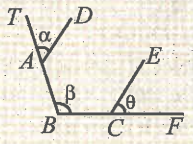
A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

35.
$BA \,//\, KL \,//\, DE$
$m(BCD) = m(KFD)$
$m(ABC) = 120°$
$m(LKF) = 145°$
$m(CDF) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 20 **B) 25** C) 30 D) 35 E) 40

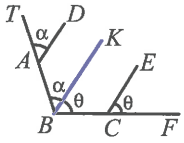
Soru tipi. *[AD // [CE*
m(TAD) = α
m(TBF) = β
m(ECF) = θ
olduğuna göre α, θ, β arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha = \beta + \theta$ B) $\theta = \alpha + \beta$ C) $\beta = \alpha + \theta$
D) $\alpha + \theta + \beta = 180$ E) $\alpha + \theta + \beta = 360$

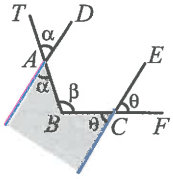
Çözümü: Yine iki farklı çözüm sunacağız.

Birinci yol. *B* köşesinden *AD*'ye paralel bir doğru çizerek üzerinde bir *K* noktası alalım.



Yöndeş açıların eşliği gereği $m(TBK) = \alpha$ ve yine aynı sebepten $m(FBK) = \theta$ bulunur, öyleyse $\beta = \alpha + \theta$ olduğu kanıtlanmış olur.

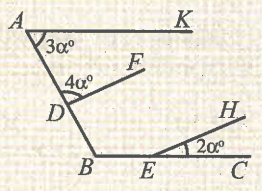
İkinci yol. Soruda birbirlerine paralel olarak verilen *AD* ve *CE* ışınlarını sırasıyla *A* ve *C* yönlerinde uzatalım.



Şekilde taranmış bölgede M-Kuralı uygulanabileceğini görmüş olmalısınız. Solda kalan açıların ölçüleri toplamıyla sağda kalan açıların ölçüleri toplamının birbirlerine eşit olması gerektiğinden $\beta = \alpha + \theta$ elde edilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *[AK // [BC*
[DF // [EH
m(KAD) = 3α°
m(ADF) = 4α°
m(HEC) = 2α°
olduğuna göre α kaçtır?

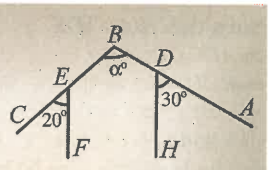


A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm: $m(ADF) = 4\alpha^\circ$ ve $m(HEC) = 2\alpha^\circ$ olduğundan üstte kanıtladığımız teorem gereği $m(DBE) = 6\alpha^\circ$ olur. Diğer yandan C kuralına göre $3\alpha^\circ + 6\alpha^\circ = 180^\circ$ olmalıdır. Buradan $\alpha = 20$ olarak bulunur.

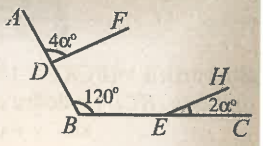
Doğru cevap: D.

36.
EF // DH
m(ADH) = 30°
m(FEC) = 20°
m(ABC) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 40 C) 50 D) 80 E) 130

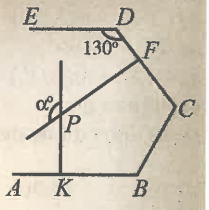
37.
DF // EH
m(ABC) = 120°
m(ADF) = 4α°
m(HEC) = 2α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 10 **B) 20** C) 30 D) 40 E) 60

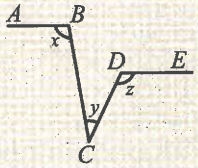
38.
[BA // [DE
m(CDE) = 130°

***AB* ve *CD*'den çıkılan dikmelerin belirttiği geniş açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?**



A) 110° B) 120° **C) 130°** D) 140° E) 150°

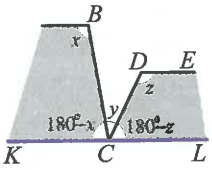
Soru tipi. *[BA // [DE*
m(ABC) = x
m(BCD) = y
m(CDE) = z
olduğuna göre x, y, z
arasında geçerli olan bağıntı
aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = x + z$ B) $x = y + z$ C) $z = x + y$
D) $x + y = z + 180°$ E) $x + z = y + 180°$

Çözümü: Yine iki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. *AB*'ye paralel ve *C*'den geçen *KL* doğrusunu çizelim. İki farklı C-Kuralı uygulanabilecek şekil oluştuğuna dikkat ediniz.



Bu yüzden $m(BCK) = 180° - x$ ve $m(DCL) = 180° - z$ olacaktır. *KCL* bir doğru açı olduğundan

$$180 - x + y + 180 - z = 180$$

olması gerekir ki buradan $x + z = y + 180$ olduğu bulunur.

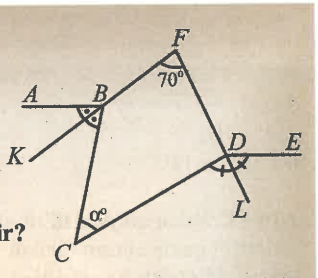
İkinci yol. Bu sefer Z-Kuralı'nı kullanarak soruyu çözeceğiz. Aynı şekli kullanabiliriz. A-B-C-L noktalarının belirttiği Z'den $x = y + 180 - z$ eşitliği düzenlenirse

$$x + z = y + 180$$

eşitliğine erişilir. E-D-C-K harflerinin belirttiği ters Z'den de aynı eşitliğe aynı hızla erişebilirsiniz.

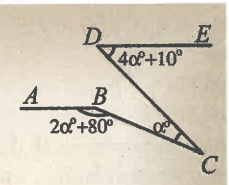
Doğru cevap: E.

39.
[BA // [DE
m(ABK) = m(KBC)
m(CDL) = m(LDE)
m(KFL) = 70°
m(CBK) + m(CDL) = 110°
olduğuna göre
m(BCD) = α kaç derecedir?



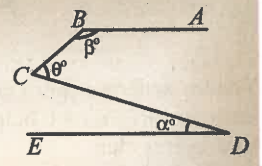
A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 55

40.
DE // AB
m(CDE) = 4α° + 10°
m(ABC) = 2α° + 80°
m(DCB) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 22 B) 20 C) 18 D) 16 E) 15

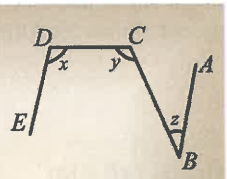
41.
BA // ED
m(CBA) = β°
m(DCB) = θ°
m(CDE) = α°



olduğuna göre α, θ, β arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

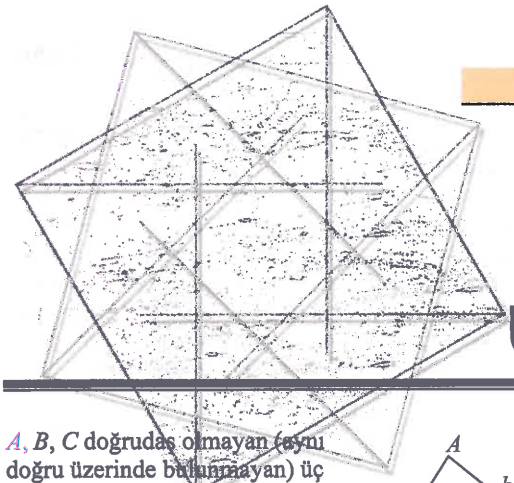
A) $\alpha + \theta + \beta = 180$ B) $\theta + \beta - \alpha = 180$
C) $\alpha - \theta + \beta = 180$ D) $\alpha + \theta - \beta = 180$
E) $\alpha + \theta + \beta = 360$

42.
BA // DE
m(EDC) = x°
m(DCB) = y°
m(CBA) = z°



olduğuna göre aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu daima 180'dir?

A) $x + z$ B) $y + z$ C) $x + y - z$
D) $x + z - y$ E) $x + y - 2z$

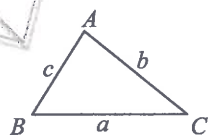


Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üçgen

A, B, C doğrudaş olmayan (aynı doğru üzerinde bulunmayan) üç nokta ise $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ doğru parçalarının birleşimine ***ABC* üçgeni** denir.



$\overset{\Delta}{ABC}$ veya ΔABC ile gösterilir.

Biz bu notlarda kısaca ABC yazacağız, siz de anlayacaksınız. Anlaştık!

Üçgenin tanımının matematik dilindeki ifadesi de şudur:

$$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$$

Üçgenin tanımında ne yazık ki meslektaşlarımızın büyük bir bölümü hata yapmakta. Tıpkı benim de mesleğimin ilk yıllarında yaptığım gibi…

Büyük Üstat Tahsin Çizenel'in 1959 yılında kaleme aldığı 'Çözümlü Düzlem Geometri Problemleri' isimli dev yapıtının sonsözünde yazmış olduklarını burada yinelemek istiyorum. Kulağımıza küpe olsun!

"… Okumuş bir kimseyle okumamışı birbirinden ayıran geniş düşünce, ileri görüşe sahip olma ve sağlam muhakeme edebilme nitelikleri, lüzumsuz zannettiğiniz dersler sayesinde kazanılır. Bu dersler, okuyanlar için bir çeşit zihin talimidir. Matematik öğretimi ise, bu nitelikleri en iyi geliştiren bir vasıta olarak yüzyıllar boyunca bütün insanlık tarafından çok önemli tutulmuştur.

Bu öğretimin bir amacı da, insanı gelişigüzel konuşma alışkanlığından kurtarmak, kelimeleri tam ve yerinde kullanma yeteneğini kazandırmaktır. Örnek olarak, "Üçgeni tanımla' dediğimiz bir öğrenci 'üç noktanın birleştirilmesinden meydana gelen şekil üçgendir" derse; öğretmen hemen buna itiraz eder: 'Üç nokta bir doğru üzerinde olamaz mı? Bu üç nokta ne çeşit çizgilerle birleştirilecek? Bu ihtimalleri hesaba katmadan konuştun. Sonra; matematiksel tanımlar 'denir' veya 'adı verilir' kelimeleri ile biterler; sen ise, '…dir' takısı ile bitirdin, '…dir, olur' gibi takı ve kelimeler ispatlanacak hükümlerin sonuna gelirler.

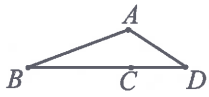
İşte böylece matematik derslerinde bütün tanım ve ispatlarda her ihtimali hesaplayarak ve yerinde kelimeler kullanarak açık vermemeye gayret ede ede pratik hayatta da aynı niteliklere sahip bir kimse olursunuz. Eğer matematik derslerinden tam nasibinizi alabilirseniz rastgele konuşma alışkanlığınızdan kurtulursunuz. Bu sayede örnek olarak; bir konu üzerinde tartışılırken o konu hakkında bir fikriniz yoksa susmayı, varsa itiraza meydan vermeyecek şekilde konuşmayı öğrenirsiniz. Okulu bitirip pratik hayata atılınca elbette okuduğunuz derslerin konularını unutacaksınız fakat sizde adına kültür dediğimiz öyle bir iz, öyle bir hazine kalır ki bu sayede okumamışa nazaran para ile elde edilemeyecek bir üstünlüğe sahip olursunuz…".

Satırda değil de hatırda kalması dileğiyle…

Aslında belki yeri değil ama bu zihin talimine devam niteliğinde olsun diye dörtgen, beşgen ve genel olarak çokgen tanımlarını da burada vereyim istiyorum.

Önce ne olduğunu tahmin ettiğinizi düşündüğüm "dörtgen"in tanımıyla başlayalım. Üçgen tanımında kullandığımız A, B, C harflerine D harfini de eklesek yeter mi acaba? Yani "A, B, C, D doğrudaş olmayan dört nokta ise $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ doğru parçalarının birleşimine $ABCD$ dörtgeni denir." desek hayal ettiğimiz şeyi anlatmış olur muyuz?

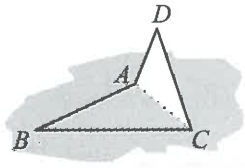
Şimdi size gerçekten doğrudaş olmayan A, B, C, D noktalarıyla bir dörtgen çiziyorum.



Yukardaki çizim size nerede hata yaptığımızı anlatmış olmalı. Çünkü yukardaki şekil bir dörtgen değil, düpedüz üçgendir. Sorun B, C, D noktalarının doğrudaş olmasından kaynaklanmaktadır. (A, B, C), (A, B, D) veya (A, C, D) noktaları kendi aralarında doğrudaş olsalardı da aynı sorunla yüz yüze olacaktık. O halde hatamızı şöyle gidermeliyiz:

Tanım. A, B, C, D herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta ise $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ doğru parçalarının birleşimine ***ABCD* dörtgeni** denir.

Peki sizce şu an oldu mu? Bakalım: Tanıma göre ben A, B, C noktalarını aynı düzlemde alıp D noktasını bu düzlemin dışında alabilirim. Yani aşağıdaki de bir dörtgen midir?



Evet dörtgendir ama şu an düzlem geometrisiyle uğraştığımızdan yani geometrik nesnelerin aynı düzleme ait olmalarını istediğimizden tanıma ''düzlemdeş'' kelimesini de ekleyebiliriz. Yok eğer böyle bir derdimiz yoksa yani her türden dörtgeni masaya yatırmak istiyorsak yukardaki tanım bizi amacımıza ulaştıracaktır.

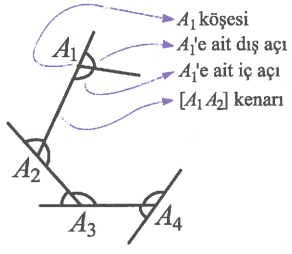
Benzer şekilde her türlü beşgeni ''A, B, C, D, E herhangi üçü doğrudaş olmayan beş nokta ise $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ ve $[EA]$ doğru parçalarının birleşimine ***ABCDE* beşgeni** denir.'' şeklinde tanımlayabiliriz.

Böylelikle altıgen, yedigen, sekizgen de tanımlanabilir. Bunların hepsine birden geometride **çokgen** denir. Eğer çokgende ilk alınan nokta sayısı n ise özel olarak ***n*-gen** dendiği de olur. n-geni tanımlarken A, B, C, D, E, ... harflerini kullanmak sıkıntı doğurur. Çünkü n'ninci harfi nasıl bulacağız? Bunun yerine noktaları A_1, A_2, A_3, ... , A_n olarak tanımlamak kaçınılmaz sonuç olacaktır. Herhangi bir n-geni de tanımlayıp 3-gen dersimize geri dönelim:

***n*-genin tanımı.** A_1, A_2, A_3, ... , A_n herhangi üçü doğrudaş olmayan n farklı nokta olsun. $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ... , $[A_{n-1}A_n]$ ve $[A_nA_1]$ doğru parçalarının birleşimine $A_1A_2A_3...A_n$ ***n*-geni** denir.

Hazır n kenarlı çokgeni tanımlamışken n-gene ait ama üçgende de kullanacağımız bazı tanımlar vereceğiz.

$A_1A_2A_3...A_n$ n-genini oluşturduğumuz bu A_1, A_2, A_3, ... , A_n noktalarına **çokgenin köşeleri**, bu doğru parçalarına **çokgenin kenarları** ve böylece oluşan $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$,..., $A_{n-1}A_nA_1$ açılarına da **çokgenin iç açıları**, bu açıların bütünleyenlerine de **çokgenin dış açıları** denir.



Köşeleri A_1, A_2, A_3, ... , A_n ile isimlendirilmiş bir çokgende A_1 ile A_2, A_2 ile A_3, genel olarak A_n ile A_{n+1} köşe çiftlerine **ardışık köşeler** denir.

''Ardışık köşe'' kavramını kullanarak çokgenin kenarlarını şöyle de tanımlayabiliriz: Bir çokgenin ardışık köşelerini birleştiren doğru parçalarına **çokgenin kenarları** denir. Burada doğal olarak ardışık olmayan köşeleri birleştiren doğru parçalarına ne dendiği sorusu akla gelir. Söyleyelim, onlara da **çokgenin köşegenleri** denir.

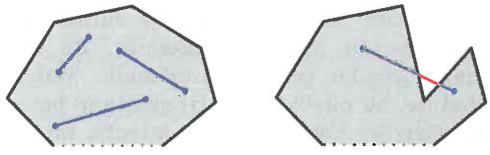
Üçgenin herhangi iki köşesi daima ardışık olduğundan yani başka deyişle üçgenin ardışık olmayan iki köşesi olmadığından köşegeninin olmadığına dikkatinizi çekerim.

Çokgen kapalı bir şekil olup açılarının iç bölgelerinin arakesitine (kesişimine) **çokgenin iç bölgesi** veya kısaca **içi** denir. Dışına da **dış bölgesi** veya kısaca **dışı** denir.



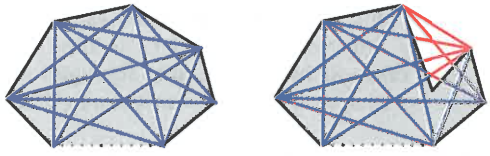
Çokgenin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine de **çokgensel bölge** denir. $(A_1A_2A_3...A_n)$ ile gösterilir.

Bir çokgenin iç bölgesinde alınan rastgele iki noktayı birleştiren doğru parçasının tüm noktaları daima çokgensel bölgede kalıyorsa o çokgene **dışbükey** veya **konveks** denir. Eğer böyle çizilen bir doğru parçasının tek bir noktası bile dış bölgeye aitse o çokgene **içbükey** veya **konkav** denir.



Dışbükey (Konveks) İçbükey (Konkav)

Yukardaki şekillerden ne demek istediğimizi daha rahat anlayabilirsiniz. Yalnız kelli felli kitaplarda verilen bu konveks ve konkav tanımını ben biraz yetersiz buluyorum. Çünkü bir çokgensel bölgeye ait tüm nokta çiftlerinin belirttiği tüm doğru parçalarını incelemek olanaksızdır. Ben onun yerine şunu öneriyorum:



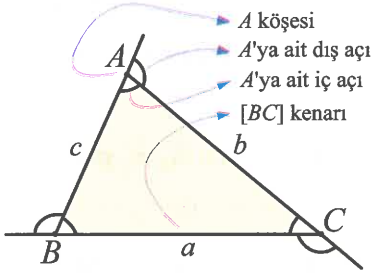
Dışbükey (Konveks) İçbükey (Konkav)

Bir çokgenin tüm köşegenleri çokgensel bölgeye aitse o çokgene **dışbükey**, bir köşegeninin en az bir noktası dış bölgeye aitse o çokgene **içbükey** denir.

Bu tanımın tek sorunu, üçgenin dışbükey mi içbükey mi olduğu sorusuna cevap verememesidir. Çünkü üçgenlerin köşegeni yok! Bunun için ilk tanımı (ve biraz da sezgilerimizi) kullanarak, tüm üçgenlerin konveks yani dışbükey olduklarını söyleyebiliriz.

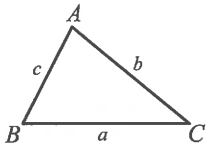
Çokgenler hakkında işimize yarayacak kadar konuştuk. Şimdi üçgen konusuna kaldığımız yerden devam edelim:

ABC üçgenini oluşturduğumuz *A, B, C* noktalarına **üçgenin köşeleri**, bu doğru parçalarına **üçgenin kenarları** ve böylece oluşan *BAC, CBA, ACB* açılarına da **üçgenin iç açıları**, bu açıların bütünleyenlerine de **üçgenin dış açıları** denir.



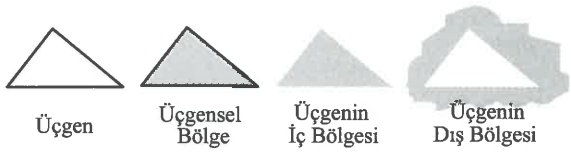
Kenar uzunlukları genellikle *a, b, c* gibi küçük harflerle, köşeler ve açılar ise genelde *A, B, C* gibi büyük harflerle gösterilir. Kenarlara ve açılara **üçgenin temel elemanları** denir.

Herhangi bir çokgenin tüm kenarlarının uzunlukları toplamına **o çokgenin çevresi** denir.



Kenar uzunlukları *a* br, *b* br ve *c* br olan bir *ABC* üçgeninin çevresi, Çevre(*ABC*) veya kısaca Ç(*ABC*) ile gösterilir ve $a+b+c$ toplamıyla hesaplanır. Kolayca anlaşılacağı üzere bir üçgenin çevre ölçüsünün bilinmesi üçgeni belirlemeye yetmez. Farklı üçgenlerin çevreleri aynı olabilir.

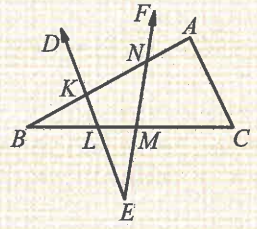
Üçgen kapalı bir şekil olup açılarının iç bölgelerinin arakesitine **üçgenin iç bölgesi** veya kısaca **içi** denir. Dışına da **dış bölgesi** veya kısaca **dışı** denir.



Üçgenin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine de **üçgensel bölge** denir. $(\overset{\Delta}{ABC})$ ile gösterilir. Dış bölgeyi de gerekirse $)\overset{\Delta}{ABC}($ ile gösteririz.

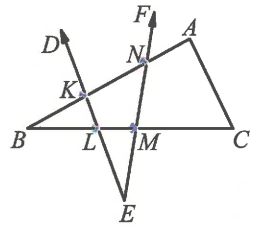
Üçgen ve üçgensel bölgenin farkını ayırt etmek gereken soru tipleri vardır. Bu soruları doğru çözebilmek için üçgenin üç doğru parçasının birleşimi ama üçgensel bölgenin o doğru parçaları ve onlar arasında kalan bölge olduğunu bilmek gerekir. Aşağıdaki soru ve çözümleri dikkatlice inceleyiniz.

Örnek. *Aşağıdaki soruları yandaki şekle bakarak cevaplayınız.*



- *ABC üçgeni ile DEF açısının kesişimi nedir?*

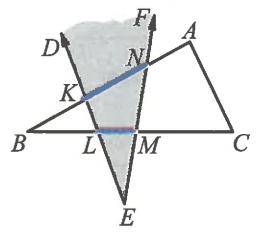
Üçgen doğru parçalarından, açı da ışınlardan oluşuyordu. Doğru parçasıyla ışının kesişimi bir nokta olacağından cevabımız *K, L, M, N* noktalarıdır.



$\overset{\Delta}{ABC} \cap \widehat{DEF} = \{K, L, M, N\}$

- *ABC üçgeni ile DEF açısal bölgesinin kesişimi nedir?*

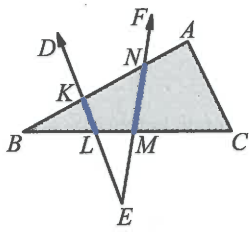
Üçgen doğru parçalarından oluşurken, açısal bölgeye açının içi de dahildir. Bu yüzden cevabımız [*KN*] ile [*LM*] olmalıdır.



$\overset{\Delta}{ABC} \cap \left(\widehat{DEF}\right) = [KN] \cup [LM]$

- *ABC üçgensel bölgesi ile DEF açısının kesişimi nedir?*

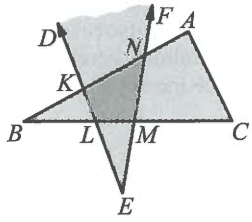
Açı ışınlardan oluşurken, üçgensel bölgeye üçgenin içi de dahildir. Bu yüzden cevabımız [KL] ile [MN] olmalıdır.



$$(\overset{\triangle}{ABC}) \cap \widehat{DEF} = [KL] \cup [MN]$$

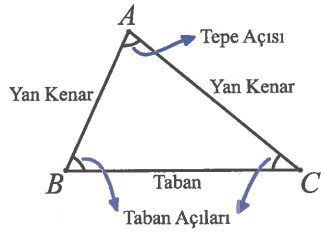
- *ABC üçgensel bölgesi ile DEF açısal bölgesinin kesişimi nedir?*

Bu sefer hem açının hem de üçgenin içi dahil olduğundan cevabımız *KLMN* dörtgensel bölgesi olmalıdır. Dikkat edin, *KLMN* dörtgeni değil!



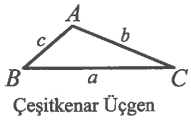
$$(\overset{\triangle}{ABC}) \cap (\widehat{DEF}) = (KLMN)$$

Üçgen ile üçgensel bölgeyi birbirinden ayırmayı sağlayan bu örneklerden sonra konumuza devam ediyoruz:

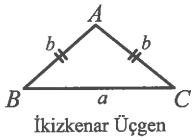


Üçgenin kenarlarından birine **taban** diyecek olursak, öteki iki kenara **yan kenarlar**, taban karşısındaki açıya **tepe açısı**, öteki iki açıya da **taban açıları** denir.

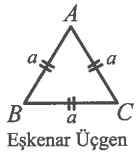
Üçgenler kenarlarına göre sınıflandırılabilirler.



Çeşitkenar Üçgen



İkizkenar Üçgen

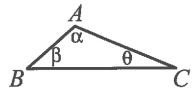


Eşkenar Üçgen

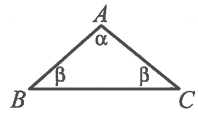
Kenarları farklı uzunlukta olanlara **çeşitkenar üçgen**, (en az) iki kenarı eşit uzunlukta olanlara **ikizkenar üçgen** ve üç kenar uzunluğu da eşit olanlara da **eşkenar üçgen** denir.

Kolayca anlaşılacağı üzere; her eşkenar üçgen bir ikizkenar üçgendir ama her ikizkenar üçgen eşkenar üçgen olmayabilir.

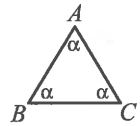
Benzer bir sınıflama üçgenin açılarına göre de yapılabilir.



Çeşitaçı Üçgen



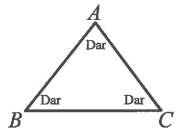
İkizaçı Üçgen



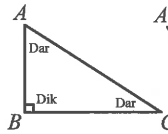
Eşaçı Üçgen

Çeşitaçı üçgen, ikizaçı üçgen, eşaçı üçgen gibi...

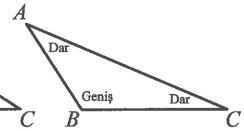
Açılarının ölçülerine göre de bir sınıflama yapılabilir.



Dar Açılı Üçgen



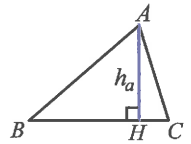
Dik Üçgen



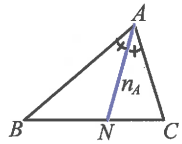
Geniş Açılı Üçgen

Dar açılı üçgen, dik (açılı) üçgen, geniş açılı üçgen gibi...

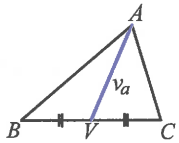
Temel elemanlar olur da yardımcılar olmaz mı? Bir üçgende bir köşeden karşı kenarı dik kesecek şekilde çizilen doğru parçasına bu köşeye ait **yükseklik,** bir köşeye ait açıyı ortalayan doğrunun üçgen içinde kalan doğru parçasına bu köşeye ait **iç açıortay**, bir köşeyi karşı kenarın ortasına birleştiren doğru parçasına da bu köşeye ait **kenarortay** denir.



[AH]: A'dan inen yükseklik



[AN]:A'ya ait iç açıortay



[AV]:A'dan inen kenarortay

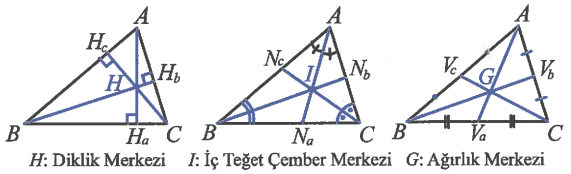
Yukarıdaki şekillerden bir *ABC* üçgeninin *A* köşesine ait yükseklik, açıortay ve kenarortayına bakabilirsiniz.

Bir üçgende bu üç doğru parçasına **üçgenin yardımcı elemanları** denir.

Bir üçgende 3 tane yükseklik, 3 tane iç açıortay, 3 tane kenarortay vardır. Yüksekliklerin uzunlukları h_a, h_b, h_c, iç açıortayların uzunlukları n_A, n_B, n_C, kenarortayların uzunlukları da v_a, v_b, v_c veya m_a, m_b, m_c ile gösterilir.

Yükseklik ve kenarortayların indislerini küçük harflerle fakat iç açıortayların indislerini büyük harflerle yazdığımıza dikkat ediniz. Zira, yükseklik ve kenarortaylar kenarlarla ama iç açıortaylar açılarla alakalıdır.

Bu yardımcı elemanlar daima kendi aralarında noktadaştır (tek noktada kesişir).



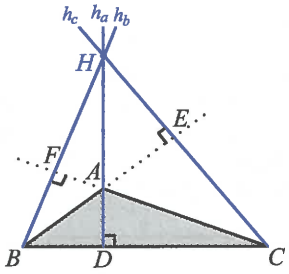
H: Diklik Merkezi *I*: İç Teğet Çember Merkezi *G*: Ağırlık Merkezi

Yüksekliklerin kesiştiği yere üçgenin **diklik merkezi** denir. *H* ile gösterilir.

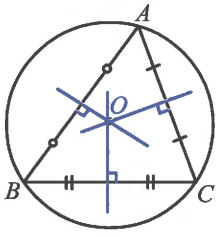
İç açıortayların kesiştiği yer üçgenin **iç teğet çemberinin merkezidir**. *I* ile gösterilir.

Kenarortayların kesiştiği yer de **üçgensel bölgenin ağırlık merkezidir**. *G* ile gösterilir.

Bir üçgende kenarortaylar ve iç açıortaylar daima üçgen içinde kesişirler fakat yükseklikler üçgenin dışında da kesişebilir.



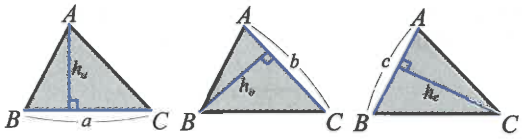
Bu durum sadece üçgen geniş açılı olduğunda oluşur. Dar açılı üçgenlerde tüm yardımcı elemanlar üçgen içinde bir yerde kesişirler.



Bir üçgenin kenar orta dikmelerinin (kenarın tam ortasından onu dik keserek geçen doğrular) *kesiştiği yer, üçgenin* **çevrel çember merkezidir**. *O* ile gösterilir.

Bir çokgensel bölgenin bir düzlemde kapladığı sahanın büyüklüğünü küçüklüğünü anlatabilmek için o bölgeyi bir reel sayıya karşılık getirmek gerekir. Bu reel sayıya o **çokgensel bölgenin alanı** denir. Yalnız bölgelerin hangi kurala binaen hangi reel sayıyla eşleşeceği çokgenlere göre değişmektedir. Üçgensel bölgeler için alanı veren kural şöyledir:

Kenar uzunlukları *a* br, *b* br ve *c* br olan bir *ABC* üçgeninin bu kenarlara inen yüksekliklerinin boyu sırasıyla h_a, br, h_b br ve h_c br olsun. Bu üçgenin belirttiği bölgenin alanına da Alan(*ABC*) diyelim.



Bu alan üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğuyla, o kenara inen yüksekliğinin uzunluğunun çarpımının yarısıyla hesaplanır. Yani

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

eşitliklerinden biri kullanılır.

Bir üçgensel bölgenin alanını bilmek de o üçgeni belirlemeye yetmez. Farklı üçgenlerin alan ölçüleri aynı olabilir.

Çeşitkenar üçgen. Üç kenar uzunluğu da birbirinden farklı (dolayısıyla üç iç veya dış açısı da farklı) olan üçgenlere **çeşitkenar üçgen** denir.

Çeşitkenar üçgenlerin herhangi bir köşesine ait yardımcı elemanları da farklı uzunluktadır. Yani;

$$h_a \neq n_A \neq v_a$$
$$h_b \neq n_B \neq v_b$$
$$h_c \neq n_C \neq v_c$$

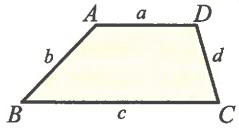
Bunun dışında üç ayrı köşeye ait aynı cins yardımcı elemanlar da farklı uzunluktadır. Yani;

$$h_a \neq h_b \neq h_c$$
$$n_A \neq n_B \neq n_C$$
$$v_a \neq v_b \neq v_c$$

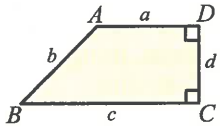
Bu kuralların ve özel noktaların her biri kendi konusunda detaylı olarak işlenecek ve hüküm bildiren kısımlar kanıtlanacaktır. Şimdilik sadece tanım olarak vermekle yetineceğiz. Hatta özel dörtgenleri de burada bir yerde sadece tanım olarak vermek işimizi kolaylaştıracak. Daha sonra özelliklerini ilgili başlıklarda inceleriz.

YAMUK

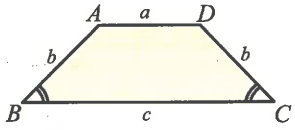
En az iki kenarı birbirine paralel olan dörtgenlere **yamuk** denir. Paralel olan kenarlara **taban**, diğer kenarlara da **yan** veya **eğik kenarlar** denir.



Tüm kenar uzunlukları, dolayısıyla tüm iç açı ölçüleri birbirlerinden farklı olan yamuklara **çeşitkenar yamuk**,



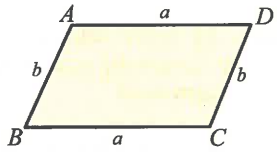
yan kenarlarından en az biri tabanları dik kesen yamuklara **dik yamuk**,



yan kenar uzunlukları dolayısıyla taban açıları eşit olan yamuklara da **ikizkenar yamuk** denir.

PARALELKENAR

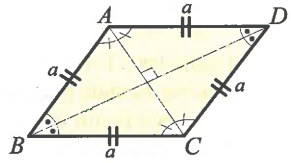
Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgenlere **paralelkenar** denir. Yamuğun yan kenarlarının da birbirine paralel olduğu halidir. Dolayısıyla tüm yamuk teoremleri paralelkenarda sağlanır.



Paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açı ölçüleri birbirlerine eşittir.

EŞKENAR DÖRTGEN

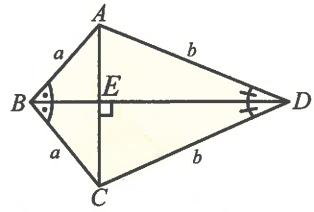
Tüm kenar uzunlukları eşit boyda olan dörtgenlere **eşkenar dörtgen** denir. Eşkenar dörtgenin kenarları birbirine paraleldir, bundan dolayı paralelkenarın ve yamuğun tüm teoremleri eşkenar dörtgende sağlanır.



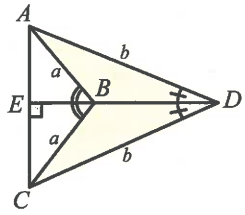
Eşkenar dörtgenin köşegenleri, eşit olmak zorunda değillerdir ama birbirlerini hem ortalarlar, hem de dik keserler. Ayrıca köşegenler açıortaydır.

DELTOİT

İki kenarı eş olan bir dörtgenin diğer iki kenarı da eş ise o dörtgene **deltoit** denir. Tabanları aynı uzunlukta olan iki ikizkenar üçgen tabanlarından birbirine yapıştırıldığında, ikizkenar üçgenlerin ikiz kenarlarının belirttiği dörtgeni düşünebilirsiniz. Deltoidin köşegenleri dik kesişir. Köşegenlerin kesişim noktası, köşegenin birini ortalar ama diğerini ortalamaz. Bunun yanında köşegenlerin biri açıortaydır ama diğeri değildir. İkizkenar üçgenlerin yüksekliği olan doğru (*DB* doğrusu) deltoidin simetri eksenidir.



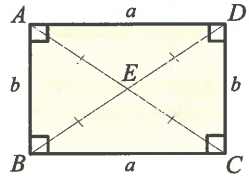
Eğer ikizkenar üçgenler aşağıdaki şekildeki gibi zıt yöne değil aynı yöne doğru yapıştırılırlarsa, ikizkenarların belirttiği dörtgen içbükey olacağından, o şekle içbükey ya da **konkav deltoit** denir.



Eni sonu, her halükarda ikizkenar üçgenler deltoidi meydana getirdiğinden ikizkenar üçgenin özeliklerine sık rastlayacağımızı öngörebiliriz.

DİKDÖRTGEN

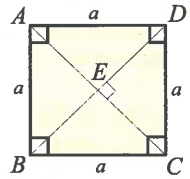
Ardışık kenarları birbirlerini dik kesen dörtgenlere **dikdörtgen** denir. Dikdörtgenin karşılıklı kenarları birbirlerine eşit uzunluktadır. Ayrıca karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olduğundan tüm paralelkenar ve yamuk teoremleri dikdörtgende sağlanır.



Dikdörtgenin köşegen uzunlukları birbirlerine eşit olup, köşegenleri birbirlerini ortalarlar.

KARE

Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgenlere **kare** denir. Karenin de karşılıklı kenarları birbirine paralel olduğundan tüm paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen teoremleri karede sağlanır.



Karenin köşegen uzunlukları da birbirlerine eşittir. Karede köşegenler açıortay olup, birbirlerini hem ortalar hem de dik keserler.

Geometri Notları

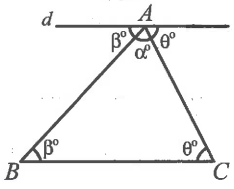
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üçgenin Açıları

Şimdi yavaş yavaş işlemler yapmaya ve dolayısıyla geometrinin güzelliklerini görmeye başlayacağız. Aşağıda kanıtlarıyla birlikte vermiş olduğumuz teoremler düzlem geometrinin temelleri olduğundan iyice kavranmalı, yeterince hatta fazlasıyla pratiğe dökülmelidir. Bunlar tam kavranmadan ilerideki konulara geçmemenizi şiddetle tavsiye ederiz.

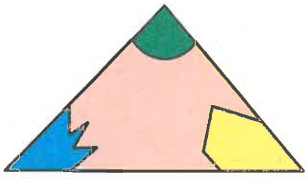
Teorem. *Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180°'dir.*

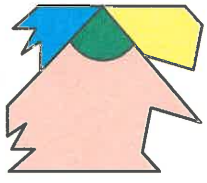
Kanıt: *A*, *B*, *C* açılarının ölçüleri sırasıyla α, β, θ olan yandaki gibi herhangi bir *ABC* üçgeni çizip, bu üçgenin herhangi bir köşesinden bu köşenin karşısındaki kenara paralel olacak şekilde geçen bir doğru çiziniz.



Örneğin şekildeki *d* doğrusu *A*'dan geçmekte ve *BC*'ye paralel olsun. İç-ters açıların gerektirdikleri yapılırsa (Z ve Ters-Z Kuralı), üç açının bir doğru açı oluşturduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla α + β + θ = 180 olduğu kanıtlanmış olur.

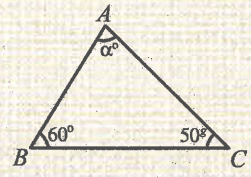
Ey inananlar! Lafım size değil. Ben görmediğime inanmam diyenlere sesleniyorum. Üçgen şekilde bir kağıt parçası alınız. Öyle bir kağıt yoksa, makasla kesip oluşturunuz.





Daha sonra kağıdın herhangi iki köşesinden yukardaki gibi birer parça kesip o iki parçayı sağlam köşenin yanlarına şekildeki gibi getiriniz. Tabana paralel bir hat görürseniz, siz de hidayete erersiniz ☺

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 60°$
$m(BCA) = 50^g$
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$
kaç radyandır?



A) $\frac{1}{6}\pi$ B) $\frac{1}{4}\pi$ C) $\frac{3}{4}\pi$ D) $\frac{5}{12}\pi$ E) $\frac{7}{12}\pi$

Çözüm: *C* açısının ölçüsünü de derece cinsine çevirerek *A* açısının ölçüsünü derece cinsinden bulacağız. Daha sonra bulduğumuz değeri radyan cinsine çevirip doğru şıkkı işaretleyeceğiz. $200^g = 180°$ olduğundan $50^g = 45°$ olur. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$$m(A) = 180° - 60° - 45° = 75°$$

olarak bulunur. $180° = \pi$ radyan olduğundan $75° = \frac{5}{12}\pi$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

1.
Bir *ABC* üçgeninde

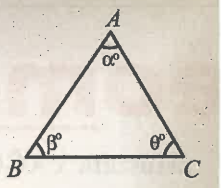
$$m(A) = 45°$$
$$m(B) - m(C) = 35°$$

olduğuna göre *m(B)* değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 45° B) 50° C) 67° 30′ D) 85° E) 72° 30′

1968 ÜSS

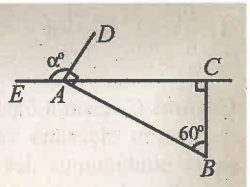
2.
ABC bir üçgen
$m(A) = \alpha^\circ$
$m(B) = \beta^\circ$
$m(C) = \theta^\circ$
$4\theta - \beta < \alpha$



olduğuna göre θ'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 16 B) 19 C) 21 D) 23 **E)** 35

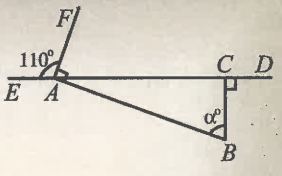
3.
$BA \perp AD$
$BC \perp EC$
$m(ABC) = 60^\circ$
olduğuna göre
***m(DAE)* kaç derecedir?**



A) 100 B) 110 **C)** 120 D) 130 E) 140

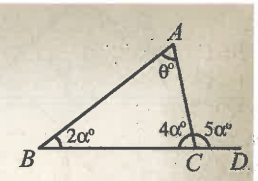
1982 ÖSS

4.
$FA \perp AB$
$BC \perp ED$
$m(EAF) = 110^\circ$
$m(B) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



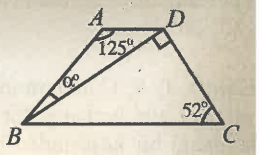
A) 70 B) 65 C) 60 D) 55 E) 50

5.
B, C, D doğrusal
$m(BCA) = 4\alpha^\circ$
$m(DCA) = 5\alpha^\circ$
$m(B) = 2\alpha^\circ$
$m(A) = \theta^\circ$
olduğuna göre θ kaçtır?



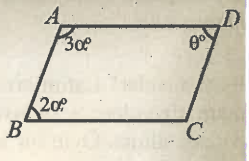
A) 50 **B)** 60 C) 70 D) 75 E) 80

6.
$AD \,//\, BC$
$CD \perp DB$
$m(DCB) = 52^\circ$
$m(BAD) = 125^\circ$
$m(DBA) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



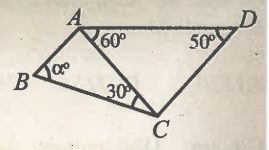
A) 13 B) 15 **C)** 17 D) 19 E) 21

7.
$AD \,//\, BC$
$AB \,//\, DC$
$m(CBA) = 2\alpha^\circ$
$m(BAD) = 3\alpha^\circ$
$m(ADC) = \theta^\circ$
olduğuna göre θ kaçtır?



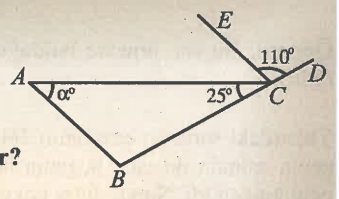
A) 58 B) 63 **C)** 72 D) 74 E) 75

8.
ABCD bir dörtgen
$m(CAD) = 60°$
$m(ACB) = 30°$
$m(D) = 50°$
$m(B) = \alpha°$
***BA // CD* olduğuna göre α kaçtır?**



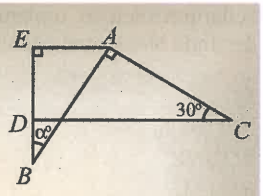
A) 80 B) 70 C) 60 D) 50 E) 40

9.
BA // CE
$m(DCE) = 110°$
$m(ACB) = 25°$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 20 B) 35 **C)** 45 D) 55 E) 65

10.
EA // DC
BE ⊥ *EA*
BA ⊥ *AC*
$m(DCA) = 30°$
$m(EBA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 **B)** 30 C) 45 D) 60 E) 75
1986 ÖSS

Örnek. *İç açılarının ölçüleri* 1:2:3 *orantısında olan bir üçgen aşağıdaki üçgen ailelerinden hangisine mensuptur?*

A) İkizkenar B) Eşkenar C) Dik
D) Dar açılı E) Geniş açılı

Çözüm: Üçgenin en küçük iç açısının ölçüsü $\alpha°$ olsun. Diğerleri verilen orantıdan dolayı $2\alpha°$ ve $3\alpha°$ olur. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan
$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180$
eşitliğinden $\alpha = 30$ bulunur. Bu durumda üçgenin iç açılarının ölçüleri 30°, 60°, 90° olarak bulunduğundan üçgen bir dik üçgendir.

Doğru cevap: C.

11.
İç açılarının ölçüleri 3:4:5 orantısında olan bir üçgen aşağıdaki üçgen ailelerinden hangisine mensuptur?

A) İkizkenar B) Eşkenar C) Dik
D) Dar açılı E) Geniş açılı

Örnek. *Bir ABC üçgeninde*
$32° < m(A) < 58°$
$34° < m(B) < 66°$
olduğuna göre $m(C)$'nin derece cinsinden alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini gösteren ikili aşağıdakilerden hangisidir?

A) (55, 115) B) (56, 114) C) (55, 114)
D) (57, 113) E) (57, 114)

Çözüm: Verilen eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} 32° < m(A) < 58° \\ + \quad 34° < m(B) < 66° \\ \hline 66° < m(A) + m(B) < 124° \end{array}$$

Bir üçgende $m(A) + m(B) + m(C) = 180°$ olduğunu biliyoruz. O halde $m(A) + m(B)$ yerine $180° - m(C)$ yazıp eşitsizlikleri çözersek sonuca ulaşabiliriz.

$$66° < 180° - m(C) < 124°$$
$$-114° < -m(C) < -56°$$
$$56° < m(C) < 114°$$

olduğundan $m(C)$'nin derece cinsinden alabileceği en küçük tam sayı değeri 57, en büyük tam sayı değeriyse 113'tür.

Doğru cevap: D.

12.
Bir ABC üçgeninde

$$30° < m(A) < 62°$$
$$24° < m(B) < 72°$$

olduğuna göre $m(C)$'nin derece cinsinden alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 45 B) 46 **C)** 47 D) 48 E) 49

13.
İç açılarının ölçüleri derece cinsinden tam sayı olan bir ABC üçgeninde

$$30° < m(A) < 62°$$
$$24° < m(B) < 72°$$

olduğuna göre $m(C)$'nin derece cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 123 **B)** 124 C) 125 D) 126 E) 127

14.
ABC üçgeninde $m(C) = 2\,m(B)$ olup

$$30° < m(A) < 62°$$

olduğuna göre $m(C) - m(B)$'nin derece cinsinden alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

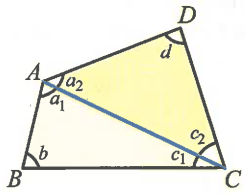
A) 13 B) 12 C) 11 **D)** 10 E) 9

Örnek. *Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir?*

A) 180 B) 225 C) 360 D) 540 E) 720

Çözüm: Dörtgenimiz yandaki $ABCD$ dörtgeni olsun. $[AC]$'yi çizelim. $m(CAB) = a_1$, $m(CAD) = a_2$, $m(ABC) = b$, $m(BCA) = c_1$, $m(ACD) = c_2$ ve $m(CDA) = d$ olsun. Şu durumda bize

$$a_1 + a_2 + b + c_1 + c_2 + d$$



toplamı lazım. ABC ve ACD birer üçgen olduklarından

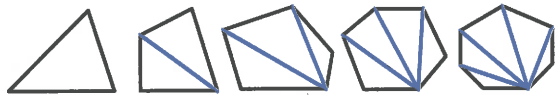
$$a_1 + b + c_1 = 180°$$
$$a_2 + d + c_2 = 180°$$

elde edilir. Bu eşitlikler toplanırsa aradığımıza ulaşırız. Demek ki bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° imiş.

Doğru cevap: C.

Önemli. Bu son örnekte bulduğumuz cevabı genelleyebiliriz.

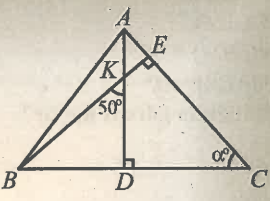
Yukardaki sorunun cevabının 360° çıkması, özetle, dörtgenin aslında iki tane üçgenin birleşmesinden meydana geldiğinden idi. Şimdi diğer çokgenlerin kaç üçgene parçalanabildiklerine bakalım.



Üçgen Dörtgen Beşgen Altıgen Yedigen

Görülüyor ki beşgen 3, altıgen 4, yedigen 5 adet üçgenin birleşiminden oluşmaktadır. Bir aksilik olmazsa (!) n-gen de $n - 2$ tane üçgenden oluşacağı için bir n-genin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n - 2)\cdot 180°$ dir. Çokgenler dersinde bu teoremi adam gibi kanıtladık!

15.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$m(DKB) = 50°$
olduğuna göre
$m(BCA)$ kaç derecedir?

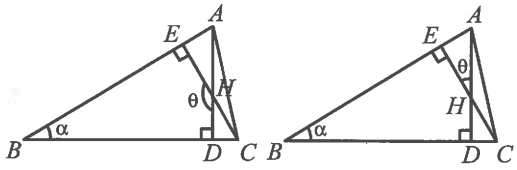


A) 80 B) 70 C) 60 **D)** 50 E) 40

1985 ÖYS

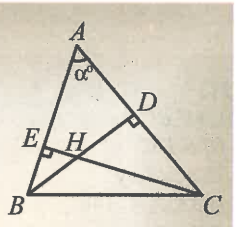
Teorem. *Bir üçgene ait iki yüksekliğin belirttiği açının ölçüsü, yüksekliğin inmediği köşenin açı ölçüsüyle ya eşit ya da bütünlerdir.*

Kanıt: Örnek olarak A ve C köşelerinden çıkan yükseklikleri çizelim.



Yüksekliklerin belirttiği geniş açının ölçüsü θ ise $EBDH$ dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından $\alpha + \theta = 180°$ bulunur. Eğer dar açının ölçüsü θ ise aynı sebepten $\theta = \alpha$ olur.

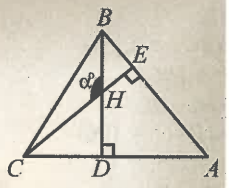
16.
ABC üçgen
$BD \perp CA$
$CE \perp AB$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre $m(BHC)$'nin değeri α cinsinden kaçtır?



A) $2\alpha°$ B) $90° + \frac{\alpha°}{2}$ C) $90° + \alpha°$
D) $180° - \frac{\alpha°}{2}$ **E)** $180° - \alpha°$

1981 ÖYS

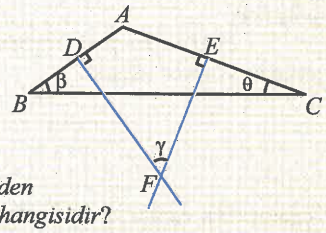
17.
$BD \perp CA$
$CE \perp AB$
$m(BHC) = \alpha°$
olduğuna göre α aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $m(A) + m(B)$ **B)** $m(B) + m(C)$ C) $180 - 2 \cdot m(A)$
D) $180 - m(C)$ E) $180 - m(B)$

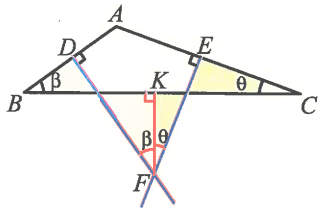
Aslında bu durum, illa da yüksekliğe ait bir durum değildir. Herhangi iki kenardan çıkılan dikmelerin belirttiği açı ölçüsü, dikme çıkılmayan kenarın gördüğü açıya eşit ya da bütünlerdir. Aşağıdaki örnek bununla ilgili...

Örnek. *ABC bir üçgen*
$FD \perp AB$
$FE \perp CA$
$m(B) = \beta$
$m(C) = \theta$
$m(DFE) = \gamma$
göre γ'nın β ve θ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\beta + \theta$ B) $\beta - \theta$ C) $2\beta - \theta$ D) $2\theta - \beta$ E) $\pi - \beta - \theta$

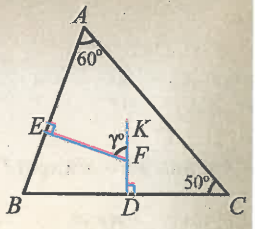
Çözüm: F noktasından BC'ye indirilen dikme ayağı K olsun.



$DBKF$ dörtgeninden $m(DFK) = \beta$, $KFEC$ dörtgeninden de $m(EFK) = \theta$ bulunur. O halde $m(DFE) = \beta + \theta$'dır.

Doğru cevap: A.

18.
ABC bir üçgen
$KD \perp BC$
$FE \perp AB$
$m(A) = 60°$
$m(C) = 50°$
$m(EFK) = \gamma°$
olduğuna göre γ kaçtır?



A) 80 **B)** 70 C) 60 D) 50 E) 40

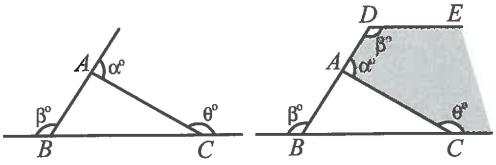
Teorem. *Bir üçgende dış açıların ölçüleri toplamı 360°'dir.*

Kanıt: Üçgenin iç açılarının ölçülerine $\alpha°$, $\beta°$ ve $\theta°$ diyelim. $\alpha+\beta+\theta=180$ olduğu kanıtlandığından dış açıların ölçüleri olan $180°-\alpha°$, $180°-\beta°$, $180°-\theta°$ değerleri toplanarak

$$540-(\alpha+\beta+\theta)=540-180=360$$

eşitliğine kolayca ulaşılır.

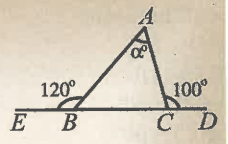
Üçgenin Dış Açılarının Ölçüleri Toplamına Geometrik Yorum: Herhangi bir ABC üçgeninin dış açılarının ölçüleri sırasıyla $\alpha°$, $\beta°$, $\theta°$ olsun.



[BA üzerinde, üst sağ şekildeki gibi bir D noktası alıp BC'ye paralel olacak şekilde [DE ışınını çizelim. Z kuralından dolayı $m(BDE)=\beta°$ olacaktır. Taranan şekilden de görüleceği üzere ''kalemucu'' kuralından $\alpha+\beta+\theta$ toplamı 360 olarak bulunur.

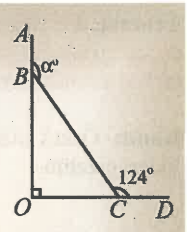
Yeri değil ama şunu unutmayın: Sadece üçgen değil, tüm çokgenlerin dış açı ölçülerinin toplamı 360°'dir.

19.
E, B, C, D doğrusal
$m(DCA)=100°$
$m(ABE)=120°$
$m(A)=\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



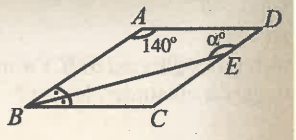
A) 20 B) 30 **C) 40** D) 50 E) 60

20.
$B\in[OA$
$C\in[OD$
$AO\perp OD$
$m(BCD)=124°$
$m(CBA)=\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



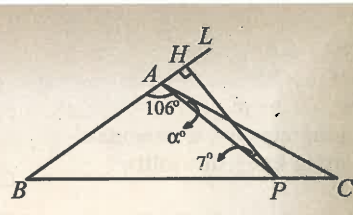
A) 138 **B) 146** C) 148 D) 152 E) 154
1994 ÖSS

21.
$AD \parallel BC$
$AB \parallel DC$
BE açıortay
$m(BAD)=140°$
$m(DEB)=\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 130 B) 140 C) 150 **D) 160** E) 165

22.
ABC bir üçgen
$P\in[BC]$
$PH\perp BL$
$m(BAC)=106°$
$m(APH)=7°$
$m(CAP)=\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 7 B) 8 **C) 9** D) 10 E) 11
1993 ÖSS

Örnek. *Dış açılarının ölçüleri 2:3:4 orantısında olan bir üçgen aşağıdaki üçgen ailelerinden hangisine mensuptur?*

A) İkizkenar B) Eşkenar C) Dik
D) Dar açılı E) Geniş açılı

Çözüm: Üçgenin en küçük dış açısının ölçüsü $2\alpha°$ olsun. Diğerleri, verilen orantıdan dolayı $3\alpha°$ ve $4\alpha°$ olur. Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ olduğundan

$$2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360$$

eşitliğinden $\alpha = 40$ bulunur. Bu durumda üçgenin dış açılarının ölçüleri $80°$, $120°$, $160°$ olarak bulunduğundan iç açılarının ölçüleri $100°$, $60°$, $20°$ olarak bulunur. O halde üçgen, geniş açılı üçgendir.

Doğru cevap: E.

23.
Dış açılarının ölçüleri 3:4:5 orantısında olan bir üçgen aşağıdaki üçgen ailelerinden hangisine mensuptur?

A) İkizkenar B) Eşkenar C) Dik
D) Dar açılı E) Geniş açılı

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi bir üçgenin dış açılarının ölçüleri arasında bulunan bir orantı olamaz?*

A) 5:6:7 B) 4:5:6 C) 3:4:5 D) 2:3:4 E) 1:2:3

Çözüm: Bir üçgenin herhangi iki dış açı ölçüsünün toplamı, üçüncü dış açı ölçüsünden küçük veya ona eşit olamaz. Hemen nedenini açıklayalım: İç açılarının ölçüleri $\alpha°$, $\beta°$, $\theta°$ olan bir üçgen alalım. Bu üçgenin dış açı ölçülerinin $180° - \alpha°$, $180° - \beta°$, $180° - \theta°$ olacağını biliyoruz.

Şimdi herhangi iki tanesini toplayalım, sözgelimi ilk ikisi olsun. Üçüncüsüyle kıyaslayacağız.

$$\begin{aligned} 180 - \alpha + 180 - \beta &= 360 - \alpha - \beta \\ &= 360 - (\alpha + \beta) \\ &= 360 - (180 - \theta) \\ &= 180 + \theta \end{aligned}$$

$180 + \theta$ toplamı daima θ'dan büyük olduğundan, iddiamızın doğru olduğu anlaşılmaktadır. Şimdi E şıkkındaki orantıya bakarsak, $1 + 2 = 3$ olduğundan, kuralımızı sağlamayacaktır.

Doğru cevap: E.

Uyarı. Bundan sonra yukardaki gibi bir soruyu, aşağıda vereceğim özellikten faydalanarak çözünüz.

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri α', β', θ' olsun. Öyleyse α', β', θ' arasında

$$|\beta' - \theta'| < \alpha' < \beta' + \theta'$$
$$|\theta' - \alpha'| < \beta' < \theta' + \alpha'$$
$$|\alpha' - \beta'| < \theta' < \alpha' + \beta'$$

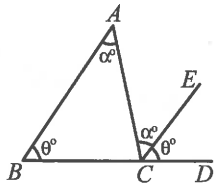
eşitsizlikleri geçerlidir.

24.
***A* açısı dik olan bir üçgende *B* ve *C*'ye ait dış açı ölçülerinin pozitif farkı aşağıdakilerden hangisi olamaz?**

A) 60° B) 70° C) 75° D) 80° E) 90°

Teorem [Dış Açı]. *Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendine komşu olmayan iki iç açının ölçülerinin toplamına eşittir.*

Kanıt: Örnek olarak *C*'ye ait dış açının ölçüsünün *A*'ya ve *B*'ye ait iç açıların ölçüleri toplamına eşit olduğunu gösterelim.



Üstteki gibi *C*'den *BA*'ya bir paralel olacak şekilde bir ışın çizersek,

$$m(ACE) = m(CAB) = \alpha°$$

ve

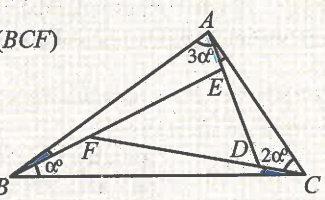
$$m(DCE) = m(DBA) = \theta°$$

olur. Bu da

$$m(DCA) = \alpha° + \theta° = m(A) + m(B)$$

demektir.

Örnek. *ABC* bir üçgen
$m(CAD) = m(ABE) = m(BCF)$
$m(DAB) = 3\alpha°$
$m(FCA) = 2\alpha°$
$m(CBE) = \alpha°$
olduğuna göre $m(EDF)$ *kaç derecedir?*



A) 60 B) 65 C) 70 D) 80 E) 90

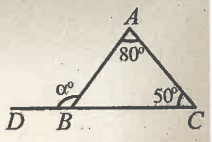
Çözüm: $m(CAD) = m(ABE) = m(BCF) = \theta°$ diyelim. Bu durumda *EDF* açısının ölçüsü *ADC* üçgeninin *A* ve *C* açılarının ölçüleri toplamına yani $2\alpha° + \theta°$ toplamına eşit olacaktır. Şimdi *ABC* üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını 180°'ye eşitleyelim, bakalım ne bulacağız?

$$(\alpha + \theta) + (2\alpha + \theta) + (3\alpha + \theta) = 180$$
$$6\alpha + 3\theta = 180$$

eşitliğinden $2\alpha + \theta = 60$ olarak bulunur.

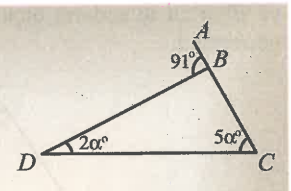
Doğru cevap: A.

25.
D, B, C doğrusal,
$m(A) = 80°$
$m(C) = 50°$
$m(ABD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



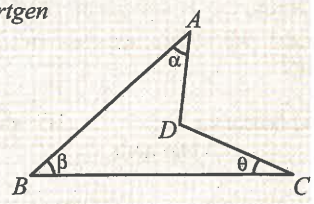
A) 130 B) 120 C) 110 D) 100 E) 30

26.
A, B, C doğrusal
$m(C) = 5\alpha°$
$m(D) = 2\alpha°$
$m(ABD) = 91°$
olduğuna göre α kaçtır?



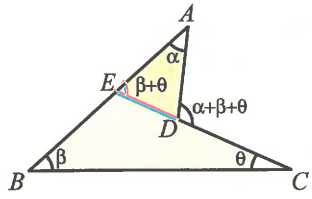
A) 13 B) 14 C) 17 D) 23 E) 26

Soru Tipi. *ABCD bir dörtgen*
$m(DAB) = \alpha$
$m(ABC) = \beta$
$m(BCD) = \theta$
olduğuna göre CDA açısının ölçüsünün α, β, θ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha + \beta + \theta$ B) $\alpha + \beta - \theta$ C) $\alpha - \beta + \theta$
D) $2\beta - \alpha - \theta$ E) $2\alpha - \theta - \beta$

Çözümü: *CD* doğrusunun *BA* doğrusunu kestiği noktaya *E* diyelim. Bir üçgende iki iç açının ölçüleri toplamı, üçüncü açının dış ölçüsüne eşit olacağından



$$m(AEC) = \beta + \theta$$

olur. Yine aynı sebepten;

$$m(CDA) = m(DAE) + m(AED)$$

olmalıdır. O halde;

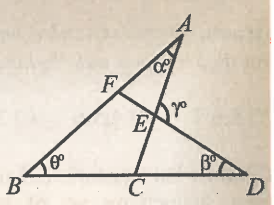
$$m(CDA) = \alpha + \beta + \theta$$

eşitliği kanıtlanmış demektir.

Doğru cevap: A.

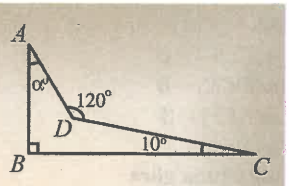
Bu kurala 'Şalvar kuralı' diyen de var, 'Bacak kuralı' diyen de var, 'Uçak kuralı' diyen de var, 'Roket' diyen de var. Var oğlu var!

27.
$m(CAB) = \alpha°$
$m(ABD) = \theta°$
$m(BDF) = \beta°$
$m(DEA) = \gamma°$
olduğuna göre γ'nin α, θ, β cinsinden eşiti hangisidir?



A) $\alpha + \theta + \beta$ B) $\beta - \alpha + \theta$ C) $\theta - \alpha + \beta$
D) $2\alpha + \beta - \theta$ E) $2\beta - \theta + \alpha$

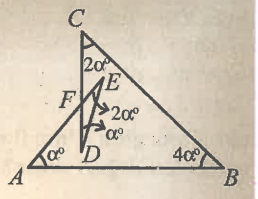
28.
$AB \perp BC$
$m(CDA) = 120^\circ$
$m(DCB) = 10^\circ$
$m(BAD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 10 **B) 20** C) 30 D) 40 E) 50

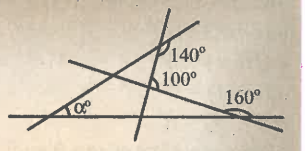
29.
$m(BAE) = m(EDC) = \alpha^\circ$
$m(DCB) = m(AED) = 2\alpha^\circ$
$m(B) = 4\alpha^\circ$

olduğuna göre α kaçtır?



A) 5 B) 10 **C) 18** D) 30 E) 36

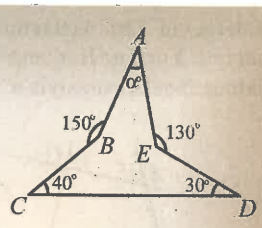
30.
Şekildeki verilere göre, α kaçtır?



A) 25 B) 30 C) 35 **D) 40** E) 45

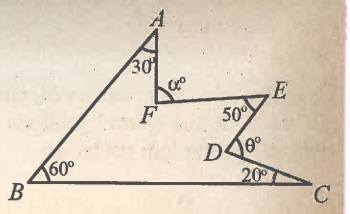
1992 ÖSS

31.
$ABCDE$ bir beşgen
$m(ABC) = 150^\circ$
$m(BCD) = 40^\circ$
$m(CDE) = 30^\circ$
$m(DEA) = 130^\circ$
$m(EAB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



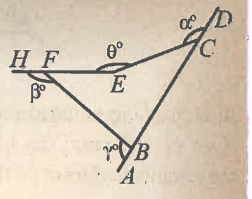
A) 10 B) 20 **C) 30** D) 40 E) 50

32.
$m(A) = 30^\circ$
$m(B) = 60^\circ$
$m(C) = 20^\circ$
$m(E) = 50^\circ$
$m(AFE) = \alpha^\circ$
$m(CDE) = \theta^\circ$
olduğuna göre $\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



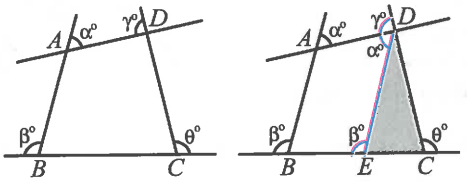
A) 180 B) 170 **C) 160** D) 150 E) 140

33.
$m(DCE) = \alpha^\circ$
$m(CEH) = \theta^\circ$
$m(HFB) = \beta^\circ$
$m(FBA) = \gamma^\circ$
olduğuna göre $\alpha + \theta + \beta + \gamma$ toplamı kaçtır?



A) 180 B) 360 **C) 540** D) 720 E) 900

Dörtgenin Dış Açılarının Ölçüleri Toplamına Geometrik Yorum: Herhangi bir $ABCD$ dörtgeninin dış açılarının ölçüleri sırasıyla α°, β°, θ° ve γ° olsun.



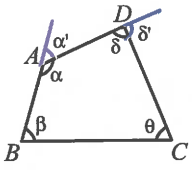
D'den AB'ye paralel çizilen doğru $[BC]$'yi E'de kessin. Z kuralından $m(ADE) = \alpha^\circ$, yöndeş açıların eşliğinden de $m(BED) = \beta^\circ$ olur. Şu durumda üst sağ şekilden de görüleceği üzere DEC üçgeninin dış açı ölçüleri $\alpha^\circ + \gamma^\circ$, β° ve θ° olduğundan toplamları 360° olarak bulunur.

Üçgenler için '*İki iç açının ölçüleri toplamı, üçüncü açının dış ölçüsüne eşittir*' şeklinde verdiğimiz dış açı teoremi dörtgenler için şöyledir:

Dışbükey bir dörtgenin herhangi iki iç açısının ölçüleri toplamı, diğer iki açısının dış ölçülerinin toplamına eşittir.

Hemen nedenini anlatalım.

Alttaki gibi bir $ABCD$ dörtgeni çizelim.



A, B, C, D iç açılarının ölçüleri sırasıyla α, β, θ, δ olsun. A ve D açılarının dış ölçüleri de α' ve δ' olsun. Göstermeye çalışacağımız eşitlik $\beta + \theta = \alpha' + \delta'$ olacak.

Dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$\alpha + \beta + \theta + \delta = 360^\circ$$

olduğunu biliyoruz.

α yerine $180^\circ - \alpha'$, δ yerine de $180^\circ - \delta'$ yazarsak

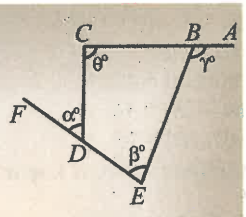
$$180^\circ - \alpha' + \beta + \theta + 180^\circ - \delta' = 360^\circ$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\beta + \theta = \alpha' + \delta'$$

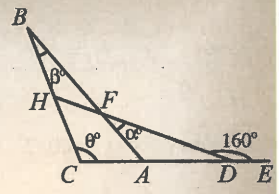
eşitliğine ulaşılır.

34.
$m(CDF) = \alpha^\circ$
$m(DCB) = \theta^\circ$
$m(BEF) = \beta^\circ$
$m(EBA) = \gamma^\circ$
olduğuna göre
$\alpha, \theta, \beta, \gamma$ arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?



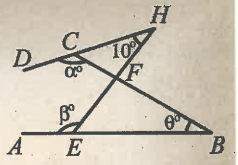
A) $\alpha + \theta = \beta + \gamma$ B) $\alpha + \beta = \theta + \gamma$ C) $\alpha + \gamma = \theta + \beta$
D) $2\alpha = \theta + \beta + \gamma$ E) $2\alpha + 2\gamma = \theta + \beta$

35.
$m(EDH) = 160^\circ$
$m(ABC) = \beta^\circ$
$m(BCE) = \theta^\circ$
$m(DFA) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α'nın θ ve β cinsinden değeri nedir?



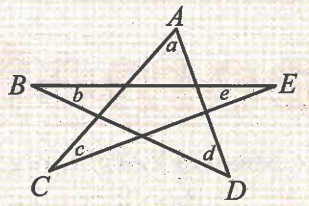
A) $100 + \beta - \theta$ B) $160 - \beta - \theta$ C) $\theta + \beta + 20$
D) $160 - \theta + \beta$ E) $160 - \beta + \theta$

36.
$m(DHE) = 10^\circ$
$m(HEA) = \beta^\circ$
$m(CBA) = \theta^\circ$
$m(DCB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α'nın θ ve β cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



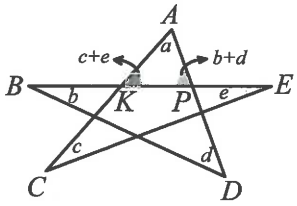
A) $10 + \beta - \theta$ B) $10 + \theta - \beta$ C) $\beta + \theta - 10$
D) $\theta - \beta - 10$ E) $20 + \theta - \beta$

Örnek. *m(DAC) = a*
m(EBD) = b
m(ACE) = c
m(BDA) = d
m(CEB) = e
olduğuna göre
a + b + c + d + e
toplamı kaç derecedir?



A) 90 B) 120 C) 180 D) 270 E) 360

Çözüm: *AC* ile *AD* doğrularının *BE* doğrusunu kestiği noktalar sırasıyla *K* ve *P* olsun.



Bir üçgende iki iç açının ölçüleri toplamı üçüncü açının dış ölçüsünü vermesi gerektiğinden $m(AKE) = c + e$ ve $m(APB) = b + d$ olur. *AKP* üçgeninde iç açıların ölçüleri toplanırsa

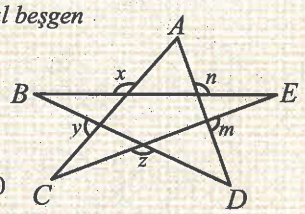
$$a + b + c + d + e = 180$$

eşitliğine ulaşılır.

Doğru cevap: C.

Geometride böyle bir şekle ''yıldızıl'' denir. Hatta şeklin 5 köşesi var diye ''yıldızıl beşgen'' deriz. Yukardaki yıldızıl beşgen *ABCDE* diye değil *ACEBD* diye okunur.

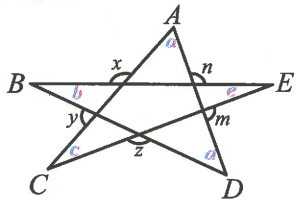
Örnek. *ACEBD bir yıldızıl beşgen olduğuna göre şekilde x, y, z, m, n ile belirtilen ölçülerin toplamı kaç derecedir?*



A) 360 B) 450 C) 540
D) 720 E) 900

Çözüm: İki değişik yoldan çözelim.
Birinci yol. Köşesi *A, B, C, D, E* olan açıların ölçülerine sırasıyla *a, b, c, d, e* diyelim. Milletin şalvar dediği kuralı kullanacağız:

$x = a + d + b$
$y = b + e + c$
$z = c + a + d$
$m = d + b + e$
$n = e + c + a$



olduğundan

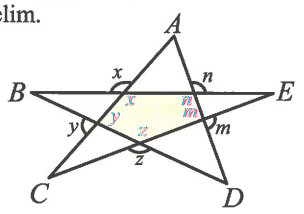
$$x + y + z + m + n = 3a + 3b + 3c + 3d + 3e$$

eşitliğine ulaşılır. Daha önce

$$a + b + c + d + e = 180°$$

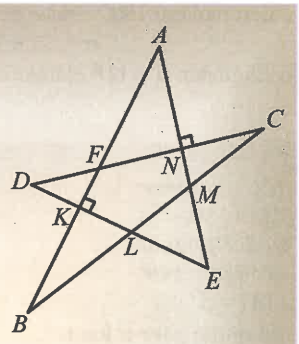
olduğunu bulduğumuzdan, sorunun cevabı 540° dir.

İkinci yol. Ölçüleri *x, y, z, m, n* olan açıların köşelerine sırasıyla *X, Y, Z, M, N* diyelim. *XYZMN* beşgeninin iç açılarının ölçülerinin de ters açılar gereği *x, y, z, m, n* olduğunu fark ediniz. O halde beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamından cevap $(5 - 2)\cdot 180° = 540°$ bulunur.



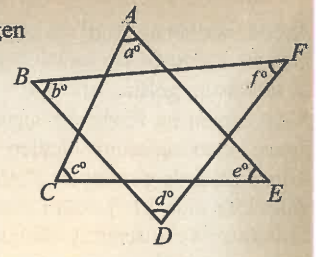
Doğru cevap: C.

37.
ABCDE bir yıldızıl beşgen
AB ⊥ DE
CD ⊥ EA
|FB| = |FC|
m(B) + m(E) = 60°
olduğuna göre
***m(A)* kaç derecedir?**



A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

38.
ABCDEF bir yıldızıl altıgen
m(EAC) = a°
m(FBD) = b°
m(ACE) = c°
m(BDF) = d°
m(CEA) = e°
m(DFB) = f°
olduğuna göre
***a + b + c + d + e + f* toplamı kaç derecedir?**



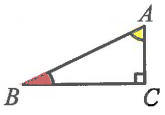
A) 900 B) 720 C) 540 D) 450 E) 360

Geometri Notları

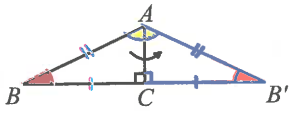
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İkizKenarlar ve İkiz Açılar

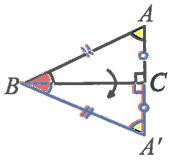
Başlığımıza bakıp ikizkenar üçgenleri anlatacağımızı düşünmeyin. Ona daha var. Şu an sadece ikizkenar üçgenlerin kullanıldığı üçgende açı sorularını masaya yatıracağız. Fakat bunun için ikizkenar üçgenin en temel özelliğini bilmeniz gerekiyor. Bu özellik de bir ikizkenar üçgende boyu eşit olan kenarları gören açıların da eşit ölçülü olmasıdır. Üçgenlerin Eşliği konusunda bunu adamakıllı kanıtlayacağız ama hiç sebepsiz bu özelliği ezbere kullanmanızı da istemiyorum. Bu yüzden aşağıda yazılanları bir güzel okuyun.



Yukardaki gibi C açısı dik olan bir ABC üçgeni çizin. Şimdi bu üçgeni alt şekildeki gibi $[AC]$ kenarı üzerinden katlayın.



Aslında katlamak değil de $[AC]$ doğrusuna göre simetriğini çizin demek istiyoruz. B noktası şekilde gösterilen B' noktasına gelsin. İşte $|AB| = |AB'|$ olduğundan oluşan $B'AB$ üçgeni bir ikizkenar üçgendir. Görülüyor ki bu üçgenin taban açılarının ölçüleri birbirlerine eşittir. Hatta daha fazlası da görülüyor. $B'AB$ ikizkenar üçgenine göre yükseklik olan $[AC]$ doğru parçasının aynı zamanda bir kenarortay ve iç açıortay olduğu da anlaşılıyor.

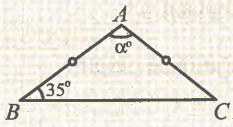


Eğer katlamayı yani simetriğini çizmeyi $[AC]$ kenarına göre değil de $[BC]$ kenarına göre yapsaydınız da değişen bir şey olmazdı. Bunu da izah edelim:

A noktasının katlama sonunda geldiği nokta A' olsun. $|BA| = |BA'|$ olduğundan oluşan ABA' üçgeni de bir ikizkenar üçgendir. Fakat bu sefer tepe noktası A değil de B noktasıdır. Taban ölçüleri olan A ve A' açılarının ölçülerinin yine birbirlerine eşit oldukları gözünüzden kaçmamıştır umarım. Hatta halen B'den inen yüksekliğin hem kenarortay hem de iç açıortay olduğu görülmektedir.

Dediğimiz gibi, bu özellikleri eşlik dersinde adamakıllı kanıtlayacağız ama şu an bilmenizi istediğimiz tek şey, ikizkenar üçgenlerin taban açılarının birbirlerine eşit ölçüde olduklarıdır.

Örnek. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC|$
$m(B) = 35°$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 35 B) 55 C) 100 D) 110 E) 135

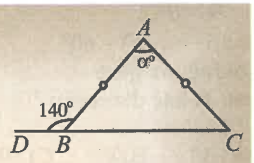
Çözüm: Tanım gereği, B ve C açılarının karşılarındaki kenarlar eşit uzunlukta olduğundan, açılar da eştir. Bu yüzden $m(C) = m(B) = 35°$ olmalıdır. Üçgenin iç açı ölçüleri toplamı 180° olması gerektiğinden

$$\alpha + 35 + 35 = 180$$

eşitliğinden $\alpha = 110$ olarak bulunur.

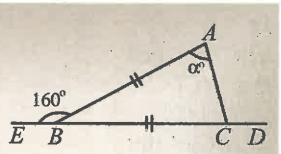
Doğru cevap: D.

1.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
D, B, C doğrudaş
$m(ABD) = 140°$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



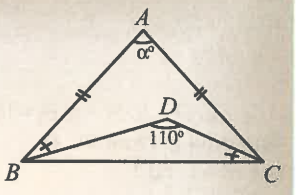
A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

2.
ABC bir üçgen
E, B, C, D doğrudaş
$|BA| = |BC|$
$m(EBA) = 160^\circ$
$m(CAB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



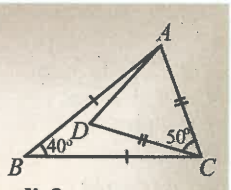
A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 **E) 80**

3.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(ABD) = m(DCB)$
$m(BDC) = 110^\circ$
$m(A) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 **B) 40** C) 50 D) 60 E) 70

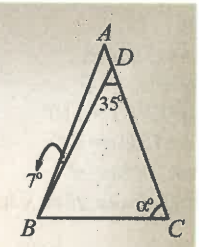
4.
ABC ve ADC ikizkenar üçgen
$|AB| = |BC|$
$|DC| = |AC|$
$m(ABC) = 40^\circ$
$m(DCA) = 50^\circ$
olduğuna göre $m(BAD)$ kaç derecedir?



A) 11 B) 9 C) 7 **D) 5** E) 3
1987 ÖYS

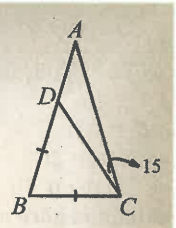
5.
ABC ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(ABD) = 7^\circ$
$m(CDB) = 35^\circ$

olduğuna göre
$m(BCA)$ kaç derecedir?



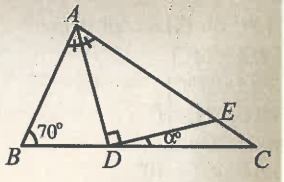
A) 74 B) 75 **C) 76** D) 77 E) 78
1990 ÖYS

6.
ABC üçgen
$m(DCA) = 15^\circ$
$|AB| = |AC|$
$|BD| = |BC|$
olduğuna göre
$m(CDB) = \alpha$ kaç derecedir?



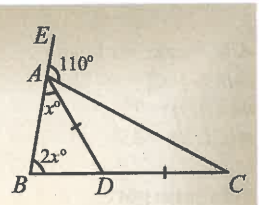
A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 **E) 55**

7.
ABC bir üçgen
AD açıortay
$AD \perp DE$
$|CA| = |CB|$
$m(B) = 70^\circ$
olduğuna göre
***EDC* açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?**



A) 10° B) 12°30′ **C) 15°** D) 20° E) 25°

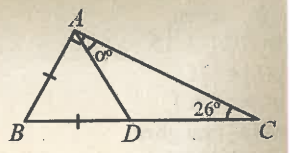
8.
ABC üçgen
$|DC| = |DA|$
$m(EAC) = 110^\circ$
$m(ABD) = 2x^\circ$
$m(DAB) = x^\circ$
olduğuna göre x kaçtır?



A) 45 **B) 40** C) 35 D) 30 E) 25

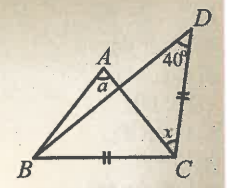
1987 ÖSS

9.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|AB| = |BD|$
$m(BCA) = 26^\circ$
$m(CAD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 26 B) 28 C) 30 **D) 32** E) 34

10.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$|BC| = |DC|$
$m(CAB) = a^\circ$
$m(ACD) = x^\circ$
$m(CDB) = 40^\circ$
olduğuna göre $m(ACD)$'nin $m(BAC)$ türünden değeri kaça eşittir?

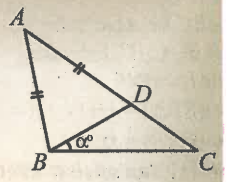


A) $a + 10$ B) $a + 40$ C) $2a - 40$

D) $\frac{a}{2} + 40$ E) $\frac{a}{2} + 10$

1996 ÖSS

11.
ABC bir üçgen
$D \in [AC]$
$|AB| = |AD|$
$m(ABC) = 100^\circ$
$m(DBC) = \alpha$
olduğuna göre $m(DAB)$'nin değeri α cinsinden kaç derecedir?

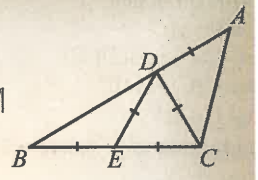


A) $100 - 2\alpha$ B) $100 - \alpha$ C) $2\alpha - 10$

D) $2\alpha - 20$ E) $\alpha + 10$

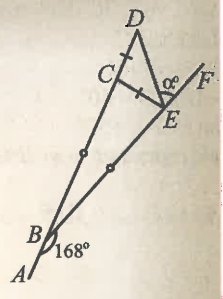
1991 ÖSS

12.
ABC bir üçgen
$D \in [AB]$
$E \in [BC]$
$|AD| = |DC| = |DE| = |BE| = |EC|$
olduğuna göre $m(DCA)$ kaç derecedir?



A) 90 B) 60 **C)** 45 D) 30 E) 20

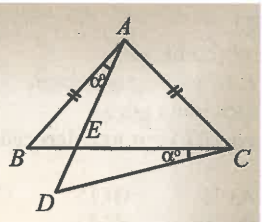
13.
A, B, C, D doğrusal
B, E, F doğrusal
$|BC| = |BE|$
$|CD| = |CE|$
$m(FBA) = 168^\circ$
olduğuna göre
$m(DEF) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 50 **B)** 54 C) 58
D) 60 E) 64

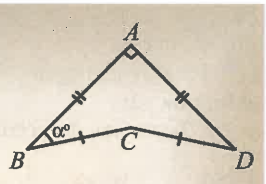
1999 ÖSS1

14.
ABC ve ADC birer üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(D) = 50°$
$m(BAD) = m(BCD) = \alpha°$
olduğuna göre
$m(BCA)$ kaç derecedir?



A) 70 B) 65 C) 60 **D) 50** E) 45

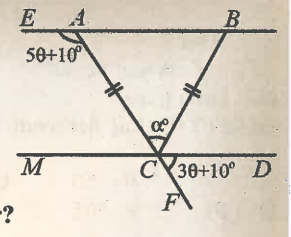
15.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$
$|AB| = |AD|$
$|BC| = |CD|$
$m(ABC) = \alpha°$
olduğuna göre $m(DCB)$ kaç derecedir?



A) $90 + \alpha$ B) $90 + \frac{3\alpha}{2}$ C) $90 + 2\alpha$
D) $180 - \alpha$ E) $180 - 2\alpha$

1984 ÖSS

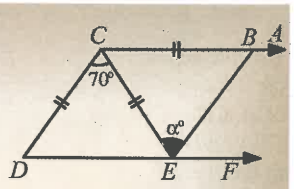
16.
$EB \,//\, MD$
A, C, F doğrusal
$m(EAC) = 5\theta + 10°$
$m(FCD) = 3\theta + 10°$
$m(ACB) = \alpha°$
$|AC| = |BC|$
Yukarıdaki şekilde α kaçtır?



A) 70 B) 60 C) 50 **D) 40** E) 30

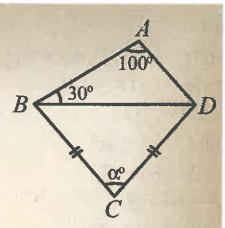
1997 ÖSS

17.
$[CA \,//\, [DF$
$|CD| = |CE| = |CB|$
$m(DCE) = 70°$
$m(BEC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 55 B) 57,5 C) 60 **D) 62,5** E) 65

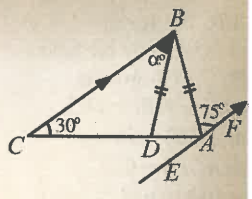
18.
$ABCD$ bir dörtgen
$AD \,//\, BC$
$|BC| = |DC|$
$m(ABD) = 30°$
$m(BAD) = 100°$
olduğuna göre
$m(BCD)$ kaç derecedir?



A) 80 B) 85 C) 90 D) 95 E) 100

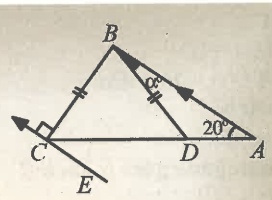
1987 ÖSS

19.
ABC bir üçgen
$CB \,//\, EA$
$|BD| = |BA|$
$m(FAB) = 75°$
$m(ACB) = 30°$
$m(CBD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



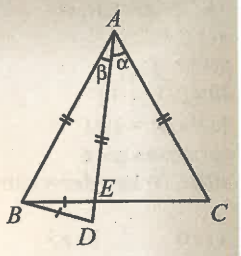
A) 30 B) 35 C) 40 **D) 45** E) 50

20.
ABC bir üçgen
$CE \,//\, BA$
$BC \perp CE$
$|BC| = |BD|$
$m(BAC) = 20°$
$m(DBA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



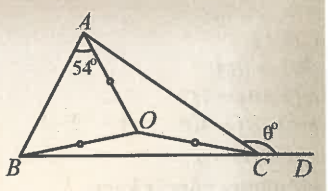
A) 30 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

21.
ABC ve ABD birer üçgen
$|AB| = |AD| = |AC|$
$|BD| = |BE|$
$m(CAD) = \alpha°$
$m(DAB) = \beta°$
$\alpha - \beta = 20$
olduğuna göre
$m(AEC)$ kaç derecedir?



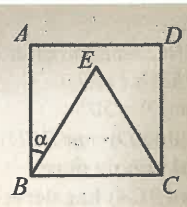
A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

22.
ABC bir üçgen
O iç bölgede bir nokta
B, C, D doğrudaş
$|OA| = |OB| = |OC|$
$m(OAB) = 54°$
$m(ACD) = \theta°$
ise θ kaçtır?



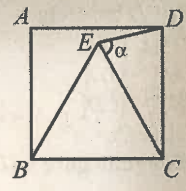
A) 144 B) 142 C) 136 D) 134 E) 128

23.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
olduğuna göre
$m(ABE) = \alpha$ kaç derecedir?



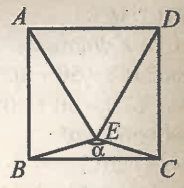
A) 10 B) 15 C) 20
D) 30 E) 45

24.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
olduğuna göre
$m(CED) = \alpha$ kaç derecedir?



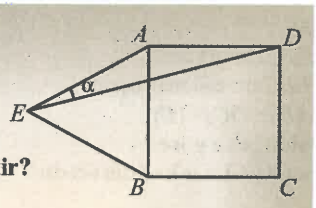
A) 30 B) 45 C) 60
D) 75 E) 80

25.
$ABCD$ bir kare
AED bir eşkenar üçgen
olduğuna göre
$m(BEC) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 165 B) 150 C) 135
D) 120 E) 105

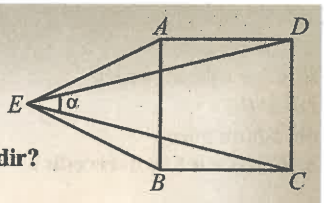
26.
ABCD bir kare
AEB bir eşkenar üçgen



olduğuna göre
***m*(*AED*) = α kaç derecedir?**

A) 10 **B)** 15 C) 20 D) 25 E) 30

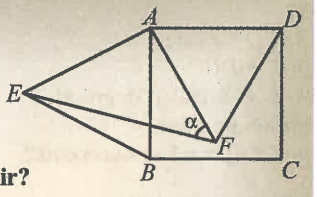
27.
ABCD bir kare
AEB bir eşkenar üçgen



olduğuna göre
***m*(*DEC*) = α kaç derecedir?**

A) 15 B) 18 C) 22,5 **D)** 30 E) 36

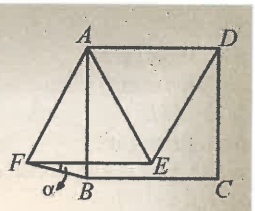
28.
ABCD bir kare
AEB ve *AFD* birer
eşkenar üçgen



olduğuna göre
***m*(*EFA*) = α kaç derecedir?**

A) 15 B) 30 **C)** 45 D) 60 E) 75

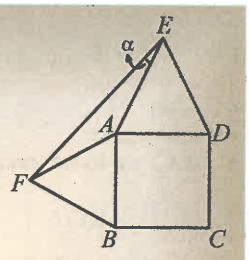
29.
ABCD bir kare
AED ve *AFE* birer
eşkenar üçgen



olduğuna göre
***m*(*EFB*) = α kaç derecedir?**

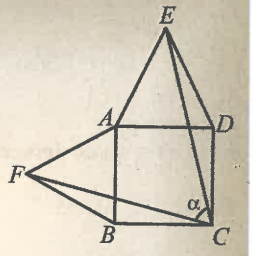
A) 10 **B)** 15 C) 20 D) 30 E) 45

30.
ABCD bir kare
ADE ve *AFB* birer
eşkenar üçgen
olduğuna göre
***m*(*AEF*) = α kaç derecedir?**



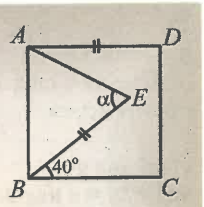
A) 10 **B)** 15 C) 18
D) 30 E) 36

31.
ABCD bir kare
ADE ve *AFB* birer
eşkenar üçgen
olduğuna göre
***m*(*FCE*) = α kaç derecedir?**



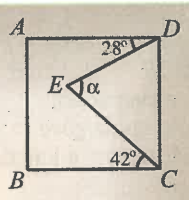
A) 15 B) 30 C) 45
D) 48 **E)** 60

32.
$ABCD$ bir kare
$m(EBC) = 40°$
$|BE| = |AD|$
olduğuna göre
$m(BEA) = \alpha$ kaç derecedir?



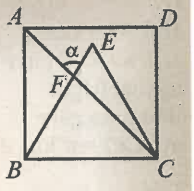
A) 40 B) 45 **C) 65** D) 70 E) 75

33.
$ABCD$ bir kare
$m(ADE) = 28°$
$m(ECB) = 42°$
olduğuna göre
$m(DEC) = \alpha$ kaç derecedir?



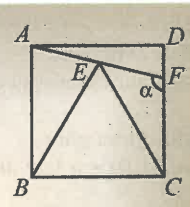
A) 70 B) 72 C) 74 D) 76 E) 78

34.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
$AC \cap BE = \{F\}$
olduğuna göre
$m(AFE) = \alpha$ kaç derecedir?



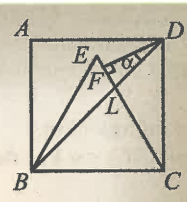
A) 60 B) 65 C) 70 **D) 75** E) 90

35.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
$AE \cap DC = \{F\}$
olduğuna göre
$m(AFC) = \alpha$ kaç derecedir?



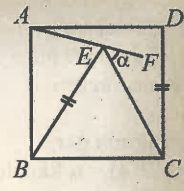
A) 100 **B) 105** C) 108 D) 120 E) 135

36.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
$DF \perp EC$
olduğuna göre
$m(FDB) = \alpha$ kaç derecedir?



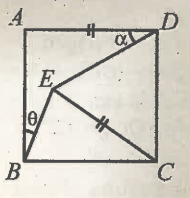
A) 5 B) 10 **C) 15** D) 20 E) 30

37.
$ABCD$ bir kare
$|BE| = |DC|$
A, E, F noktaları doğrusal
olduğuna göre
$m(CEF) = \alpha$ kaç derecedir?



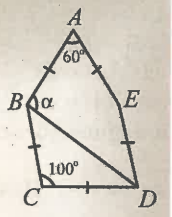
A) 15 B) 30 **C) 45** D) 60 E) 75

38.
$ABCD$ bir kare
$|CE| = |AD|$
$m(ADE) = \alpha°$
$m(ABE) = \theta°$
olduğuna göre
$\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 75

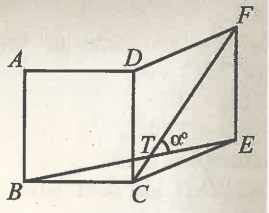
39.
$ABCDE$ bir beşgen
$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA|$
$m(EAB) = 60°$
$m(BCD) = 100°$
olduğuna göre
$m(ABD) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 120 B) 112 C) 110 D) 108 **E) 100**

40.
$ABCD$ bir kare
$CEFD$ bir eşkenar dörtgen
$BE \cap CF = \{T\}$
$m(ETF) = \alpha°$

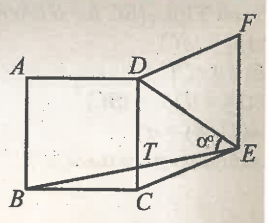
olduğuna göre α kaçtır?



A) 22,5 B) 30 **C) 45** D) 60 E) 67,5

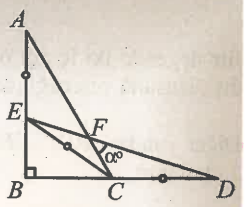
41.
$ABCD$ bir kare
$CEFD$ bir eşkenar dörtgen
B, T, E noktaları doğrudaş
$m(DEB) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?



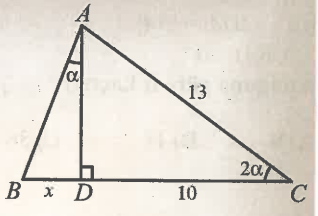
A) 30 B) 36 **C) 45** D) 60 E) 75

42.
ABC ve EBD birer dik üçgen
$AB \perp BD$
$AC \cap ED = \{F\}$
$|AE| = |EC| = |CD|$
$m(DFC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



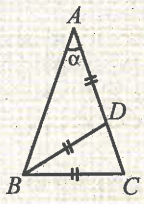
A) 15 B) 22,5 C) 30 **D) 45** E) 60

43.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(BAD) = \alpha$
$m(C) = 2\alpha$
$|BD| = x$ br
$|DC| = 10$ br
$|CA| = 13$ br
olduğuna göre x kaçtır?



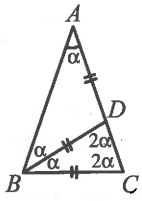
A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

Soru Tipi. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC|$
$D \in [AC]$
$|AD| = |DB| = |BC|$
$m(CAB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 22,5 B) 30 C) 36 D) 40 E) 45

Çözümü: $|AD| = |AB|$ olduğundan ABD açısının ölçüsü de α olmalıdır.



Bir üçgende iki iç açı ölçüsünün toplamı üçüncü açının dış ölçüsünü vereceğinden $m(CDB) = 2\alpha$ olur.

Diğer yandan $|BD| = |BC|$ diye DCB açısının da ölçüsü 2α bulunur.

Son olarak, $|AB| = |AC|$ verildiğinden ve C açısının ölçüsü 2α olduğundan ABC açısının ölçüsü de 2α olmalıdır. Buradan $m(DBC) = \alpha$ bulunur.

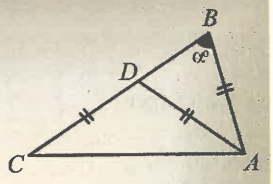
İster ABC üçgeninde isterseniz DBC üçgeninde iç açıların ölçülerini toplar 180° ye eşitlerseniz

$$5\alpha = 180$$

yani $\alpha = 36$ bulursunuz.

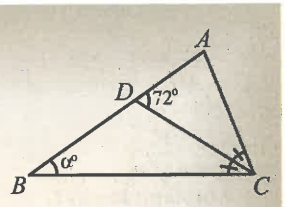
Doğru cevap: C.

44.
ABC bir üçgen
$|CA| = |CB|$
$|CD| = |DA| = |BA|$
$m(CBA) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



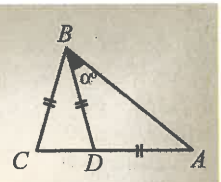
A) 9 B) 18 C) 36 D) 45 E) 72

45.
ABC bir üçgen
$|BA| = |BC|$
CD iç açıortay
$m(ADC) = 72^\circ$
$m(B) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



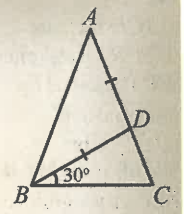
A) 16 B) 18 C) 20 D) 32 E) 36

46.
$|BC| = |BD| = |DA|$
$m(CBA) = 63^\circ$
$m(DBA) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

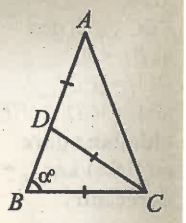
47.
ABC ve ABD ikizkenar üçgen
$m(DBC) = 30^\circ$
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |BD|$
olduğuna göre
$m(BDA)$ kaç derecedir?



A) 95 B) 100 C) 105 D) 110 E) 115

1999ÖSS2

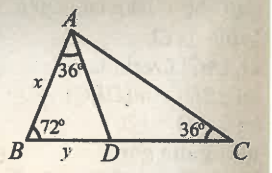
48.
ABC ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$|BC| = |CD| = |DA|$
olduğuna göre
***m*(*ABC*) kaç derecedir?**



A) 45 B) 60 **C) 72** D) 75 E) 80

1986 ÖYS

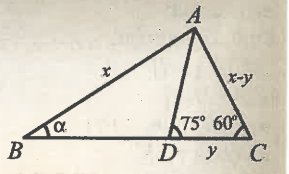
49.
ABC üçgen
$m(ABD) = 72°$
$m(DAB) = m(DCA) = 36°$
$|AB| = x$ birim
$|BD| = y$ birim
olduğuna göre $|AC|$'nin
***x* ve *y* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**



A) $2y$ B) $\frac{3x}{y}$ C) $x+y$ D) $2x-y$ E) $3y-x$

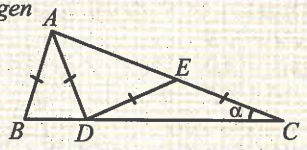
1983 ÖYS

50.
ABC bir üçgen
$m(ADC) = 75°$
$m(BCA) = 60°$
$|AB| = x$ br
$|DC| = y$ br
$|AC| = x - y$ br
olduğuna göre *m*(*ABC*) = α kaç derecedir?



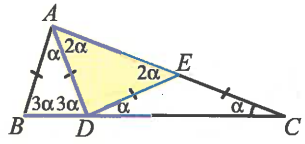
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

Örnek. *ABC ikizkenar üçgen*
$|CA| = |CB|$
$|AB| = |AD| = |DE| = |EC|$
$m(ACB) = \alpha°$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 15 B) 22,5 C) $\frac{180}{7}$ D) 30 E) $\frac{360}{7}$

Çözüm: $|ED| = |EC|$ diye hemen *EDC* açısının ölçüsüne de α diyelim.

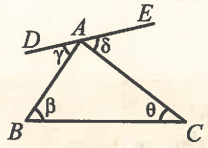


EDC üçgeninde dış açı teoreminden $m(DEA) = 2\alpha$ bulunur. $|AD| = |DE|$ olduğundan *EAD* açısının ölçüsü de 2α bulunur. Şimdi de *ADC* üçgeninde dış açı teoreminden $m(ADB) = 3\alpha$ bulunur. $|AB| = |AD|$ diye *ABC* açısının ölçüsüne de 3α deriz. Son olarak $|CA| = |CB|$ diye $m(CAB) = 3\alpha$ olmalıdır. O halde $m(DAB) = \alpha$ olmalıdır. İster *ABC* üçgeninde isterseniz *ABD* üçgeninde iç açıların ölçülerini toplarsanız $7\alpha = 180$ yani $\alpha = 180/7$ çıkar. *ADE* üçgeninin neden boyalı olduğu da aşağıda!

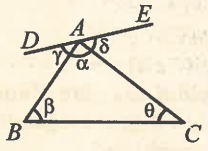
Doğru cevap: C.

Tecrübeyle sabit ki durumu zayıf olan çoğu öğrenci yukardaki çözümde *CAD* açısının ölçüsünü 2α bulduktan sonra *ADB* açısının ölçüsünün 3α olduğunu görmekte zorlanıyor. Onlara aşağıdaki eşitliği unutmamalarını öneririm.

DE doğrusu ABC üçgeninin
A köşesinden geçiyor olsun.
$m(ABC) = \beta$
$m(BCA) = \theta$
$m(BAD) = \gamma$
$m(CAE) = \delta$
ise $\beta + \theta = \gamma + \delta$ *eşitliği geçerlidir.*



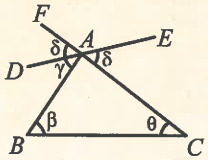
Nedeni oldukça basit.
$m(CAB) = \alpha$ olsun.
Hem $\alpha + \beta + \theta = 180°$ hem de
$\alpha + \gamma + \delta = 180°$ olduğundan
$\alpha + \beta + \theta = \alpha + \gamma + \delta$ olup
α'lar sadeleştirilirse
$\beta + \theta = \gamma + \delta$ eşitliğine erişilir.



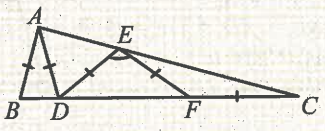
Teoremin geometrik kanıtı daha çok haz verir. *CA*'yı *A* yönünde uzatıp üzerinde bir *F* noktası alalım. *EAC* ile *DAF* ters açılar olduğundan eştir yani $m(DAF) = \delta$ olur. *ABC* üçgeninde dış açı teoreminden bir çırpıda

$$\beta + \theta = \gamma + \delta$$

eşitliğine ulaşılır.

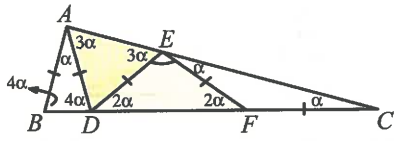


Örnek. *ABC ikizkenar üçgen*
$|CA| = |CB|$
$|AB| = |AD| = |DE|$
$|DE| = |EF| = |FC|$
olduğuna göre
$m(FED)$ *kaç derecedir?*



A) 60 B) 75 C) 80 D) 90 E) 100

Çözüm: $m(C) = \alpha$ olsun. $|EF| = |FC|$ olduğundan CEF açısının ölçüsü de α olur.



EFC üçgeninde dış açı teoreminden $m(EFB) = 2\alpha$ bulunur. $|EF| = |ED|$ olduğundan EDF açısının ölçüsü de 2α dır. Şimdi EDC üçgeninde dış açı teoremini gördün, gördün, göremediysen yukarda anlattığımız kurala göre

$$m(AED) + \alpha = 2\alpha + 2\alpha$$

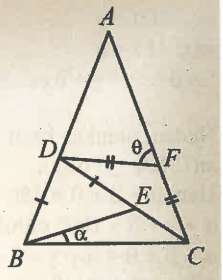
eşitliğinden $m(AED) = 3\alpha$ bulunur. $|AD| = |DE|$ olduğundan aynı zamanda $m(EAD) = 3\alpha$ olur. Ya ADC üçgeninde dış açı teoremi ya da yukarda verdiğimiz eşitlik gereği

$$m(ADB) + 2\alpha = 3\alpha + 3\alpha$$

eşitliğinden $m(ADB) = 4\alpha$ olur. $|AB| = |AD|$ olduğundan ABC açısının ölçüsü de 4α dır. Diğer yandan $|CA| = |CB|$ verildiğinden $m(DAB) = \alpha$ olur. Bu da ABD üçgeninde iç açı ölçüleri toplamından $9\alpha = 180°$ olduğu anlamına gelir. O halde EDF üçgeninde E açısının ölçüsü 5α yani $100°$ olmalıdır.

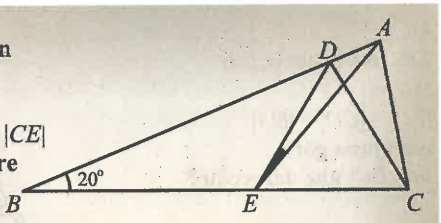
Doğru cevap: E.

51.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$|DB| = |DE|$
$|FD| = |FC|$
$m(EBC) = \alpha$
$m(DFA) = \theta$
olduğuna göre θ'nın α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



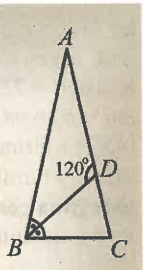
A) 5α **B)** 4α C) 3α D) $2\alpha + 30$ E) $2\alpha + 45$

52.
ABC bir üçgen
$m(B) = 20°$
$|BA| = |BC|$
$|CA| = |CD| = |CE|$
olduğuna göre
$m(DEA)$ **kaç derecedir?**



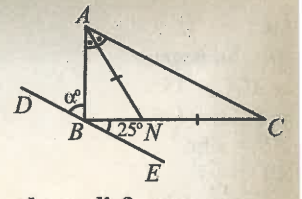
A) 5 **B)** 10 C) 15 D) 20 E) 25

53.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
D, $[AC]$ üzerinde
$m(ABD) = m(DBC)$
$m(BDA) = 120°$
olduğuna göre
$m(CAB)$ **kaç derecedir?**



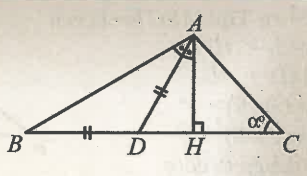
A) 15 **B)** 20 C) 25 D) 30 E) 35
1989 ÖSS

54.
ABC üçgen
D, B, E doğrusal
$[AC] \,//\, [DE]$
$|AN| = |NC|$
$m(NAB) = m(CAN)$
$m(NBE) = 25°$
olduğuna göre $m(DBA)$ **kaç derecedir?**



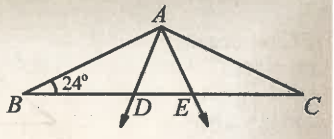
A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 **E)** 50
1990 ÖYS

55.
ABC üçgen
$AH \perp BC$
$m(DAB) = m(HAD)$
$m(BAC) = 100^\circ$
$|AD| = |BD|$
olduğuna göre $m(C)$ kaç derecedir?



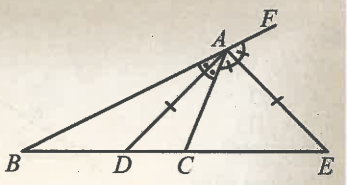
A) 30 B) 40 C) 45 **D)** 50 E) 60

56.
ABC ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(DAB) = m(EAD)$
$m(EAD) = m(CAE)$
$m(ABC) = 24^\circ$
olduğuna göre $m(DAB)$ kaç derecedir?



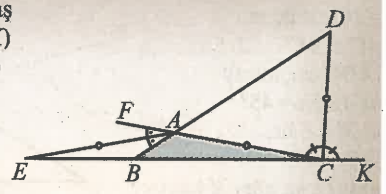
A) 36 B) 38 C) 40 D) 42 **E)** 44
1990 ÖYS

57.
ABC üçgen
$m(BCA) > 90^\circ$
$m(DAB) = m(CAD)$
$m(EAC) = m(FAE)$
$|AD| = |AE|$
olduğuna göre
$m(ABC) + m(ACE)$ toplamı kaç derecedir?



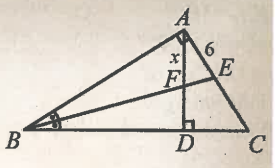
A) 60 B) 75 **C)** 90 D) 135 E) 150
2001 ÖSS

58.
E, B, C, K doğrudaş
$m(ACD) = m(DCK)$
$m(FAE) = m(BAE)$
$|EA| = |AC| = |CD|$
olduğuna göre
$m(BCA)$
kaç derecedir?



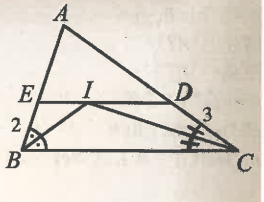
A) 9 B) 10 C) 11 **D)** 12 E) 15

59.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
BE iç açıortay
$|AE| = 6$ br
olduğuna göre $|AF| = x$ kaç br dir?



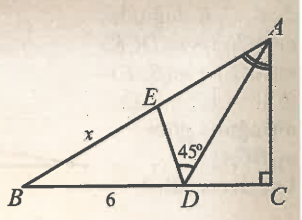
A) 5 **B)** 6 C) 7 D) 8 E) 9

60.
ABC bir üçgen
$ED \,//\, BC$
BI ve CI iç açıortay
$|BE| = 2$ br
$|CD| = 3$ br
olduğuna göre
$|ED|$ kaç br dir?



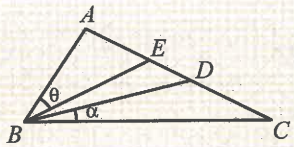
A) 4 **B)** 5 C) 6 D) 7 E) 8

61.
ABC bir üçgen
$AC \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$m(ADE) = 45°$
$|BD| = 6$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



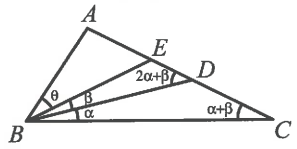
A) 4 B) 5 **C) 6** D) 8 E) 9

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|AB| = |AD|$
$|EB| = |EC|$
$m(ABE) = \theta°$
$m(DBC) = \alpha°$
olduğuna göre
θ'nın α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) 2α B) $3\alpha/2$ C) α D) $\alpha + 10°$ E) $\alpha + 20°$

Çözümü: EBD açısının ölçüsüne $\beta°$ diyelim. $|EB| = |EC|$ olduğundan C açısının ölçüsü $\alpha + \beta$ olur. Buradan da BDA açısının ölçüsü $2\alpha + \beta$ olduğunu anlarız. Diğer yandan $|AB| = |AD|$ verildiğinden ABD ile BDA açıları eş olmalıdır.

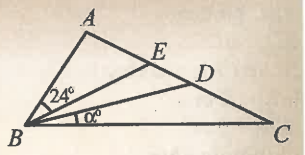


$$\theta + \beta = 2\alpha + \beta$$

eşitliğinden $\theta = 2\alpha$ çıkar.

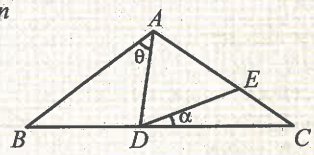
Doğru cevap: A.

62.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AD|$
$|EB| = |EC|$
$m(ABE) = 24°$
olduğuna göre
m(DBC) = α kaç derecedir?



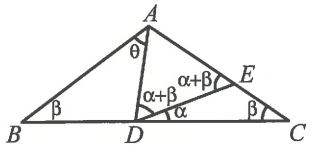
A) 10 **B)** 12 C) 15 D) 18 E) 24

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |AE|$
$m(DAB) = \theta°$
$m(CDE) = \alpha°$
olduğuna göre
θ'nın α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) 2α B) $3\alpha/2$ C) α D) $\alpha + 10°$ E) $\alpha + 20°$

Çözümü: ABC ikizkenar üçgeninin taban ölçülerine $\beta°$ diyelim. DEA açısının ölçüsü $\alpha + \beta$ olur. Diğer yandan $|AD| = |AE|$ verildiğinden ADE açısının ölçüsü de $\alpha + \beta$ olur.

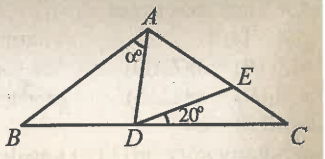


$$\theta + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$$

eşitliğinden $\theta = 2\alpha$ çıkar.

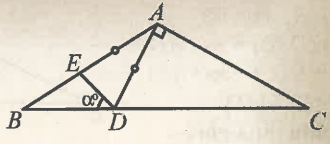
Doğru cevap: A.

63.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |AE|$
$m(EDC) = 20°$
olduğuna göre
m(DAB) = α kaç derecedir?



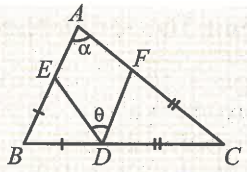
A) 20 B) 30 C) 35 **D)** 40 E) 45

64.
ABC bir üçgen
$CA \perp AD$
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |AE|$
olduğuna göre
m(DDE) = α kaç derecedir?



A) 20 B) 30 C) 35 D) 40 **E)** 45

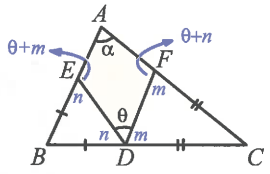
Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |BE|$
$|CD| = |CF|$
$m(CAB) = \alpha$
$m(EDF) = \theta$
olduğuna göre α *ile* θ
arasında geçerli olan bağıntı hangisidir?



A) $\alpha + 2\theta = 180$ B) $2\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha = \theta$
D) $\alpha + \theta = 90$ E) $2\alpha - \theta = 90$

Çözümü: İki çözüm vereceğiz ama ikincisi, birinci çözümü nasıl kısaltacağımıza dair olacak.

Birinci yol. *EBD* ve *DCF* ikizkenar üçgenlerinin taban açılarının ölçüsü sırasıyla n ve m olsun. İkizkenar bir üçgende taban açıları eş olduğundan o açıların dışları da eştir. Bu yüzden $m(AED) = \theta + m$ ve $m(DFA) = \theta + n$ olmalıdır. Şimdi *AEDF* dörtgeninde iç açıların ölçülerini toplayacağız:



$$\alpha + 3\theta + m + n = 360°$$

eşitliğine ulaşırız. Diğer yandan *CDB* bir doğru açı olduğundan

$$\theta + m + n = 180°$$

eşitliğine de sahibiz. m ve n değerlerinden kurtulmak için ilk denklemden ikincisini çıkartırsak

$$\alpha + 2\theta = 180°$$

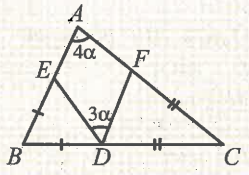
elde edilir.

İkinci yol. Bir dörtgenin herhangi iki iç açı ölçüsünün toplamı diğer iki açısının dış ölçülerinin toplamına eşit olduğunu kanıtlamıştık. Dolayısıyla $\alpha + \theta = m + n$ olur. $m + n$ toplamı *CDB* doğru açısının ölçüsünden $180° - \theta$ olduğundan $\alpha + \theta = 180° - \theta$ yani $\alpha + 2\theta = 180°$ olur.

Doğru cevap: A.

Bu soruya bir sonraki konumuzda çok şık bir çözüm daha verdik. Lütfen ona da bakınız.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |BE|$
$|CD| = |CF|$
$m(CAB) = 4\alpha°$
$m(EDF) = 3\alpha°$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22,5

Çözüm: Yukardaki soru tipinde

$$m(CAB) + 2 \cdot m(EDF) = 180$$

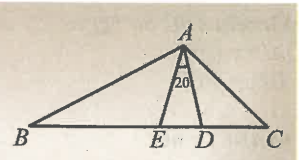
olduğunu kanıtlamıştık. Hemen değerleri yerlerine yazalım:

$$4\alpha + 2 \cdot 3\alpha = 180$$

eşitliğinden $10\alpha = 180$ yani $\alpha = 18$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

65.
ABC bir üçgen
$|AB| = |BD|$
$|AC| = |CE|$
$m(DAE) = 20°$

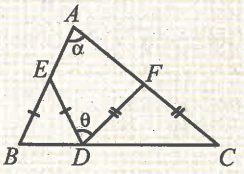


olduğuna göre $m(CAB)$ **kaç derecedir?**

A) 150 **B)** 140 C) 130 D) 120 E) 110

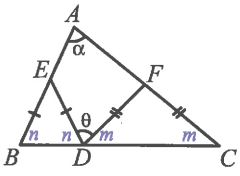
1994 ÖSS

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|EB| = |ED|$
$|FD| = |FC|$
$m(CAB) = \alpha$
$m(EDF) = \theta$
olduğuna göre α *ile* θ
arasında geçerli olan
bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha + 2\theta = 180$ B) $2\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha = \theta$
D) $\alpha + \theta = 90$ E) $2\alpha - \theta = 90$

Çözümü: *EBD* ve *FDC* ikizkenar üçgenlerinin taban ölçülerine sırasıyla n ve m diyelim.



Elimizde *ABC* üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$\alpha + m + n = 180$$

ve *CDB* doğru açısının ölçüsünden

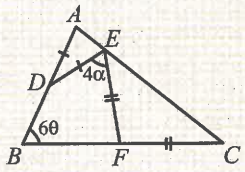
$$\theta + m + n = 180$$

eşitlikleri var. Buradan $\alpha = \theta$ olduğunu görmek sanırım işin en kolay kısmı.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = |DE|$
$|EF| = |FC|$

$m(ABC) = 6\theta°$
$m(FED) = 4\alpha°$



α ile θ birer tam sayı olduğuna göre α + θ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 40 E) 80

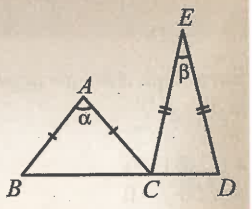
Çözüm: Yukarıdaki soru tipinde kanıtlandığı üzere
$$m(FED) = m(DBF)$$
yani $4\alpha = 6\theta$ olmalıdır. Buradan $\alpha : \theta = 3 : 2$ bulunur.

α ve θ değerleri pozitif olduğundan k bir pozitif tam sayı olmak üzere $\alpha = 3k$ ve $\theta = 2k$ diyebiliriz. Şu durumda $\alpha + \theta$ toplamının en küçük değeri demek $3k + 2k$ toplamının yani $5k$'nin en küçük değeri demektir. Bu da $k = 1$ için 5 olacaktır.

Doğru cevap: A.

66.
ABC ve *ECD* birer üçgen
B, C, D noktaları doğrudaş

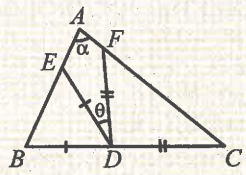
$|AB| = |AC|$
$|EC| = |ED|$
$m(CAB) = \alpha°$
$m(DEC) = \beta°$



olup $\alpha + \beta = 80$ olduğuna göre $m(ECA)$ kaç derecedir?

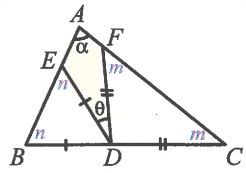
A) 20 **B)** 40 C) 50 D) 60 E) 80

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|DB| = |DE|$
$|DC| = |DF|$
$m(CAB) = \alpha$
$m(EDF) = \theta$
olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha + 2\theta = 180$ B) $2\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha = \theta$
D) $\alpha + \theta = 90$ E) $2\alpha - \theta = 90$

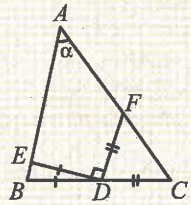
Çözümü: *BDE* ve *FDC* ikizkenar üçgenlerinin taban açılarının ölçülerine sırasıyla *n* ve *m* diyelim.



ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından
$$\alpha + m + n = 180°$$
ve *AEDF* dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından
$$\alpha + \theta + 180° - m + 180° - n = 360°$$
eşitliklerine sahibiz. İkinci denklemi $\alpha + \theta = m + n$ şeklinde düzenleyip bunu da ilk denklemde yerine yazarsak
$$2\alpha + \theta = 180°$$
eşitliğine ulaşırız.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|DB| = |DE|$
$|DF| = |DC|$
$ED \perp DF$
olduğuna göre CAB açısının ölçüsü kaç derecedir?

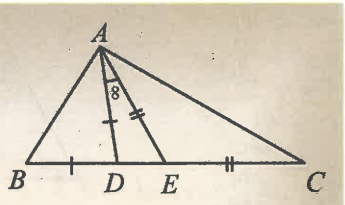


A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

Çözüm: Yukarıdaki soru tipinde $2\alpha + \theta = 180°$ olduğunu bulmuştuk. Bu soruda $\theta = 90°$ olarak verildiğinden eşitlik
$$2\alpha + 90° = 180°$$
halini alır. Buradan $\alpha = 45°$ olduğu rahatlıkla bulunabilir.

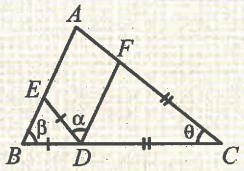
Doğru cevap: C.

67.
ABC bir üçgen
$|AD| = |BD|$
$|AE| = |EC|$
$m(EAD) = 8°$
ise $m(BAC)$ kaç derecedir?



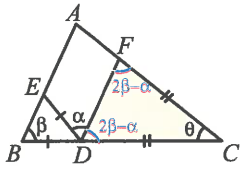
A) 98 **B) 94** C) 90 D) 86 E) 82

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|DB| = |DE|$
$|DC| = |CF|$
$m(EDF) = \alpha$
$m(ABC) = \beta$
$m(BCA) = \theta$
olduğuna göre α, β *ve* θ *arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\beta + \theta = \alpha + 180$
B) $\alpha + \beta + \theta = 180$
D) $4\beta + \theta = 2\alpha + 180$
E) $2\beta + \theta = 180 - \alpha$
C) $2\alpha + \theta = 3\beta - 90$

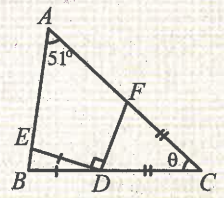
Çözümü: *BDE* bir ikizkenar üçgen olduğundan $m(ABC) = \beta$ ise $m(DEB) = \beta$ olur.



EBD üçgeninde dış açı teoreminden
$$m(EDC) = 2\beta$$
olması gerekir ki bu yüzden $m(FDC) = 2\beta - \alpha$ bulunur. *DCF* üçgeni de ikizkenar olduğundan $m(CFD) = 2\beta - \alpha$ olur. Geriye sadece *FDC* üçgeninde iç açıların ölçülerini toplamak kaldı.
$$2\beta - \alpha + 2\beta - \alpha + \theta = 180°$$
eşitliği düzenlenirse
$$4\beta + \theta = 2\alpha + 180°$$
eşitliğine ulaşılır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|DB| = |DE|$
$|CD| = |CF|$
$ED \perp DF$
$m(CAB) = 51°$
olduğuna göre BCA açısının ölçüsü kaç derecedir?

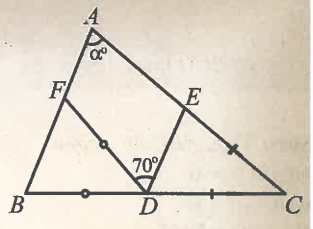


A) 48 B) 49 C) 50 D) 51 E) 52

Çözüm: Yukardaki soru tipinde $4\beta + \theta = 2\alpha + 180°$ olduğunu bulmuştuk. Bu soruda $\alpha = 90°$ olarak verildiğinden eşitlik
$$4\beta + \theta = 360°$$
halini alır. Diğer yandan $m(CAB) = 51°$ olarak verildiğinden *ABC* üçgeninde $m(B) + m(C) = 129°$ yani
$$\beta + \theta = 129°$$
eşitliğine de sahibiz. İlk eşitlikten ikinci eşitlik çıkartılırsa $3\beta = 231°$ yani $\beta = 77°$ bulunur. Bu değer elimizdeki eşitliklerden herhangi birinde yerine yazılırsa $\theta = 52$ olarak bulunur.

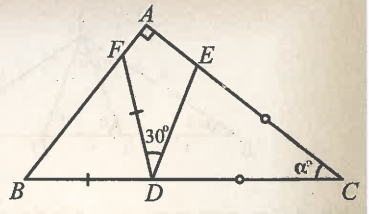
Doğru cevap: E.

68.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DF|$
$|CD| = |EC|$
$m(FDE) = 70°$
olduğuna göre
$m(BAC) = \alpha$
kaç derecedir?



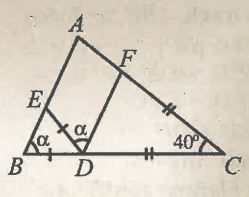
A) 40 B) 55 C) 70 D) 90 E) 110

69.
ABC bir üçgen
$BA \perp AC$
$|BD| = |DF|$
$|CD| = |CE|$
$m(FDE) = 30°$
olduğuna göre
$m(BCA) = \alpha$
kaç derecedir?



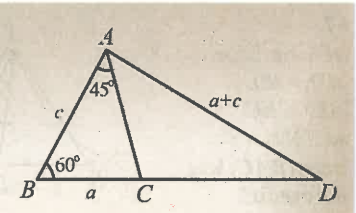
A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

70.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|DB| = |DE|$
$|CD| = |CF|$
$m(BCA) = 40°$
olduğuna göre
$m(ABC) = m(EDF) = \alpha$ kaç derecedir?



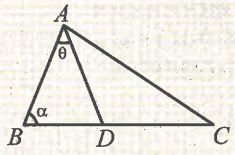
A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

71.
ABC bir üçgen
$D \in [BC$
$m(CAB) = 45°$
$m(B) = 60°$
$|BC| = a$ br
$|AB| = c$ br
$|AD| = a + c$ br
olduğuna göre $m(D)$ kaç derecedir?



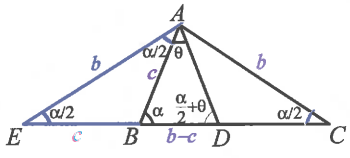
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 37,5 E) 45

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = \alpha$
$m(BAD) = \theta$
$3\alpha + 4\theta = 360°$
$|AB| + |BD| = |AC|$
olduğuna göre
$m(ACB)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\frac{1}{2}\alpha$ B) $15 + \alpha$ C) $30 - \alpha$ D) α E) 2α

Çözümü: $|AC| = b$ br ve $|AB| = c$ br olsun. Soruda verilene göre $|BD| = b - c$ br olur.



$[DB]$ doğru parçasını B yönünde c br uzatırsak, ABE ikizkenar üçgeni oluşur.

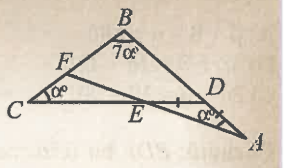
$$m(AEB) = m(EAB) = \frac{1}{2}\alpha$$

olur. $3\alpha + 4\theta = 360°$ eşitliğinden $m(ADE)$ hesaplanırsa, AED üçgeninin de ikizkenar olduğu görülür. O halde $|EA| = b$ br, dolayısıyla EAC üçgeni de ikizkenar oldu. Sonuçta $m(ACB) = \frac{1}{2}\alpha$ bulundu.

Doğru cevap: A.

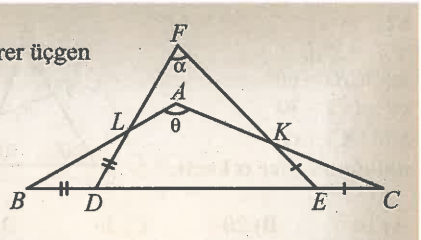
Biraz da karışık soru çözüp, ikiz kenar-ikiz açı meselesine noktayı koyalım.

72.
$|DE| = |DA|$
$m(CBA) = 7\alpha°$
$m(DCB) = m(BAF) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 5 **B) 18** C) 20 D) 30 E) 36

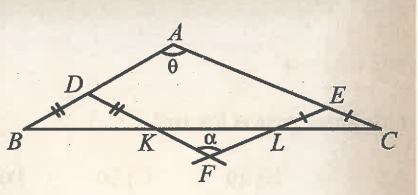
73.
ABC ve DEF birer üçgen
$|BD| = |DL|$
$|CE| = |EK|$
$m(EFD) = \alpha$
$m(CAB) = \theta$



olduğuna göre α'nın θ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

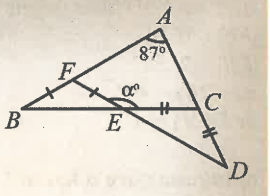
A) θ/3 B) θ/2 C) $\pi - \theta$ **D)** $2\theta - \pi$ E) $2\pi - 3\theta$

74.
ABC bir üçgen
$DK \cap EL = \{F\}$
$|BD| = |DK|$
$|CE| = |EL|$
$m(EFD) = \alpha$
$m(CAB) = \theta$
olduğuna göre α'nın θ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



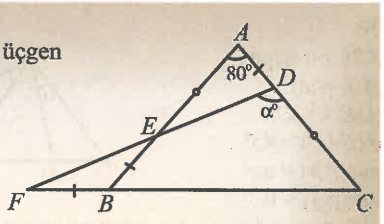
A) θ B) 2θ C) $\pi - \theta$ D) $2\pi - \theta$ E) θ/2

75.
ABC ve AFD birer üçgen
$|BF| = |FE|$
$|DC| = |CE|$
$m(DAB) = 87°$
$m(CEF) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



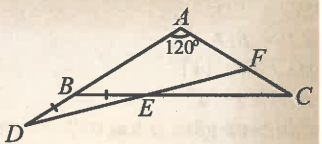
A) 139 B) 140 C) 143 D) 146 **E)** 149

76.
ABC ve DFC birer üçgen
$|FB| = |BE| = |AD|$
$|AE| = |DC|$
$m(CAB) = 80°$
$m(CDF) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



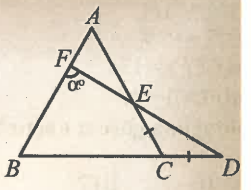
A) 100 **B)** 105 C) 110 D) 120 E) 135

77.
ABC ikizkenar üçgen
$m(CAB) = 120°$
$|AB| = |AC|$
$|DB| = |BE|$
olduğuna göre *m(DFA)* kaç derecedir?



A) 30 B) 35 C) 40 **D)** 45 E) 50
1997 ÖSS

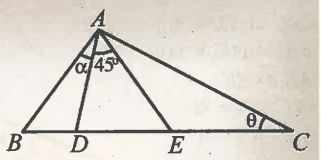
78.
ABC eşkenar üçgen
$DE \cap AB = \{F\}$
$|EC| = |CD|$
olduğuna göre
m(DFB) $= \alpha°$
olduğuna göre α **kaçtır?**



A) 110 B) 105 C) 100 D) 95 **E)** 90
1997 ÖYS

79.

$|ABC|$ bir üçgen
$|AB| = |AE|$
$|CA| = |CD|$
$m(EAD) = 45°$
$m(DAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$

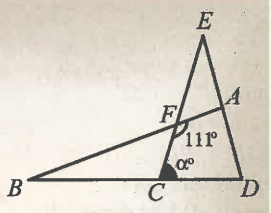


olduğuna göre $\alpha + \theta$ toplamı kaç derecedir?

A) 75 B) 70 C) 60 **D)** 45 E) 30

80.

$|ABD|$ ve $|ECD|$ birer üçgen
$|EC| = |ED|$
$|BA| = |BD|$
$m(CFA) = 111°$
$m(DCE) = \alpha°$

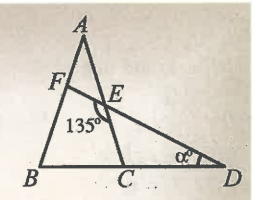


olduğuna göre α kaçtır?

A) 40 B) 71 C) 74 **D)** 83 E) 85

81.

$|AC| = |AB|$
$|DF| = |DB|$
$m(CEF) = 135°$
$m(FDC) = \alpha°$

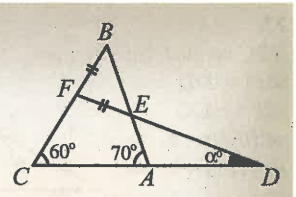


olduğuna göre α kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 25 **D)** 30 E) 45

82.

$|FB| = |FE|$
$m(DCB) = 60°$
$m(BAC) = 70°$
$m(FDC) = \alpha°$

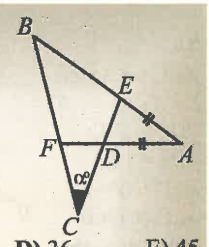


olduğuna göre α kaçtır?

A) 10 **B)** 20 C) 30 D) 40 E) 50

83.

$|AE| = |AD|$
$|BE| = |EC|$
$|BF| = |FA|$
$m(ECB) = \alpha°$

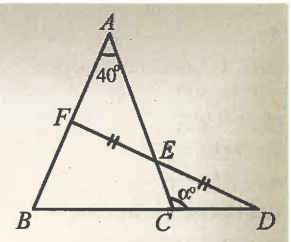


olduğuna göre α kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 30 **D)** 36 E) 45

84.

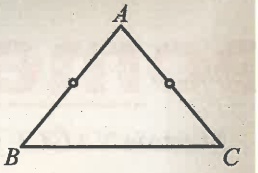
$|ABC|$ ve $|FBD|$ birer üçgen
$|FE| = |ED|$
$|FB| = 2 \cdot |EC|$
$m(CAB) = 40°$
$m(DCA) = \alpha°$



olduğuna göre α kaçtır?

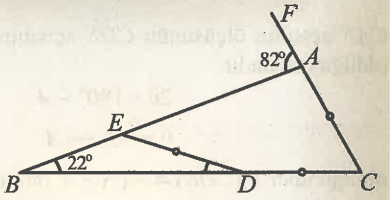
A) 100 B) 105 **C)** 110 D) 120 E) 135

85.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$42° < m(A) < 126°$
olduğuna göre $m(B)$'nin derece cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri, en küçük tam sayı değerinden kaç fazladır?



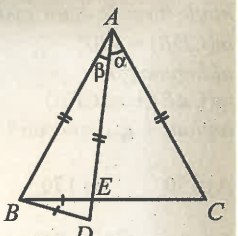
A) 38 B) 39 **C) 40** D) 41 E) 42

86.
ABC bir üçgen
C, A, F doğrudaş
$|ED| = |DC| = |CA|$
$m(B) = 22°$
$m(BAF) = 82°$
olduğuna göre $m(BDE)$ kaç derecedir?



A) 14 **B) 16** C) 18 D) 20 E) 22

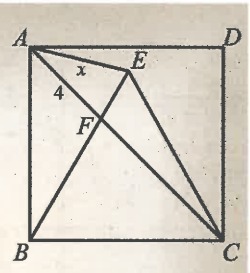
87.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AD| = |AC|$
$|BE| = |BD|$
$m(CAD) = \alpha$
$m(BAD) = \beta$
olduğuna göre α ile β arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha = \beta$ **B) $\alpha = 2\beta$** C) $\alpha = 3\beta$
D) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ E) $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

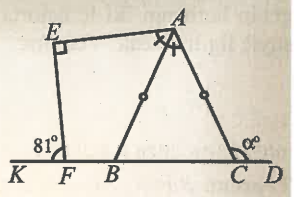
88.
$ABCD$ bir kare
EBC bir eşkenar üçgen
$AC \cap BE = \{F\}$
$|AF| = 4$ br
$|AE| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



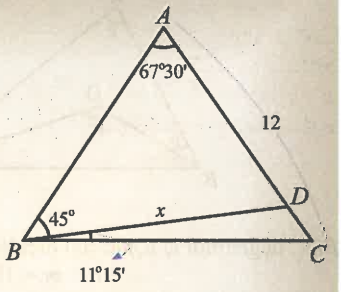
A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{15}$ **C) 4** D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

89.
ABC bir ikizkenar üçgen
K, F, B, C, D doğrudaş
$|AB| = |AC|$
$AE \perp EF$
$m(EAB) = m(BAC)$
$m(EFK) = 81°$
$m(ACD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 111 B) 114 **C) 117** D) 120 E) 123

90.
ABC bir üçgen
$m(A) = 67°30'$
$m(ABD) = 45°$
$m(DBC) = 11°15'$
$|AC| = 12$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 10 B) 11
C) 12 D) 13
E) 14

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Açıortayların Açıları

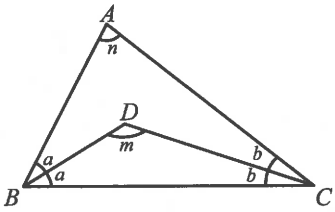
Dersimizin bu sayfasında, üçgende açı sorularında sıkça karşılaşacağımız birkaç soruyu modelleştirip, ezberlenesi bir formül haline getireceğiz. Bu formülleri belki oturup ezberlemeyeceğiz ama o kadar sık kullanacağız ki kafamıza kazınacaklar!

İki İç Açıortayın Belirttiği Açı. İlk teoremimiz bir üçgenin herhangi iki iç açıortayının belirttiği açının ölçüsüyle ilgili olacak. Verelim:

Teorem. *Bir üçgenin iki iç açıortayının belirttiği geniş açının ölçüsü, üçgenin kullanılmayan açısının ölçüsünün yarısının 90° fazlasıdır.*

Kanıt: İki farklı şekilde kanıtlayacağız. Birincisi de kolay olmasına rağmen ikincinin şıklığına mutlaka bir göz atın.

Birinci yol. Şeklimiz bir üçgen, bir de içbükey dörtgenden oluşmaktadır. Her ikisinde de ne yapacağımızı biliyoruz.



BDC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından,

$$a + b + m = 180^\circ$$

$ABDC$ içbükey dörtgeninden de

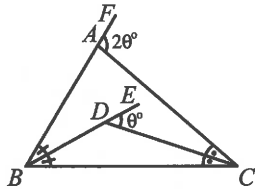
$$a + b + n = m$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkartılırsa

$$m - n = 180^\circ - m$$
$$2m = 180^\circ + n$$

dolayısıyla da $m = 90^\circ + \dfrac{n}{2}$ bulunur.

İkinci yol. BD ve BA doğru parçalarını şekildeki gibi uzatalım.



CAF açısının ölçüsünün CDE açısının ölçüsünün 2 katı olduğu ortadadır.

$$2\theta = 180^\circ - A$$
$$\theta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A$$

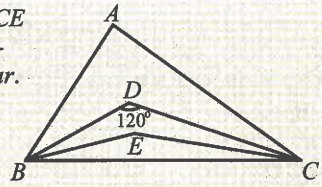
olduğundan $m(CDB) = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ bulunur.

Kanıtımız bitti. Burada küçük ama önemli bir ayrıntıya değineceğiz. Bulduğumuz

$$m(CDB) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}A$$

eşitliği CDB açısının her halükarda bir geniş açı olacağı anlamına gelir. Hem ilerki derslerimizde hem de bu derste bu ayrıntıya değineceğiz, lütfen kulak ardı etmeyin!

Örnek. *BD ve CD doğruları ABC üçgeninde, BE ve CE doğruları da DBC üçgeninde birer iç açıortaydır. $m(CDB) = 120^\circ$ olduğuna göre $m(CAB) + m(CEB)$ toplamı kaç derecedir?*



A) 150 B) 170 C) 190 D) 210 E) 230

Çözüm: Öğrendiğimiz formülü iki kere uygulayacağız. $120 = 90 + \frac{1}{2}m(A)$ eşitliğinden

$$m(A) = 60^\circ,$$

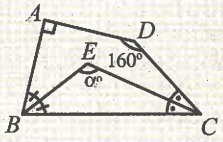
$m(E) = 90^\circ + \frac{1}{2}(120^\circ)$ eşitliğinden de

$$m(E) = 150^\circ$$

olarak bulunur. O halde sorumuzun cevabı 60 + 150 = 210 olmalıdır.

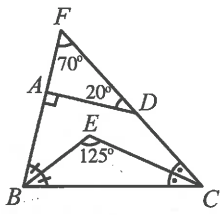
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
BE ve CE birer iç açıortay
DA ⊥ AB
m(CDA) = 160°
m(CEB) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 115 B) 120 C) 125 D) 130 E) 135

Çözüm: Daha üçgeni halletmeden bu dörtgen sorusu da nerden çıktı demeyin. Ufak bir alicengiz oyunu yapacağız.



BA ve *CD* kenarlarını şekildeki gibi uzatarak *FBC* üçgenini oluşturalım. *m(CFB)* = 70° olduğundan, formül gereği

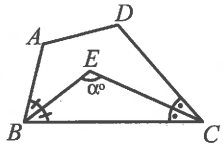
$$m(CEB) = 90° + \tfrac{1}{2}(70°) = 125°$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

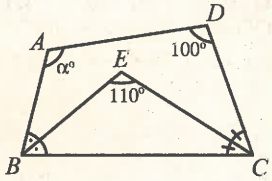
Son çözdüğümüz soruyu tüm dörtgenler için genellemek mümkündür. Şöyle ki:

Bir dörtgenin komşu iki iç açıortayının belirttiği açının ölçüsü kullanılmayan açıların ölçüleri toplamının yarısıdır.



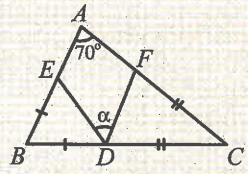
Yani şekle göre; $m(E) = \dfrac{m(A)+m(D)}{2}$.

1.
ABCD bir dörtgen
BE ve *CE* birer iç açıortay
m(BEC) = 110°
m(CDA) = 100
m(DAB) = α°
olduğuna göre
α kaçtır?



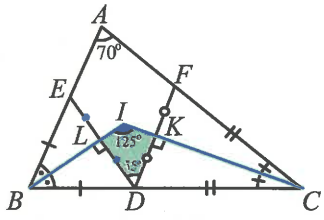
120

Örnek. *ABC bir üçgen*
|BD| = |BE|
|CD| = |CF|
m(CAB) = 70°
m(EDF) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm: *EBD* ve *DCF* üçgenleri ikizkenar olduğundan, bu üçgenlerin tepelerinden indirilen yükseklikler açıortay olacaktır.



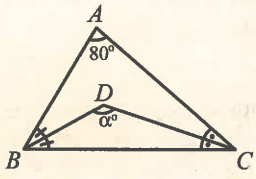
Bu açıortayların kesim noktasına *I* diyelim.

$$m(CIB) = 90 + \frac{70}{2} = 125$$

Şimdi *DKIL* dörtgeninin *K* ve *L* açılarının dik olduğunu görürsek *D* ve *I* açılarının toplamının 180° olması gerektiğini anlarız. Şu durumda α = 180 – 125 = 55 olarak bulunur.

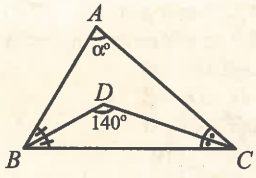
Doğru cevap: A.

2.
ABC bir üçgen
BD ve *CD* birer iç açıortay
m(CAB) = 80°
m(CDB) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



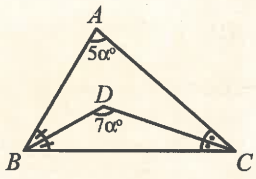
130

3.
ABC bir üçgen
BD ve *CD* birer iç açıortay
m(CDB) = 140°
m(CAB) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



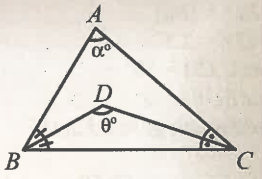
100

4.
ABC bir üçgen
BD ve *CD* birer iç açıortay
m(CAB) = 5α°
m(CDB) = 7α°
olduğuna göre α kaçtır?



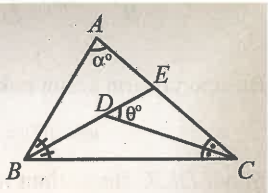
20

5.
ABC bir üçgen
BD ve CD birer iç açıortay
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(CDB) = \theta^\circ$
$60 < \alpha < 100$
olduğuna göre θ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



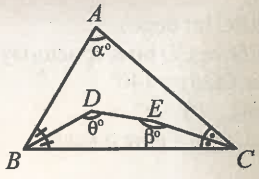
A) 18 **B)** 19 C) 20 D) 39 E) 40

6.
ABC bir üçgen
BD ve CD birer iç açıortay
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(CDE) = \theta^\circ$
olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



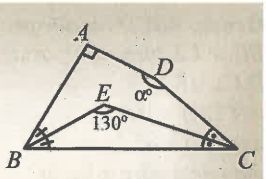
A) $\alpha + \theta = 180$ B) $2\alpha + \theta = 180$ **C)** $\alpha + 2\theta = 180$
D) $3\alpha + \theta = 180$ E) $2\alpha + 2\theta = 180$

7.
ABC bir üçgen
BD ve CE birer iç açıortay
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(CED) = \beta^\circ$
$m(EDB) = \theta^\circ$
$\beta + \theta = 310$
olduğuna göre α kaçtır?



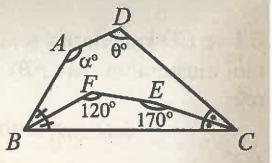
A) 20 B) 40 C) 60 **D)** 80 E) 100

8.
$ABCD$ bir dörtgen
BE ve CE birer iç açıortay
$m(CEB) = 130^\circ$
$m(CDA) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



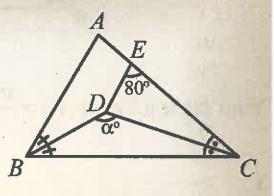
A) 130 B) 140 C) 150 D) 160 **E)** 170

9.
$ABCD$ bir dörtgen
BF ve CE birer iç açıortay
$m(CEF) = 170^\circ$
$m(EFB) = 120^\circ$
$m(CDA) = \theta^\circ$
$m(DAB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α + θ toplamı kaçtır?



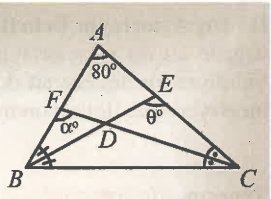
A) 200 B) 210 **C)** 220 D) 230 E) 240

10.
ABC bir üçgen
BD ve CD birer iç açıortay
$DE \,//\, BA$
$m(CED) = 80^\circ$
$m(CDB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



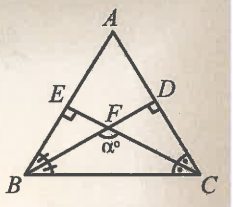
A) 105 B) 120 C) 125 **D)** 130 E) 135

11.
ABC bir üçgen
BE ve CF birer iç açıortay
$m(CAB) = 80°$
$m(CFB) = \alpha°$
$m(CEB) = \theta°$
olduğuna göre
$\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



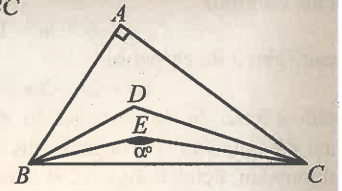
A) 180 B) 195 C) 200 D) 205 **E)** 210

12.
ABC bir üçgen
BD ve CE birer iç açıortay
$BD \perp CA$
$CE \perp AB$
$m(CFB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



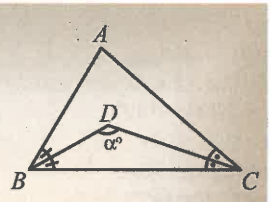
A) 75 B) 90 C) 105 **D)** 120 E) 135

13.
BD ve CD doğruları ABC üçgeninde, BE ve CE doğruları da DBC üçgeninde birer iç açıortaydır.
$CA \perp AB$
$m(CEB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



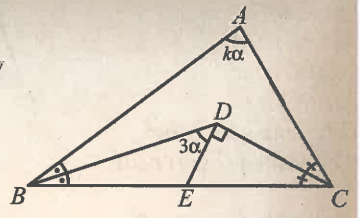
A) 152,5 B) 155 **C)** 157,5 D) 160 E) 162,5

14.
ABC bir üçgen
BD ve CD birer iç açıortay
$m(CDB) = \alpha°$
olduğuna göre α aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?



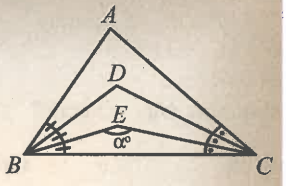
A) 90 B) 91 C) 144 D) 178 E) 179

15.
ABC bir üçgen
BD ve CD iç açıortay
$CD \perp DE$
$m(BDE) = 3\alpha$
$m(A) = k\alpha$
olduğuna göre k kaçtır?



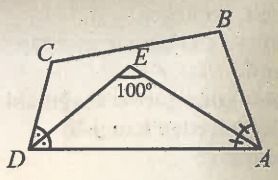
A) 3 B) 4 C) 5 **D)** 6 E) 9

16.
ABC bir üçgen
ABD, DBE, EBC eş açılar
ACD, DCE, ECB eş açılar
$m(CEB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



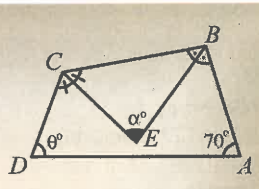
A) 29 B) 30 **C)** 59 D) 60 E) 61

17.
$ABCD$ dörtgen
DE ve AE iç açıortay
$m(DEA) = 100°$
$m(C) - m(B) = 20°$
olduğuna göre
$m(C)$ kaçtır?



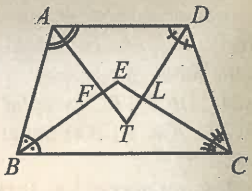
A) 70 B) 80 C) 90 **D) 110** E) 120

18.
$ABCD$ dörtgen
CE ve BE açıortay
$m(BAD) = 70°$
$m(ADC) = \theta°$
$m(BEC) = \alpha°$
olduğuna göre α'nın
θ cinsinden değeri nedir?



A) $\frac{\theta+70}{2}$ B) $\frac{70-\theta}{2}$ C) $\theta+70$ D) $70-\theta$ E) 110

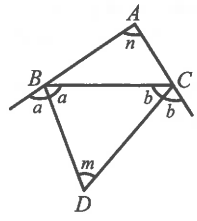
19.
$ABCD$ dörtgen
CF, BF, DE, AE açıortay
$m(BEC) = 110°$
$m(DTA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 50 B) 60 **C) 70** D) 85 E) 110

İki Dış Açıortayın Belirttiği Açı. Bir önceki konuda bir üçgene ait iki iç açıortayın belirttiği açıyı incelemiştik. Şimdiyse bir üçgene ait iki dış açıortayın belirttiği açıyı inceleyeceğiz. İlgili teoremi verip, konuya girelim.

Teorem. *Bir üçgenin iki dış açıortayının belirttiği dar açı, üçgenin kullanılmayan açısının yarısıyla tümlerdir.*

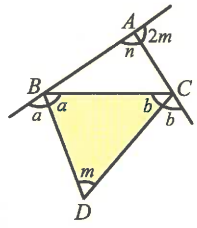


Yani yandaki şekle göre:

$$m = 90° - \frac{n}{2}.$$

Kanıt: Yine iki farklı kanıt sunacağız.

Birinci yol. Alttaki şekilden takip edelim.



ABC üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından

$$180° - 2a + 180° - 2b + n = 180°$$

ve BDC üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından

$$a + b + m = 180°$$

elde edilir. İkinci eşitlikten $a + b$ değeri çekilerek birinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$m = 90° - \frac{n}{2}$$

eşitliğine ulaşılır. Yazması kolay ama işlemler o kadar sıkıcıdır ki, siz gelin ikinci yolu dinleyin.

İkinci yol. BDC üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından elde ettiğimiz

$$a + b + m = 180°$$

eşitliğini 2 ile çarpalım:

$$2a + 2b + 2m = 360°$$

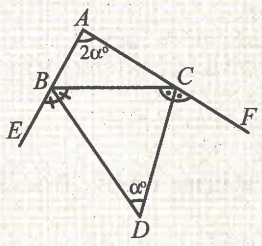
elde ederiz. $2a$ ile $2b$ değerleri ABC üçgeninin birer dış açı ölçüsü, 360° de üçgenin dış açı ölçüleri toplamı olduğundan, üçüncü dış açı $2m$ olmalıdır.

O halde $2m + n = 180°$ olduğundan

$$m = 90° - \frac{n}{2}.$$

Ek bilgi: Burada da m değerinin her halükarda dar olduğu dikkate alınmalıdır. Zira bu da ileride çokça lazım olacak. Hatta BCD daima dar açılı üçgen olur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
A, B, E ile A, C, F doğrudaş
BD ve CD dış açıortay
$m(CAB) = 2\alpha^\circ$
$m(BDC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 40 B) 45 C) 50
D) 55 E) 60

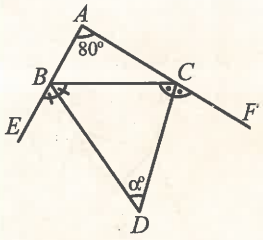
Çözüm: Hemencecik bulduğumuz formülü uygulayalım.

$$\alpha = 90 - \frac{2\alpha}{2}$$

eşitliğinden $\alpha = 45$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

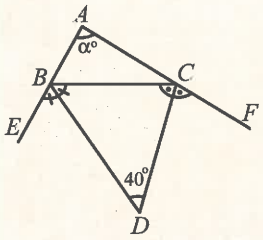
20.



α kaçtır?

50

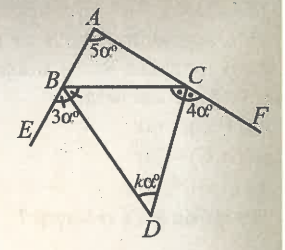
21.



α kaçtır?

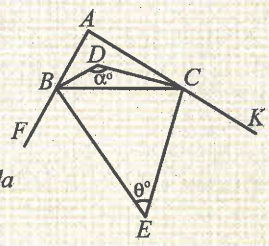
100

22.
ABC bir üçgen
BD ve *CD* birer dış açıortay
$m(DBE) = 3\alpha^\circ$
$m(DCF) = 4\alpha^\circ$
$m(A) = 5\alpha^\circ$
$m(D) = k\alpha^\circ$
olduğuna göre *k* kaçtır?



A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

Örnek. *ABC bir üçgen*
BD ve CD iç açıortay
BE ve CE dış açıortay
A, B, F ile A, C, K doğrudaş
$m(CDB) = \alpha^\circ$
$m(BEC) = \theta^\circ$
olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha + \theta = 90$ B) $\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha + \theta = 270$
D) $\alpha = 2\theta$ E) $2\alpha - \theta = 90$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. α ve θ için gerekli eşitlikleri öğrenmiştik, onları yazıp taraf tarafa toplayacağız.

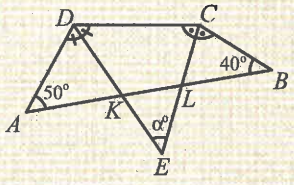
$$\alpha = 90 + \tfrac{1}{2}m(A)$$
$$\theta = 90 - \tfrac{1}{2}m(A)$$

olduğundan $\alpha + \theta = 180$ elde edilir.

İkinci yol. Bir üçgenin aynı köşesine ait iç ve dış açıortayın dik kesişeceğini daha önce söylemiştik. Bu yüzden *DBE* ve *ECD* açıları diktir. *BECD* dörtgeninde iç açıların ölçüleri toplamından $\alpha + \theta = 180$ bulunur.

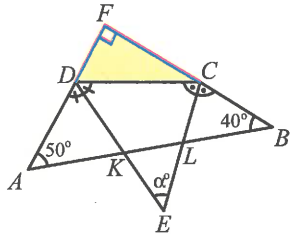
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
CE ve DE birer iç açıortay
$m(DAB) = 50^\circ$
$m(ABC) = 40^\circ$
$m(DEC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

Çözüm: *AD* ve *BC* kenarlarını şekildeki gibi uzatarak *BFA* üçgenini elde edelim. Verilmiş ölçülerden dolayı *BFA* açısı dik olacaktır.

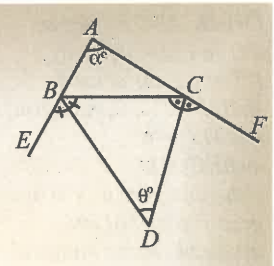


Diğer yandan *ABCD* dörtgenine göre iç açıortay olan *CE* ve *DE* doğruları, *CFD* dik üçgenine göre birer dış açıortay olurlar. O halde hemen formülümüzü uygulayalım:

$$\alpha = 90 - \tfrac{1}{2}m(A) = 90 - \tfrac{1}{2}(90) = 45\,.$$

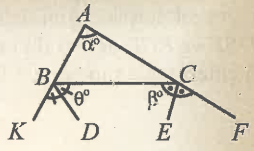
Doğru cevap: C.

23.
ABC bir üçgen
BD ve CD birer dış açıortay
$m(CAB) = \alpha°$
$m(BDC) = \theta°$
$60 < \alpha < 90$
olduğuna göre θ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



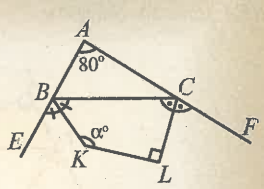
A) 13 **B) 14** C) 15 D) 16 E) 17

24.
ABC bir üçgen
BD ve CE birer dış açıortay
$m(CAB) = \alpha°$
$m(CBD) = \theta°$
$m(ECB) = \beta°$
$\alpha + \theta + \beta = 210$
olduğuna göre α kaçtır?



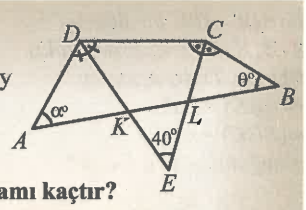
A) 60 B) 70 **C) 80** D) 90 E) 100

25.
ABC bir üçgen
BK ve CL birer dış açıortay
$KL \perp LC$
$m(CAB) = 80°$
$m(BKL) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



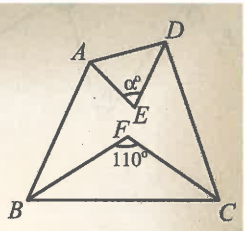
A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 **E) 140**

26.
ABC bir dörtgen
CE ve DE birer dış açıortay
$m(DEC) = 40°$
$m(DAB) = \alpha°$
$m(ABC) = \theta°$
olduğuna göre α + θ toplamı kaçtır?



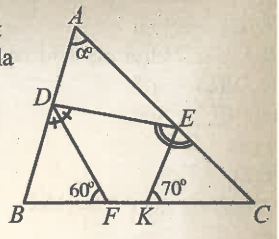
A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

27.
ABC bir dörtgen
DE, AE, BF ve CF
birer iç açıortay
$m(CFB) = 110°$
$m(AED) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 120 B) 110 C) 100 D) 90 **E) 70**

28.
ADE üçgeninin D ve E'ye ait dış açıortayları BC'yi sırasıyla F ve K'de kesmektedir.
$m(DFB) = 60°$
$m(EKC) = 70°$
$m(A) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?

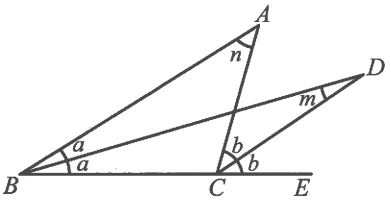


A) 100 B) 95 C) 90 D) 85 **E) 80**

Bir İç Açıortay İle Bir Dış Açıortayın Belirttiği Açı. Daha önce bir üçgene ait iki iç açıortayın belirttiği açıyı ve ardından iki dış açıortayın belirttiği açıyı incelemiştik. Şimdi sıra, bir iç açıortayla bir dış açıortayın belirttiği açıya geldi. İlgili teoremi vererek anlatmaya başlayalım:

Teorem. *Bir üçgenin bir iç açısının açıortayı ile bir başka açısının dış açıortayının belirttiği dar açının ölçüsü, üçgenin kullanılmayan açısının ölçüsünün yarısıdır.*

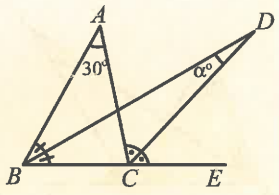
Kanıt: Yandaki şekilden takip edelim.



$n + 2a = 2b$ ve $m + a = b$ eşitlikleri ortak çözülerek istenilen eşitlik yani $m = \frac{n}{2}$ bulunur.

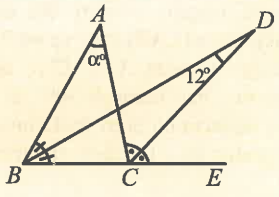
Ek bilgi: BCD üçgeni C açısından dolayı daima geniş açılı bir üçgen olur.

29.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CAB) = 30°$
$m(CDB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



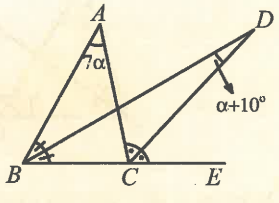
15

30.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CDB) = 12°$
$m(CAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



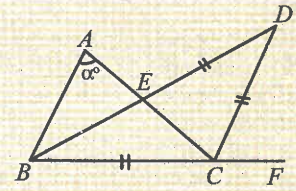
24

31.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CAB) = 7\alpha°$
$m(CDB) = (\alpha + 10)°$
olduğuna göre α kaçtır?



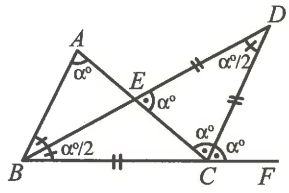
4

Örnek. *ABC bir üçgen*
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$|BC| = |CD| = |DE|$
$m(CAB) = \alpha°$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 30 B) 36 C) 48 D) 54 E) 72

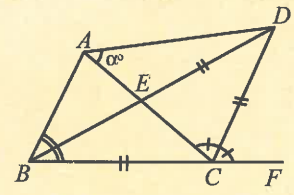
Çözüm: $m(A) = \alpha°$ verildiğinden $m(D) = \alpha°/2$ olduğunu biliyoruz.



$|CD| = |CB|$ olduğundan aynı zamanda DBC açısının ölçüsü de $\alpha°/2$ olur. Buradan $m(FCD) = \alpha°$ bulunur. CD dış açıortay olduğundan DCA açısının ölçüsü de aynı zamanda $|CD| = |CE|$ olduğundan DEC açısının ölçüsü de $\alpha°$ olur. Son olarak DBC üçgeninde iç açıların ölçüleri toplanırsa $\alpha = 72$ olarak bulunur.

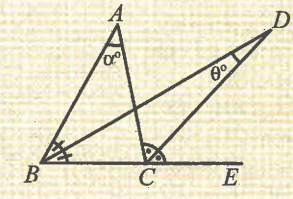
Doğru cevap: E.

32.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$|BC| = |CD| = |DE|$
$m(DAC) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



54

Örnek. *ABC bir üçgen*
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CAB) = \alpha°$
$m(CDB) = \theta°$
$30 < \alpha < 45$
olduğuna göre θ *kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) 14 E) 29

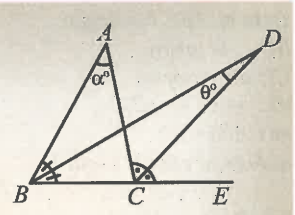
Çözüm: Kanıtladığımız üzere $\theta = \alpha/2$ olduğunu biliyoruz. O halde θ için

$$15 < \theta < 22{,}5$$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Bu durumda θ; 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 olmak üzere 7 farklı tam sayı değeri alabilir.

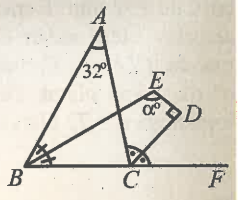
Doğru cevap: B.

33.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(CDB) = \theta^\circ$
$3\alpha - \theta = 70$
olduğuna göre α kaçtır?



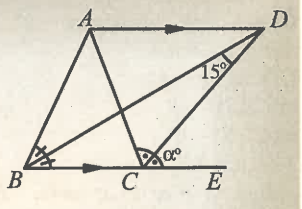
A) 14 B) 16 C) 20 D) 24 **E)** 28

34.
ABC bir üçgen
BE iç açıortay
CD dış açıortay
$ED \perp DC$
$m(CAB) = 32^\circ$
$m(DEB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



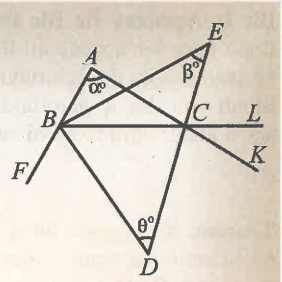
A) 92 B) 96 C) 102 **D)** 106 E) 112

35.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
AD // *BE*
$m(CDB) = 15^\circ$
$m(ECD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 37,5 B) 42,5 **C)** 52,5 D) 57,5 E) 62,5

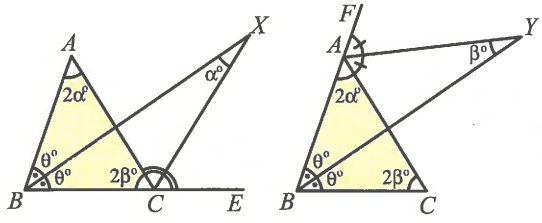
36.
ABC bir üçgen
BE iç açıortay
BD, *CD* ve *CE* dış açıortay
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(BDC) = \theta^\circ$
$m(CEB) = \beta^\circ$
$\alpha + \theta + \beta = 170$
olduğuna göre β kaçtır?



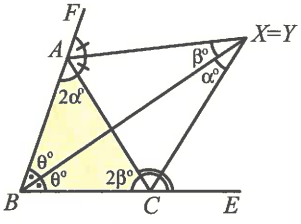
A) 30 **B)** 40 C) 50 D) 60 E) 80

Teorem. *Bir üçgenin iki dış açıortayının kesiştiği yerden, üçüncü açının iç açıortayı geçer.*

Kanıt: ''Üçgenin Dış Teğet Çemberleri'' konusunda çok daha şık bir kanıtını vereceğimiz bu teoremi şimdilik şu anki bilgilerimizle kanıtlayacağız.



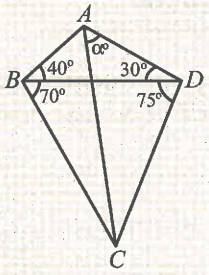
A, *B*, *C* açılarının ölçüleri sırasıyla $2\alpha^\circ$, $2\theta^\circ$, $2\beta^\circ$ olan bir *ABC* üçgeni çizelim. Bir önceki teoremden dolayı, üst şekilde $m(CXB) = \alpha^\circ$ ve $m(BYA) = \beta^\circ$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan *A* ve *C*'ye ait dış açıortayların belirttiği açının ölçüsünün de $90^\circ - \theta^\circ$ olması gerektiğini biliyoruz. İç açıların ölçüleri toplamından $\alpha + \theta + \beta = 90$ bulunduğundan $90 - \theta$ değeri aslında $\alpha + \beta$ değerine eşittir.



Öyleyse, *X* ile *Y* aslında aynı noktadır! Şimdi bu teoreme dair güzel bir örnek çözelim.

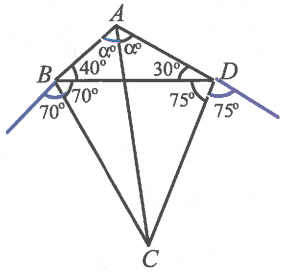
Örnek. *ABCD bir dörtgen*
[AC] ve [BD] köşegen
$m(ABD) = 40°$
$m(DBC) = 70°$
$m(CDB) = 75°$
$m(BDA) = 30°$
$m(DAC) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?



A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

Çözüm: Bu soru, daha doğrusu bu soruda kullanılan açı ölçüleri biraz dikkatli olmayı gerektiriyor. Neye mi dikkat edeceğiz? *ABCD* dörtgeninin *B* ve *D* açılarının bütünleyenlerinin ölçülerinin zaten *BCD* üçgeninin birer iç açı ölçüsü olduğuna dikkat edeceğiz. Bu sayede *BC* ve *DC* doğrularının *ABD* üçgenine ait birer dış açıortay olduklarını anlarız.

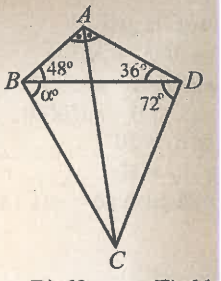


İki dış açıortayın kesiştiği yerden üçüncü açının iç açıortayı geçeceğinden *AC*'nin bir iç açıortay olduğunu görmek gerekir. *ABD* üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplanırsa $\alpha = 55$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

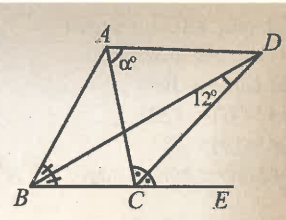
37.
ABC bir dörtgen
$m(DAC) = m(CAB)$
$m(CDB) = 72°$
$m(BDA) = 36°$
$m(ABD) = 48°$
$m(DBC) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?



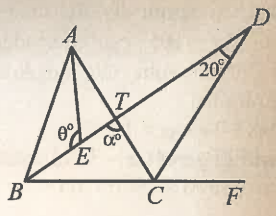
A) 48 B) 51 C) 54 D) 60 **E) 66**

38.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CDB) = 12°$
$m(DAC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



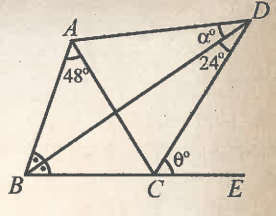
A) 78 B) 76 C) 74 D) 72 E) 66

39.
ABC bir üçgen
BD ve *AE* iç açıortay
CD dış açıortay
$m(CDB) = 20°$
$m(CTB) = \alpha°$
$m(AEB) = \theta°$
olduğuna göre
α + θ toplamı kaçtır?



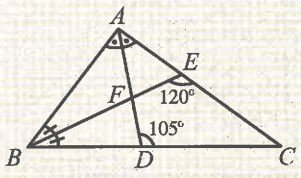
A) 140 B) 160 C) 180 **D) 200** E) 220

40.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
$m(CAB) = 48°$
$m(CDB) = 24°$
$m(BDA) = \alpha°$
$m(ECD) = \theta°$
olduğuna göre
α + θ toplamı kaçtır?



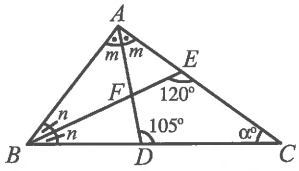
A) 48 B) 66 C) 72 **D) 90** E) 96

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD ve BE iç açıortay
$m(ADC) = 105°$
$m(BEC) = 120°$
$m(BCA) = \alpha°$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 30 B) 33 C) 36 D) 42 E) 45

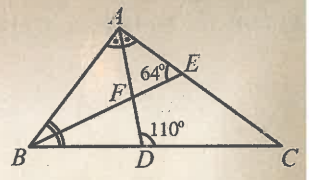
Çözüm: *CAD* ve *DAB* açılarının ölçüleri *m*, *ABE* ve *EBC* açılarının ölçüleri *n* olsun.



ABE ve *ABD* üçgenlerinde iki iç açı ölçüsünün toplamını üçüncü açının dış ölçüsüne eşitlersek $2m + n = 120°$ ve $m + 2n = 105°$ eşitliklerinden $3m + 3n = 225°$ yani $m + n = 75°$ bulunur. *ABC* üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından
$2m + 2n + \alpha = 180°$
eşitliği gereği $\alpha = 30$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

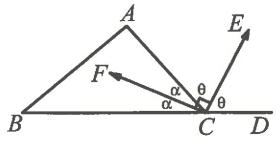
41.
ABC bir üçgen
AD ve *BE* açıortay
$m(BEA) = 64°$
$m(ADC) = 110°$
olduğuna göre
***m*(*C*) kaçtır?**



A) 22 **B) 36** C) 44 D) 48 E) 50

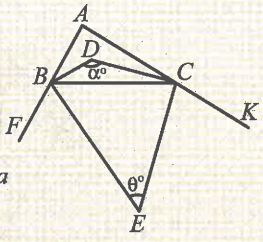
Teorem. *Bir üçgende aynı köşeye ait iç ve dış açıortaylar birbirine diktir.*

Kanıt: Örneğin *C* köşesini ele alalım. [*CF* iç açıortay, [*CE* dış açıortay olsun.



$m(BCF) = m(FAC) = \alpha°$ ve $m(ACE) = m(ECD) = \theta°$ dersek, şekle göre *BCD* bir doğru açı teşkil ettiğinden $2\alpha + 2\theta = 180$ yani $\alpha + \theta = 90$ olduğu rahatlıkla görülebilir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
BD ve CD iç açıortay
BE ve CE dış açıortay
A, B, F ile A, C, K doğrudaş
$m(CDB) = \alpha°$
$m(BEC) = \theta°$
olduğuna göre α *ile* θ *arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*

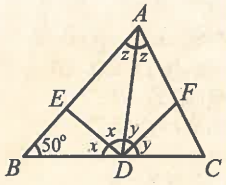


A) $\alpha + \theta = 90$ B) $\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha + \theta = 270$
D) $\alpha = 2\theta$ E) $2\alpha - \theta = 90$

Çözüm: Bir üçgenin aynı köşesine ait iç ve dış açıortayın dik kesişeceğini kanıtladık. Bu yüzden *DBE* ve *ECD* açıları diktir. *BECD* dörtgeninde iç açıların ölçüleri toplamından $\alpha + \theta = 180$ bulunur.

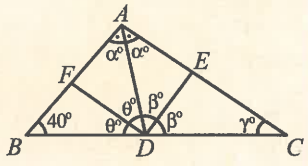
Doğru cevap: B.

42.
ABC üçgen
$m(BDE) = m(EDA) = x°$
$m(ADF) = m(FDC) = y°$
$m(CAD) = m(BAD)$
$m(B) = 50°$
$x - y = 10$
olduğuna göre $m(C)$ kaç derecedir?



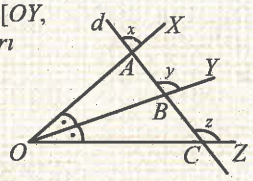
70

43.
AD, DE, DF açıortay
$m(B) = 40°$
$\beta - \theta = 10$
$m(C) = \gamma°$
olduğuna göre
γ kaçtır?



20

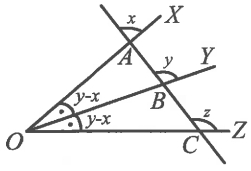
Soru Tipi. *d doğrusunun [OX, [OY, [OZ ışınlarıyla kesişim noktaları sırasıyla A, B, C olsun.*
m(XOY) = m(YOZ)
m(dAX) = x
m(dBY) = y
m(dCZ) = z
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = x + z$ B) $x = y + z$ C) $z = x + y$
D) $2y = x + z$ E) $2x = y + z$

Çözümü: İki farklı yoldan çözelim.

Birinci yol. $m(BAO) = x$ olduğunu not edelim.



Bir önceki teorem gereği AOB üçgeninde A ve O iç açılarının ölçüleri toplamı B'nin dış açı ölçüsü olan y'ye eşit olmalıdır. Bu sebeple

$$m(XOY) = y - x$$

bulunur. O halde aynı zamanda

$$m(YOZ) = y - x$$

olur. Şimdi aynı işlemleri BOC üçgeninde yaparsak

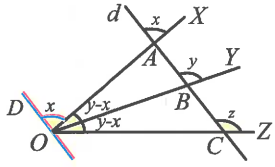
$$y + y - x = z$$

denkleminden

$$2y = x + z$$

buluruz.

İkinci yol. Bu soruyu doğruda açılar bilgisi ile de şöyle çözebilirsiniz:



O'dan geçen AC'ye paralel doğru çizerek üzerinde şekildeki gibi bir D noktası alalım. Yöndeş açı gereği $m(DOX) = x$ olacaktır.

$$m(DOC) = m(DOA) + m(AOC) = 2y - x = z$$

eşitliğinden

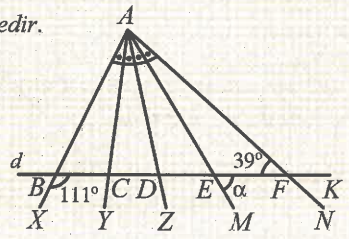
$$2y = x + z$$

olduğu bulunur.

Doğru cevap: D.

Not: *x, y, z değerleri bir aritmetik dizi belirtirler.*

Örnek. *[AX, [AY, [AZ, [AM, [AN ışınları d doğrusunu sırasıyla B, C, D, E, F noktalarında kesmektedir.*
m(AFB) = 39°
m(KBX) = 111°
m(KEM) = α°
BAC, CAD, DAE, EAF açılarının ölçüleri birbirlerine eşit olduğuna göre α kaçtır?



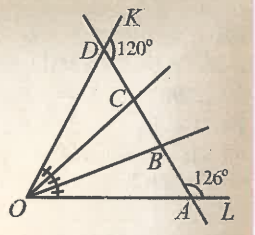
A) 54 B) 55 C) 56 D) 57 E) 58

Çözüm: $m(BAC) = m(CAD) = m(DAE) = m(EAF) = \theta°$ olsun. Elimizde $39 + 4\theta = 111$ eşitliği olduğundan buradan $\theta = 18$ bulunur. Diğer yandan FAE üçgeninden $39 + \theta = \alpha$ yazılabileceğinden $\alpha = 39 + 18 = 57$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

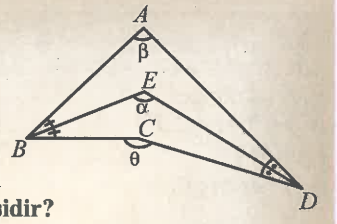
44.
DOA bir üçgen
m(AOB) = m(BOC) = m(COD)
m(LAB) = 126°
m(CDK) = 120°

olduğuna göre *CBO* açısının ölçüsü kaç derecedir?



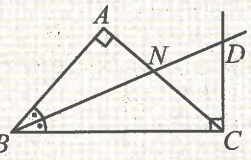
A) 98 B) 87 C) 76 D) 66 E) 54

45.
ABCD bir dörtgen
BE ve *DE* iç açıortay
m(DAB) = β
m(DEB) = α
m(DCB) = θ
olduğuna göre α'nın β ve θ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



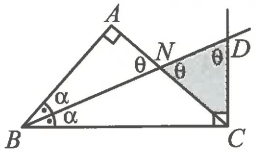
A) $\frac{\theta - \beta}{2}$ B) $\frac{\theta + \beta}{2}$ C) $2\theta - \beta$ D) $2\beta - \theta$ E) $\frac{\theta}{2} + \beta$

Soru Tipi. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
BC ⊥ CD
[BN iç açıortay
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?



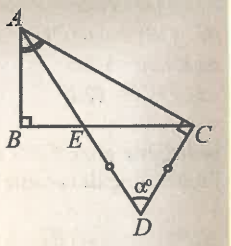
A) $|CD| = |CN|$ B) $|ND| = |NC|$ C) $|DN| = |DC|$
D) $|DC| = |NA|$ E) $|NA| = |ND|$

Çözümü: Boş durmayın!
$m(ABN) = m(NBC) = \alpha$ olsun. $\alpha + \theta = 90^\circ$ olmak üzere; *ANB* açısının ölçüsüne θ dersek; *ters açılar eştir* teoremi gereğince $m(CND) = \theta$ olur. *BCD* dik üçgen olduğundan *CDB* açısının ölçüsü de θ olur. $m(CND) = m(CDN)$ olduğundan $|CD| = |CN|$ olur.



Doğru cevap: A.

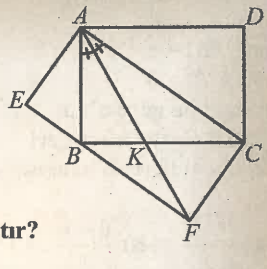
46.
ABC ve *DCA* birer dik üçgen
AB ⊥ BC
DC ⊥ CA
$m(BAD) = m(CAD)$
$|DE| = |DC|$
$m(D) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 36 C) 40 D) 45 **E) 60**

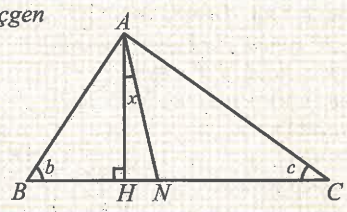
47.
ABCD ve *AEFC*
birer dikdörtgen
$m(BAF) = m(CAF)$
$B \in [EF]$
$BC \cap AF = \{K\}$

olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?



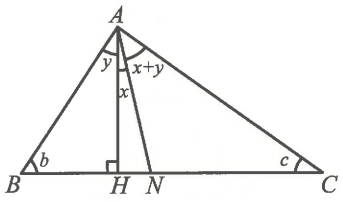
A) $|DC| = |BF|$ B) $|EA| = |KC|$ **C) $|EB| = |BK|$**
D) $m(EAB) = m(BCA)$ E) $m(EBA) = m(ACD)$

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
[AH] yükseklik
[AN] iç açıortay
$m(ABC) = b$
$m(BCA) = c$
$m(NAH) = x$
olduğuna göre x'in b ve c cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{b+c}{2}$ B) $\left|\frac{b-c}{2}\right|$ C) $\frac{b+c}{4}$ D) $\left|\frac{b-c}{4}\right|$ E) $\frac{b+c}{3}$

Çözümü: Çok çok kolay! $m(HAB) = y$ olsun.



[AN] iç açıortay olduğundan $m(CAN) = x + y$ olur. Şimdi denklemlerimizi yazalım.

$$y + b = 90^\circ$$

ve

$$2x + y + c = 90^\circ$$

eşitliklerinden y'leri çekeceğiz.

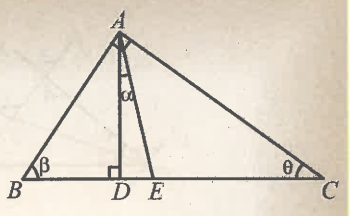
$$y = 90^\circ - b = 90^\circ - 2x - c$$

olur. $b = 2x + c$ olduğu için $x = \frac{1}{2}|b-c|$ dir.

Doğru cevap: B.

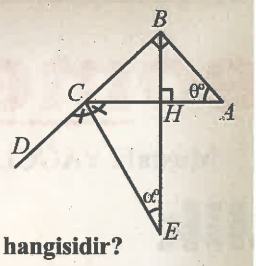
Not: Böyle bir açı ancak *ABC* üçgeni ikizkenar değilse oluşur. Ayrıca $b < c$ verilebileceğinden mutlak değer kullandık.

48.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
AD ⊥ BC
$m(BAE) = m(EAC)$
$m(B) = \beta$
$m(C) = \theta$
$12\beta^2 - 12\theta^2 = \pi^2$
olduğuna göre $m(DAE) = \alpha$ kaçtır?



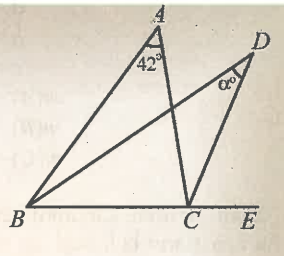
A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{18}$ C) $\frac{\pi}{15}$ **D) $\frac{\pi}{12}$** E) $\frac{\pi}{6}$

49.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BD$
$BE \perp CA$
$m(DCE) = m(ECA)$
$m(BAC) = \theta$
$m(BEC) = \alpha$
olduğuna göre α'nın θ cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



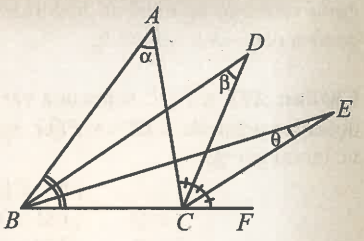
A) $\frac{\theta}{2}$ B) $\frac{\pi-\theta}{2}$ C) $\frac{\pi+\theta}{2}$ **D)** $\frac{\pi-2\theta}{4}$ E) $\frac{\pi+2\theta}{4}$

50.
ABC ve DBC birer üçgen
B, C, E doğrudaş
$m(DBE) = 2 \cdot m(ABD)$
$m(DCE) = 2 \cdot m(ACD)$
$m(A) = 42°$
$m(D) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



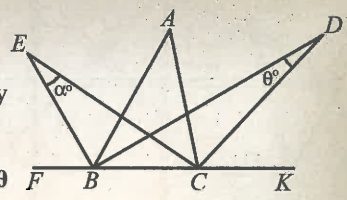
A) 14 B) 21 **C)** 28 D) 35 E) 42

51.
ABC, DBC ve EBC birer üçgen
ABD, DBE ve EBF açıları eş
ACD, DCE ve ECF açıları eş
$m(A) = \alpha$
$m(D) = \beta$
$m(E) = \theta$
olduğuna göre α, β ve θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



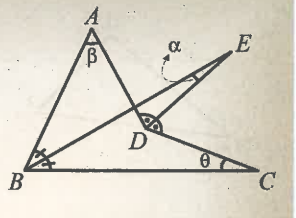
A) $\alpha+\beta+\theta=\pi/2$ B) $\alpha=\beta+\theta$ C) $2\alpha=\beta+\theta$
D) $2\beta=\alpha+\theta$ E) $3\beta=\alpha+\theta$

52.
ABC bir üçgen
BD ve CE iç açıortay
CD ve BE dış açıortay
$m(CEB) = \alpha°$
$m(CDB) = \theta°$
olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



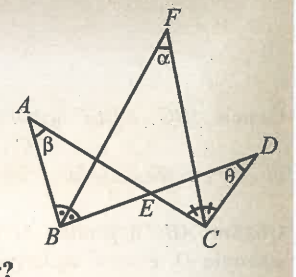
A) $\alpha < \theta$ **B)** $\alpha = \theta$ C) $\alpha > \theta$
D) $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$ E) $\alpha+\theta=\frac{\pi}{4}$

53.
$ABCD$ bir dörtgen
$BE \cap DE = \{E\}$
$m(ABE) = m(CBE)$
$m(ADE) = m(CDE)$
$m(DAB) = \beta$
$m(BCD) = \theta$
$m(DEB) = \alpha$
olduğuna göre α, β ve θ arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

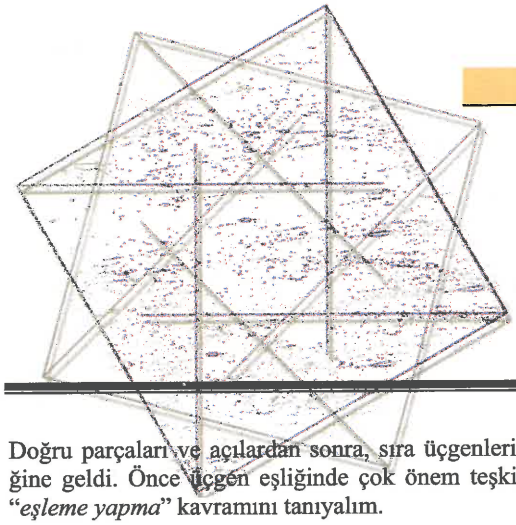


A) $2\alpha=\beta+\theta$ **B)** $2\alpha=\beta-\theta$ C) $\beta+\theta=\pi+\alpha$
D) $\beta+\theta=\pi+\alpha$ E) $\beta+\theta=4\alpha$

54.
ABE ve CDE birer üçgen
BF ve CE iç açıortay
$AC \cap BD = \{E\}$
$m(CFB) = \alpha$
$m(CAB) = \beta$
$m(CDB) = \theta$
olduğuna göre α, β ve θ arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $2\alpha=\beta+\theta$ B) $2\beta=\alpha+\theta$ C) $2\theta=\beta+\alpha$
D) $\alpha+\beta+\theta=\frac{\pi}{2}$ E) $\alpha+\beta+\theta=\pi$



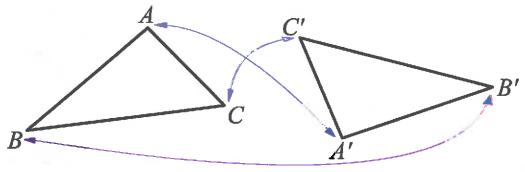
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Eşlik

Doğru parçaları ve açılardan sonra, sıra üçgenlerin eşliğine geldi. Önce üçgen eşliğinde çok önem teşkil eden "*eşleme yapma*" kavramını tanıyalım.

Eşleme yapma. Eğer ABC ve $A'B'C'$ gibi iki üçgende A köşesine A', B köşesine B', C köşesine C' köşesi karşılık getirilirse, bu iki üçgen arasında bir eşleme kurulmuştur denir.



Bu eşleme

$$ABC \leftrightarrow A'B'C'$$

yazarak gösterilir. Böyle bir eşlemede kenar uzunlukları ve açı ölçüleri de eşlenmiş olur. Bu eşlemeler de benzer olarak

$$a \leftrightarrow a'$$
$$b \leftrightarrow b'$$
$$c \leftrightarrow c'$$
$$m(A) \leftrightarrow m(A')$$
$$m(B) \leftrightarrow m(B')$$
$$m(C) \leftrightarrow m(C')$$

şeklinde gösterilirler.

Örnek. *ABC ile DEF üçgenleri arasında yapılan*

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

birebir eşlemesinde kimin kimle eşleneceğini belirtiniz.

Çözüm: ABC üçgeninin A, B ve C açıları, DEF üçgeninin sırasıyla D, E ve F açılarıyla eşlenecektir. Diğer yandan ABC üçgeninin $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarları da DEF üçgeninin sırasıyla $[DE]$, $[EF]$ ve $[FD]$ kenarlarıyla eşlenecektir.

Üçgenlerde Eşlik. Artık üçgenlerde eşliği tanımlayabiliriz. Dikkat edin, "eşliği" değil, "üçgenlerde eşliği" tanımlıyoruz.

Tanım. Aralarında $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ gibi bir **eş**leme kurulmuş olan iki üçgende, karşılıklı (eşleştirilmiş) kenarlar ve karşılıklı açılar **eş** ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir.

Kenarların eşliğinin aynı uzunlukta olmaları, açıların eşliğinin de aynı ölçüye sahip olmaları olduğunu hatırlatırız. Yani , ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerine eş diyebilmek için

$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c'$$
$$m(A) = m(A')$$
$$m(B) = m(B')$$
$$m(C) = m(C')$$

olmalı. Aslında karşılıklı kenarların ikisi eşit boydayken, bu kenarların belirttiği açı ölçüsü de eşitse, diğer eşitlikler zaten olmak zorundadır, hepsini incelemeye gerek yoktur. Niye diye sorarsanız kanıtlayamayacağımız için, birazdan bir aksiyom vererek bu durumu tartışılmaz hale getireceğiz. Neyse, eğer böyleyse, bu üçgenlerin eşliği

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

yazılarak gösterilir. Ama ben yine, affınıza sığınarak,

$$ABC \cong A'B'C'$$

diye göstereceğim, siz de anlayacaksınız.

Örnek. *XYZ ve PQR üçgenleri arasında $XYZ \cong PQR$ eşliği verilsin. Bu üçgenlerin hangi elemanlarının eş olduğunu ve hangi ölçülerinin birbirlerine eşit olduğunu üçgenleri çizmeden belirtiniz.*

Çözüm: $XYZ \cong PQR$ sonucuna varılması, daha önce bu üçgenler arasında $XY\mathbf{Z} \leftrightarrow PQR$ eşlemesinin yapıldığını ve tanım gereği

$$X \cong \mathbf{P} \qquad [XY] \cong [PQ]$$
$$Y \cong \mathbf{Q} \qquad [YZ] \cong [QR]$$
$$Z \cong \mathbf{R} \qquad [XZ] \cong [PR]$$

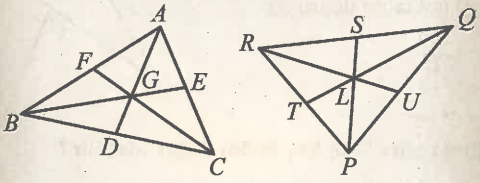
sonuçlarının elde edildiğini gösterir.

Bu eşliklerin sonucu olarak da

$$m(X) = m(P) \qquad |XY| = |PQ|$$
$$m(Y) = m(Q) \qquad |YZ| = |QR|$$
$$m(Z) = m(R) \qquad |XZ| = |PR|$$

eşitliklerinden bahsedilebilir.

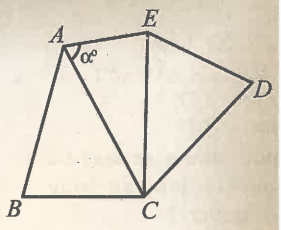
1.
Aşağıdaki şekillerde kenarortayları çizilmiş olan ABC ve PQR eş üçgenleri görülmektedir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi söylenemez?

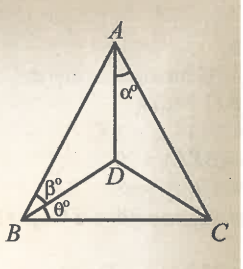
A) $[BC] \cong [QR]$ B) $[CE] \cong [RT]$ C) $[BE] \cong [QT]$
D) $[GD] \cong [LS]$ E) $[CG] \cong [QL]$

2.
ABC ve ECD birer üçgen
$ABC \cong CDE$
$m(EAC) = \alpha^\circ$
$m(BCE) - m(DEC) = 20^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 20 B) 40 C) 60
D) 80 E) 90

3.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$ADB \cong ADC$
$m(CAD) = \alpha^\circ$
$m(ABD) = \beta^\circ$
$m(DBC) = \theta^\circ$
$\alpha + \beta = 55$
olduğuna göre θ kaçtır?



A) 25 B) 30 C) 35 D) 45 E) 55

Şimdi, biraz önce bahsettiğimiz, herhangi karşılıklı iki kenar ve bu kenarların belirttiği açıları eş olan iki üçgende, bahsi geçmeyen üçüncü kenara ilişkin bir aksiyoma ihtiyacımız var.

Başrol oynayan açının gördüğü kenara taban denecek olursa,

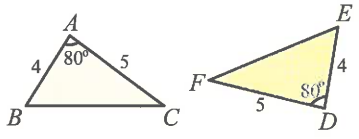
E7. *Birbirine eş olan iki üçgende karşılıklı taban açıları birbirine eştirler.*

şeklinde bir belit tüm dertlere derman olur. Anlatmak istediği şudur:

$$\begin{pmatrix} b = b' \\ c = c' \\ m(A) = m(A') \end{pmatrix} ise \begin{pmatrix} m(B) = m(B') \\ m(C) = m(C') \\ a = a' \end{pmatrix}.$$

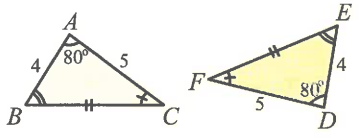
Üçgenlerde eşliğin yukarda verdiğimiz tanımı, iki kenar ve bunların belirttiği açıdan bahsettiğinden, bu tanıma üçgenlerde eşliğin **K.A.K. (Kenar-Açı-Kenar) tanımı** denir.

Bu aksiyom ile birlikte eşlik kavramlarına ilişkin tüm aksiyomları vermiş olduk. Artık dilediğimiz gibi at oynatabiliriz.



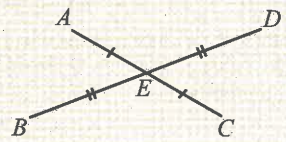
Örneğin yukardaki ABC ve DEF üçgenlerine bakalım. Her ikisinin de uzunluğu 4 br ve 5 br olan birer kenarı varken, ikisinin de bu kenarların belirttiği açının ölçüsü birbirlerine eşit olup 80° dir. Bu yüzden ABC ile DEF üçgenleri K.A.K. tanımına göre eştirler.

O halde şunları gönül rahatlığıyla söyleyebiliriz:



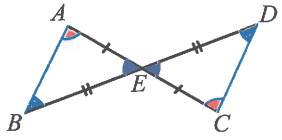
$|BC| = |EF|$
$m(B) = m(E)$
$m(C) = m(F)$

Örnek. *[AC] ve [BD] doğru parçaları birbirlerinin orta noktalarından şekildeki gibi E noktasında kesişiyor olsunlar. Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi doğru olmayabilir?*



A) $AB \,//\, DC$ B) $AD \,//\, BC$ C) $[AB] \cong [CD]$
D) $[AD] \cong [BC]$ E) $[AC] \cong [BD]$

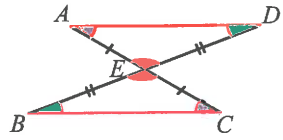
Çözüm: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ hakkında bilgiler istendiğinden önce bu doğru parçalarını çizelim.



Evvela AEB ile CED üçgenlerini masaya yatıralım. Bu iki üçgende de ortak boyda iki kenar var olup bu kenarların belirttiği açı ölçüleri de ters açılar gereği eş olduğundan yani $|AE| = |CE|$ ve $|BE| = |DE|$ olup $m(AEB) = m(CED)$ olduğundan K.A.K. tanımı gereği AEB ile CED üçgenleri eştir.

Bu eşlik hem $[AB] \cong [CD]$ olmasını hem de $m(A) = m(C)$ ve $m(B) = m(D)$ olmasını doğurur. Doğan ilk eşitlik ise C şıkkının, diğer iki eşitlikse A şıkkının doğruluğunu garantiler.

Şimdiyse AED ile CEB üçgenlerine odaklanalım.



Bu iki üçgende de

$$|AE| = |CE| \text{ ve } |BE| = |DE|$$

olup $m(AED) = m(CEB)$ olduğundan K.A.K. tanımı gereği AED ile CEB üçgenleri eştir.

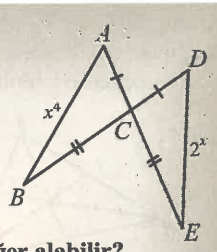
Bu eşlik hem $[AD] \cong [BC]$ olmasını hem de $m(A) = m(C)$ ve $m(B) = m(D)$ olması doğurur.

Doğan ilk eşitlik ise D şıkkının, diğer iki eşitlikse B şıkkının doğruluğunu garantiler. O halde yanlış olan seçenek E seçeneğidir.

Bunu da kısaca izah edelim: Doğru parçalarının eş olması, boylarının birbirlerine eşit olmasıyla mümkündü. Burada $[AC]$ ile $[BD]$ keyfi olarak seçilen iki doğru parçası olduğundan daima eşit boyda olmaları beklenemez.

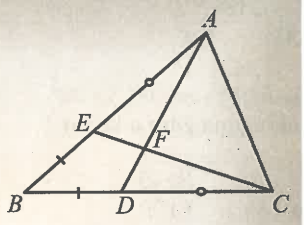
Doğru cevap: E.

4.
ABC ve DCE birer üçgen
A, C, E noktaları doğrudaş
B, C, D noktaları doğrudaş
$|CA| = |CD|$
$|CB| = |CE|$
$|AB| = x^4$ br
$|DE| = 2^x$ br
olduğuna göre $|AB|$ kaç farklı değer alabilir?



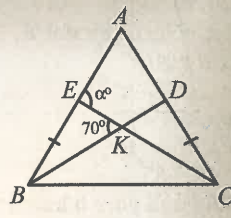
A) 0 B) 1 **C) 2** D) 3 E) 4

5.
ABC bir üçgen
$[AD] \cap [CE] = \{F\}$
$|AE| = |CD|$
$|BE| = |BD|$
olduğuna göre aşağıdaki sonuçlardan hangisine varılamaz?



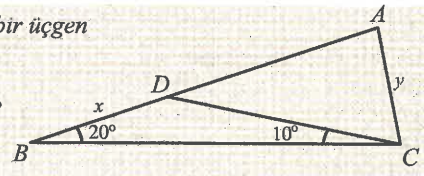
A) $ABD \cong CBE$ B) $AFE \cong CFD$ C) $AEC \cong ADC$
D) $|FE| = |FD|$ **E)** $ABC \cong ACD$

6.
ABC bir eşkenar üçgen
$|BE| = |CD|$
$BD \cap CE = \{K\}$
$m(BKE) = 70°$
$m(CEA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



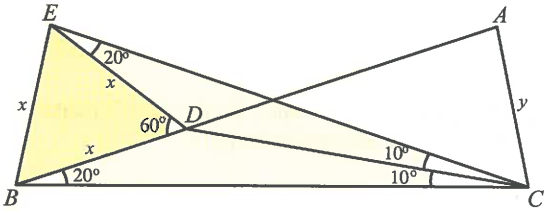
A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 **E)** 95

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BA| = |BC|$
$m(ABC) = 20°$
$m(BCD) = 10°$
$|BD| = x$ br
$|CA| = y$ br
olduğuna göre x/y oranı kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

Çözüm: $[BD]$ üzerine üçgenin dışına doğru bir BDE eşkenar üçgeni çizelim. Hemen ardından E ile C noktalarını bir doğru parçasıyla birleştirelim.



$m(CDB) = 150°$ ve $m(BDE) = 60°$ olduğundan CDE açısının ölçüsü $150°$ olmalıdır. Diğer yandan, bununla birlikte CDB ile CDE üçgenlerinin hem $[CD]$ kenarları ortak, hem de $[DB]$ ve $[DE]$ kenarları eş diye CDB ile CDE üçgenleri K.A.K. tanımına göre eştirler. Bu eşlik;

$$|CB| = |CE|$$

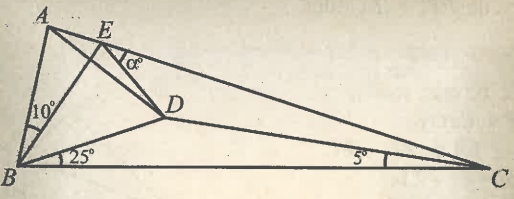
eşitliğini doğurduğu gibi

$$m(DCE) = 10° \text{ ve } m(CED) = 20°$$

eşitliklerini de doğurur. Sonuç olarak; $|BA| = |BC| = |EC|$ ve $m(ABC) = m(BCE) = 20°$ olduğundan ABC ile BCE üçgenleri de eş olur. O halde $|AC| = |BE|$ yani $y = x$ olmalıdır. Şu durumda istenen oran 1 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

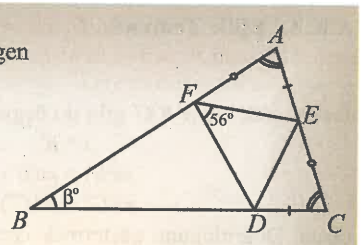
7.



Şekilde $ADC \cong BDC$ olup $m(BCD) = 5°$, $m(CBD) = 25°$ ve $m(ABE) = 10°$ olduğuna göre $m(CED)$ kaç derecedir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 **E) 30**

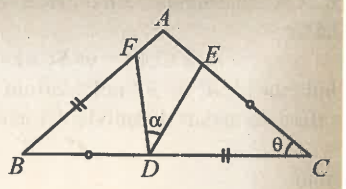
8.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|BA| = |BC|$
$|AE| = |CD|$
$|AF| = |CE|$
$m(EFD) = 56°$



olduğuna göre
$m(B)$ kaç derecedir?

A) 34 B) 36 **C) 44** D) 46 E) 56

9.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$|FB| = |DC|$
$|BD| = |CE|$
$m(FDE) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$

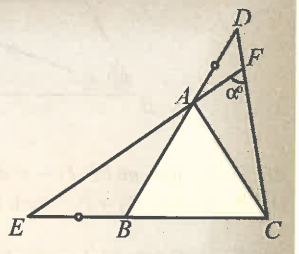


olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\alpha = \theta$ B) $\theta = 2\alpha$ C) $\alpha + \theta = 90$
D) $\theta = \alpha + 30$ E) $3\theta + 2\alpha = 180$

10.
DBC ve *FEC* birer üçgen
$DB \cap EF = \{A\}$

ABC bir eşkenar üçgen
$|EB| = |AD|$
$m(EFC) = \alpha°$



olduğuna göre α kaçtır?

A) 30 B) 36 C) 45 **D) 60** E) 72

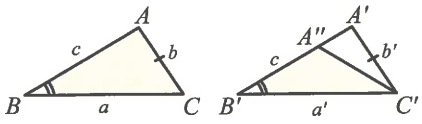
A.K.A. Eşlik Teoremi. *Tabanları ve karşılıklı taban açıları eş olan iki üçgen birbirine eştir.*

Kanıt: ABC ve $A'B'C'$ gibi iki üçgende

$$a = a'$$
$$m(B) = m(B')$$
$$m(C) = m(C')$$

olsun. Doğruluğunu göstermek istediğimiz eşitlik $b = b'$ veya $c = c'$. Çünkü bundan sonrasını üçgenin K.A.K. tanımına göre halledebiliriz.

$|B'A'| = c' \neq c$ farz ederek $B'A'$ üstünde $|B'A''| = c$ br olacak şekilde bir A'' noktası alalım.



K.A.K. tanımından ABC ile $A''B'C'$ üçgenleri eştir. O halde

$$m(B'C'A') = m(BCA) = m(B'C'A'')$$

bulunur ki; A' ile A'' noktalarının $B'C'$ kenarının aynı tarafında olmaları nedeniyle, E1 aksiyomu gereğince

$$A'' = A'$$

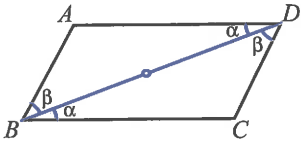
yani

$$c = c'$$

olması gerektiği kanıtlanmış olur.

Teorem. *Bir paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları birbirlerine eşittir.*

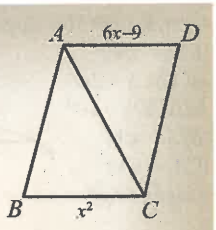
Kanıt: Paralelkenarımız aşağıdaki $ABCD$ paralelkenarı olsun.



$AD \,//\, BC$ diye $m(BDA) = \alpha$ dersek $m(DBC) = \alpha$ ve $AB \,//\, DC$ diye $m(ABD) = \beta$ dersek $m(CDB) = \beta$ olur.

ABD ve CDB üçgenlerinin ikişer açısı karşılıklı olarak eş iken bu açıların ortak olan kolları iki üçgende de eşit boyda olduğundan ADB ile CDB üçgenleri A.K.A. eşliği gereğince eştirler. Bu yüzden karşılıklı kenarları da eş olmalıdır.

11.
ABC ve ACD birer üçgen
$AB \,//\, DC$
$|AB| = |DC|$
$|AD| = 6x - 9$ br
$|BC| = x^2$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?

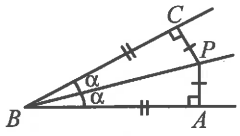


A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

Üçgende eşliğin A.K.A. tanımı ilerde sıkça kullanacağımız şu çok önemli teoremi de kanıtlar:

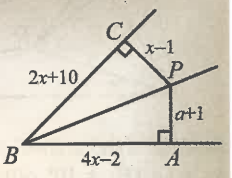
Teorem. *Açıortay doğrusu üzerinde alınan rastgele bir noktanın açının kollarına olan uzaklıkları eşittir.*

Kanıt: Açımız yan şekildeki gibi ABC açısı, bu açının açıortayı üzerinde rastgele alınan nokta P ve P'den açının kollarına inilen dikme ayakları da A ve C olsun.



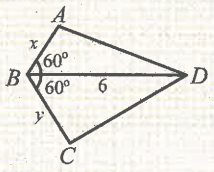
PAB ile PCB üçgenlerinde B ve P açıları eş olup $[PB]$ kenarı iki üçgende de ortak diye A.K.A. eşliği gereğince PBA ile PCA üçgenleri eştir. Dolayısıyla hem $|BA| = |BC|$ hem de $|PB| = |PC|$'dir.

12.
ABC bir açı
$[BP$ açıortay
$PA \perp BA$ ve $PC \perp BC$
$|BA| = 4x - 2$ br
$|BC| = 2x + 10$ br
$|PC| = x - 1$ br
$|PA| = a + 1$ br
olduğuna göre a kaçtır?



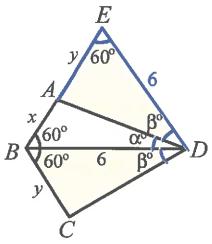
A) 3 **B) 4** C) 5 D) 6 E) 7

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$m(ABD) = 60°$
$m(CBD) = 60°$
$m(CDA) = 60°$
$|BD| = 6$ br
$|AB| = x$ br
$|BC| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ *toplamı kaçtır?*



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 4 E) 6

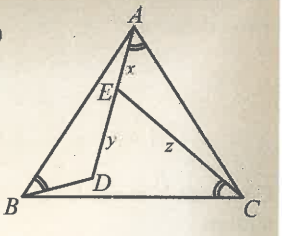
Çözüm: $m(ADB) = \alpha°$ ve $m(BDC) = \beta°$ diyelim. $[BA]$'yı A yönünde uzatarak BDE eşkenar üçgenini oluşturalım.



Soruda $\alpha + \beta = 60$ olarak verildiğinden $m(ADE) = \beta°$ olacaktır. Diğer yandan $m(E) = 60°$ ve $|DE| = 6$ br olacaktır. Şu durumda; DEA ile DBC üçgenleri A.K.A. gereğince eş olduklarını görürüz. O halde $|BC| = y$ br diye $|EA| = y$ br olmalıdır. Demek ki $x + y = 6$ imiş.

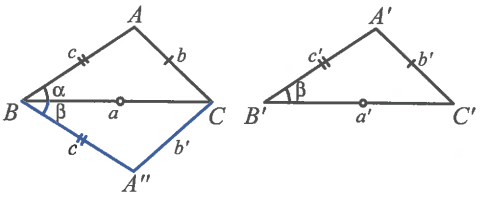
Doğru cevap: E.

13.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(CAD) = m(ABD) = m(BCE)$
$E \in [AD]$
$|AE| = x$ br
$|ED| = y$ br
$|CE| = z$ br
olduğuna göre x, y **ve** z **arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**



A) $z^2 = x \cdot y$ B) $2z = x + y$ C) $z = x + y$
D) $z^2 = x^2 + y^2$ E) $2y = x + z$

K.K.K. Eşlik Teoremi. *Kenarları karşılıklı eş olan iki üçgen eştir.*

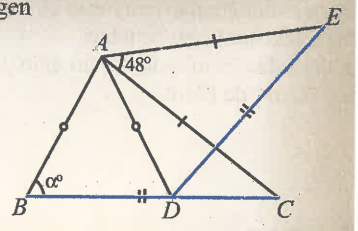


Kanıt: $a = a'$, $b = b'$ ve $c = c'$ durumunda herhangi bir karşılıklı açı çiftinin eşliğini göstermek yetecek. Kalanı yine K.A.K. tanımı halledecek.

BC kenarının A noktasının bulunmadığı tarafında $m(CBA'') = m(C'B'A')$ ve $|BA''| = |B'A'|$ olacak şekilde bir A'' noktası alalım. K.A.K. tanımı gereği $A''BC$ ile $A'B'C'$ üçgenleri eştir. O halde $|A''C| = |A'C'| = b'$ br olur.

Yine K.A.K. tanımından $b = b'$ olduğundan $A''BC$ ile ABC eş bulunur ki b ve b' uzunluğundaki kenarların karşılarındaki açı ölçüleri eşit olmalıdır.

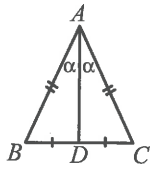
14.
ABC ve ADE birer üçgen
$|AB| = |AD|$
$|AC| = |AE|$
$|BC| = |DE|$
$m(CAE) = 48°$
$m(B) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



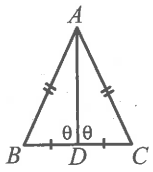
A) 48 B) 54 C) 60 **D) 66** E) 72
[Numan AKKOÇ]

Sonuç 1. *İkizkenar bir üçgende tepeden inen kenarortay aynı zamanda iç açıortaydır.*

İkizkenar üçgenimiz $|AB| = |AC|$ olmak üzere ABC olsun. A'dan inen kenarortayımız da $[AD]$ olsun. Şimdi ADB ve ADC üçgenlerine odaklanalım. $[AD]$ her ikisinin de ortak kenarı iken $|DB| = |DC|$ ve $|AB| = |AC|$ olması iki üçgenin üç kenar uzunluğunun da karşılıklı olarak birbirlerine eşit olması demektir. Bu da K.K.K. Eşlik teoremi gereğince ADB ile ADC üçgenlerinin eş olması demektir. Bu durumda $m(DAB) = m(DAC)$ olacağını biliyoruz. O halde $[AD]$ aynı zamanda A'nın iç açıortayıdır.

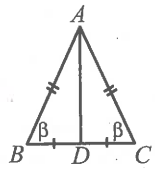


Sonuç 2. *İkizkenar bir üçgende tepeden inen kenarortay aynı zamanda yüksekliktir.*



Yukarda ADB ile ADC üçgenlerinin eşliğini bulmuştuk. O halde bu eşlikten dolayı $m(ADB) = m(ADC)$ olmalıdır. Bu açıların ölçülerine θ dersek, CDB bir doğru açı olduğundan $2\theta = 180°$ eşitliğine erişiriz ki bu da $\theta = 90°$ anlamına gelir. Demek ki $[AD]$ kenarortayı aynı zamanda yükseklik vazifesini de görürmüş.

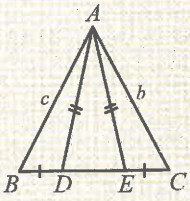
Sonuç 3. *İkizkenar bir üçgende ikiz kenarları gören açılar eştir.*



Aynı şekilden devam edelim. ADB ile ADC üçgenlerinin eşliğini bulmuştuk. O halde bu eşlikten dolayı $m(ABD) = m(ACD)$ olmalıdır.

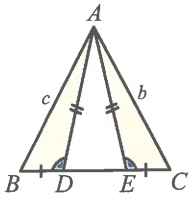
Açıların eşliği, eşit ölçülü olmaları demek olduğundan anlıyoruz ki bir ikizkenar üçgende taban açılarından birinin ölçüsü örneğin β ise diğer taban açısının ölçüsü de β'dır.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = |AE|$
$|BD| = |EC|$
$|AB| = c$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre b ile c arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $b < c$ B) $b = c$ C) $b > c$ D) $b \neq c$ E) Hiçbiri

Çözüm: ADE ikizkenar üçgen olduğundan bu üçgende D ve E açıları eştir.

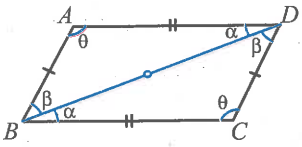


Eş açıların bütünlerleri de eş olduğundan $m(ADB) = m(AEC)$ olur. Bununla birlikte $|AD| = |AE|$ ve $|BD| = |EC|$ olduğundan K.A.K. Eşliği gereği ADB ile AEC üçgenleri eştir. O halde $b = c$ olmalıdır. A'dan BC'ye dik indirerek de bir çözüm yapılabilir. O çözümü size bırakayım.

Doğru cevap: B.

Sonuç 4. *Karşılıklı kenar uzunlukları birbirlerine eşit olan bir dörtgen paralelkenardır.*

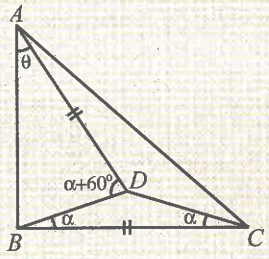
Dörtgenimiz $|AD| = |BC|$ ve $|AB| = |CD|$ olmak üzere $ABCD$ dörtgeni olsun.



Derhal $[BD]$ köşegenini çizelim. ABD ile CDB üçgenlerinin kenar uzunlukların karşılıklı olarak birbirlerine eşit uzunlukta olduğunu fark ettiniz mi? İşte bu yüzden bu üçgenler K.K.K. eşliği gereği birbirlerine eştirler.

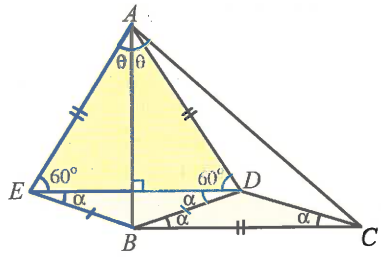
O halde $m(BDA) = \alpha$ dersek $m(DBC) = \alpha$ ve $m(ABD) = \beta$ dersek $m(CDB) = \beta$ olur. Bu da iç ters açıların karşıtı gereği $AD \,//\, BC$ ve $AB \,//\, CD$ demektir.

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |DC|$
$|AD| = |BC|$
$m(DBC) = m(DCB) = \alpha$
$m(ADB) = 60° + \alpha$
olduğuna göre
θ kaç derecedir?



A) α B) $15° + \alpha$ C) $30° - \alpha$ D) $30°$ E) 2α

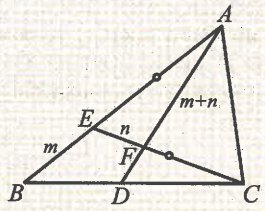
Çözümü: Yan şekildeki gibi $BCDE$ paralelkenarını oluşturalım.



$m(BDE) = \alpha$ olacağından $m(EDA) = 60°$ olur. $|BC| = |ED| = |DA|$ olduğundan ADE bir eşkenar üçgendir. Diğer yandan AEB ile ADB üçgenleri K.K.K. eşliği gereğince eş olduklarından $\theta = 30°$ bulunur.

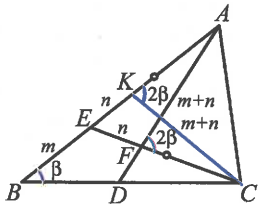
Doğru cevap: D.

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$AE \cap CD = \{F\}$
$|EA| = |EC|$
$|BE| = m$ br
$|EF| = n$ br
$|AF| = m + n$ br
olduğuna göre AFC açısının ölçüsü,
B açısının ölçüsünün kaç katıdır?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

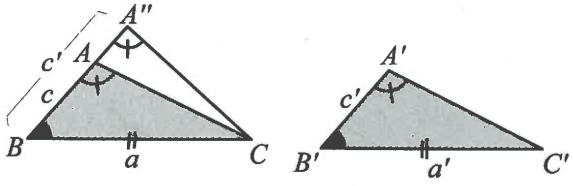
Çözümü: *AEC* ikizkenar üçgen olduğundan, $[AE]$ üzerinde $|EF| = |EK| = n$ br olacak şekilde bir K noktası alıp $[CK]$'yi çizelim.



AEF ile *CEK* üçgenleri K.A.K. gereğince eş olur. Bu yüzden $|CK| = m + n$ br dir. Bu da *CKB* üçgeninin de ikizkenar olduğu anlamına gelir. $m(ABC) = \beta$ dersek *BCK* açısının da ölçüsü β olacağından $m(AKC) = 2\beta$ olur. Diğer yandan $|AK| = |CF|$, $|AF| = |CK|$ ve ortak $|AC|$'den dolayı *AKC* ile *AFC* üçgenleri de K.K.K. gereğince eştirler. O halde $m(AFC) = 2\beta$ olur. Demek ki sorulan oran 2'ymiş.

Doğru cevap: C.

K.A.A Eşlik Teoremi. *İkişer açısı ve karşılıklı birer kenarı eş olan iki üçgen birbirine eştir.*



Kanıt: $a = a'$, $m(A) = m(A')$ ve $m(B) = m(B')$ kabul edebiliriz. $c' > c$ olduğunu farz ederek, $[BA$ üzerinde $|BA''| = |B'A'|$ olacak şekilde A'' noktası alalım. $A''BC$ ile $A'B'C'$ üçgenleri K.A.K. eşliği gereği eş olduğundan $m(A'') = m(A')$ olmalıdır. Fakat, CAA'' üçgeninde dış açı teoremi uygulandığında

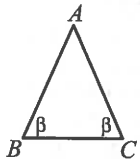
$$m(CAB) = m(CA''A) + m(ACA'')$$
$$> m(A'')$$
$$= m(A)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Öyle ise

$$A'' = A \text{ olup } c = c'$$

olur. $c' < c$ kabul edilseydi de benzer bir çelişki bizi karşılardı. Bu da iki üçgenin eşliğini kanıtlar.

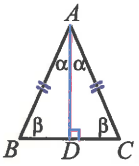
Daha önce ikizkenar üçgenlerde ikiz kenarları gören taban açılarının eş olduğunu kanıtlamıştık. Peki, bu teoremin karşıtı da doğru mu acaba? Yani bir üçgeninin iki iç açısı eşit ölçüdeyse bu üçgenin iki kenarı eşit boyda mıdır?



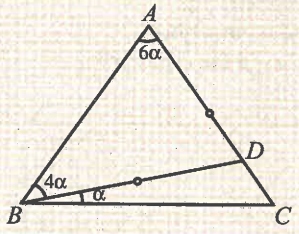
Uzun lafın kısası, yandaki şekil için $|AB| = |AC|$ diyebilir miyiz?

Buna da cevabımız evet!

Bu sefer A'dan kenarortay değil de yükseklik indirelim. *ADB* ile *ADC* üçgenlerinin üç iç açısının da karşılıklı olarak eş olduklarını fark ettiniz mi? Aynı zamanda iki üçgende de $[AD]$ kenarı ortaktır. O halde K.A.A. durumu sağlanmaktadır. Bu yüzden bu üçgenler eştir. Eş üçgenlerde eş açıların gördükleri kenarlar eşit boyda olması gerektiğinden $|AB| = |AC|$'dir.

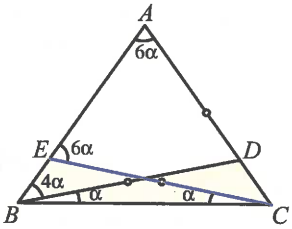


Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [AC]$
$|BD| = |AC|$
$m(CAB) = 6\alpha$
$m(ABD) = 4\alpha$
$m(DBC) = \alpha$
olduğuna göre
α kaç radyandır?



A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{15}$ C) $\frac{\pi}{16}$ D) $\frac{\pi}{17}$ E) $\frac{\pi}{18}$

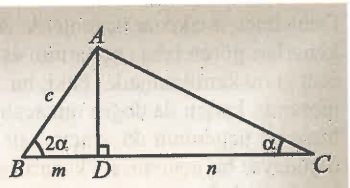
Çözüm: $[AB]$ üzerinde öyle bir E noktası alalım ki *ECB* açısının ölçüsü α olsun.



Bu durumda $m(AEC) = 6\alpha$ olacağından *ACE* ikizkenar üçgen yani $|CA| = |CE|$ olur. Öyleyse $|BD| = |CE|$ oldu demektir. Şimdi *EBC* ile *DCB* üçgenlerine bakalım. K.A.K gereğince eştirler. O halde $m(DCB) = 5\alpha$ olması gerektiğinden $m(ACE) = 4\alpha$ olmalıdır. Herhangi bir üçgenin iç açı ölçüleri toplamından $16\alpha = \pi$ bulunur.

Doğru cevap: C.

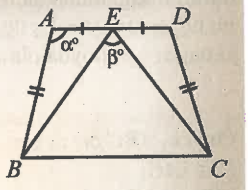
15.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(ABC) = 2\alpha$
$m(BCA) = \alpha$
$|AB| = c$ br
$|BD| = m$ br
$|DC| = n$ br



olduğuna göre c'nin m ve n türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

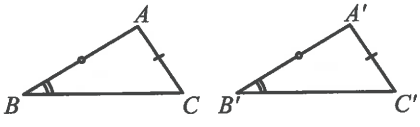
A) $3m - n$ B) $2m - n$ **C)** $n - m$
D) $2n - m$ E) $3n - 2m$

16.
$ABCD$ bir dörtgen
$E \in [AD]$, $AD \,//\, BC$
$|AE| = |ED|$, $|AB| = |DC|$
$m(DCE) = 20°$
$m(DAB) = \alpha°$
$m(CEB) = \beta°$
olduğuna göre
$2\alpha - \beta$ farkı kaçtır?



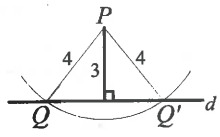
A) 90 B) 120 C) 135 **D)** 140 E) 165

Eşliğin K.A.K. tanımında A harfinin K harflerinin arasına yazılması, 'öyle olunca simetrik görünüyor' diye değildir. Yani K.K.A. veya A.K.K. deme hakkına sahip değiliz. Peki, uygun koşullar altında böyle eşlikler de var mıdır? Şekil çizelim:



Yukarda resmedilen iki üçgen eştir denebilir mi? Yani, karşılıklı iki kenar uzunluğuyla, bunların belirttiği değil de diğer karşılıklı açılardan herhangi birinin ölçüsü eşit olsa üçgenler yine eştir diyebilir miyiz? Hem sorunun kendisi çok hoş, hem de cevabı. Olmazsa olmaz bu soruyu ve cevabını lütfen tam anlamıyla idrak edin.

Sorunun cevabı tabii ki, ''hayır''. Nedeni basit. Anlatayım: Bir d doğrusu ve bu doğruya uzaklığı 3 birim olan bir P noktası düşünün. Doğru üzerinde bu noktaya 4 birim uzaklıkta bulunan kaç nokta vardır?



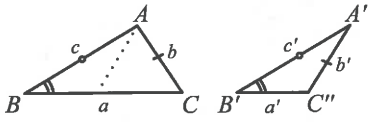
P noktasını merkez kabul eden 4 birim yarıçaplı bir çember çizilirse, bu çember doğruyu şekilde gösterildiği gibi Q ve Q' gibi iki farklı noktada keseceğinden, 'Tabii ki 2' denir. Dolayısıyla $B'C'$ üstünde $|AC| = |A'C'| = |A'C''|$ olacak şekilde bir C'' noktası daha olabilir. Bu yüzden bu eşlikten her zaman bahsedilemez. "Her zaman" dedik, çünkü bazen bahsedilebilir. Örneğin, noktanın doğruya uzaklığı 3 birim ise doğru üzerinde bu noktaya uzaklığı 3 birim olan tek bir nokta olabileceğinden yani farklı bir C'' noktası bulunamayacağından bu üçgenler eş olur. Yani o noktadan doğruya istenilen uzunlukta doğru parçası çizildiği zaman, doğruyu ne tür bir açıyla kestiğini bilmemiz lazımmış. Bunu aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Tanımda geçen ''türdeş'' kelimesinin ne anlama geldiğini bilmeyenler olabilir, hemen bir tanım verelim:

İki açının ölçülerinin her ikisi de dar, her ikisi de dik veya her ikisi de genişse, yani aynı tür açıysa, bu açılara **türdeş açı** denir.

K.K.A.A^T Eşlik Teoremi. *İki üçgen arasında K.K.A. durumu varsa ve ayrıca üçüncü kenarlara ait açılar türdeş ise üçgenler birbirine eştir.*

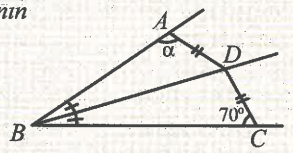
Kanıt: K.K.A. durumuna uyan üçgenler ABC ve $A'B'C'$ olsunlar. $b = b'$, $c = c'$, $m(B) = m(B')$ olup, ayrıca $m(C)$ ile $m(C')$ türdeş olsun. Bir de $a' \neq a$ kabul edelim, sözgelimi $a' < a$ olsun.



[BC üzerinde $|BC''| = |B'C'|$ olmak üzere C'' noktasını alalım. K.K.A. tanımından $ABC'' \cong A'B'C'$ olur ve bundan dolayı $|AC'| = |A'C'|$ olup $AC''C$ üçgeni ikizkenar olur. C'' noktası, B ve C noktaları arasında olduğundan $m(C) = 90°$ ve $m(C') = 90°$ olamaz. Bu durumda $AC''C$ üçgeninde $m(C')$ dış açı ölçüsü $m(C)$ iç açı ölçüsünden büyük olur. $m(C)$ ile $m(C')$ nün türdeş olmadığı gösterilmiş olur ki bu sayıltıya (kabulümüze) aykırıdır.

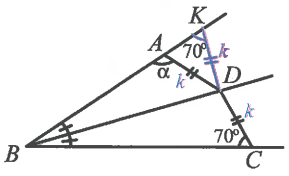
$a' > a$ durumunda da benzer bir çelişki çıkar. Dolayısıyla $a' = a$ olursa bu üçgenler eştir.

Örnek. *Şekildeki ABC açısının açıortayı [BD'dir.*
|DA| = |DC|
m(BCD) = 70°
m(DAB) = α
olduğuna göre α'nın derece cinsinden alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 70 B) 80 C) 90 D) 110 E) 140

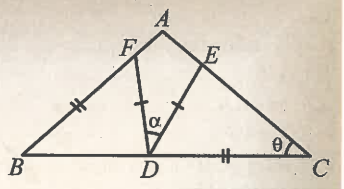
Çözüm: *ABD* ile *CBD* üçgenlerinin iki kenarı ve bir iç açısı eş diye bu üçgenlere eş demeyin sakın. K.K.A. durumunun bazen eşliğe yetmediğini yukarda açıkladık.



[*BA* üzerindeki bir *K* noktası için *ADK* ikizkenar üçgenini oluşturalım. |*DC*| = |*DA*| = |*DK*| = *k* br olsun. *BKD* açısının dar, *BAD* açısının geniş olduğuna dikkat ediniz. Yani *BCD* açısıyla türdeş olan *BKD* açısıdır. Bu yüzden eş olan üçgenler *BKD* ile *BCD* üçgenleridir. Demek ki α'nın 70° olma durumu da var 110° olma durumu da var. Küçük olan 70 değeri cevap olacak.

Doğru cevap: A.

17.
ABC bir üçgen
|AB| = |AC|
|FB| = |DC|
|DE| = |DF|
m(FDE) = α
m(BCA) = θ



***BDF* ile *CED* açıları türdeş olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

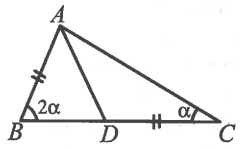
A) α = θ B) θ = 2α C) α + θ = 90
D) θ = α + 30 E) 3θ + 2α = 180

Eşlik aksiyomları ve temel teoremleri bununla birlikte bitmiş oldu. Şimdi daha önce karşılaştığımız ve bundan sonra da karşılaşacağımız geometrik nesnelerin hangilerinin herhangi bir çiftinin daima birbirleriyle eş olduklarını listeleyelim:

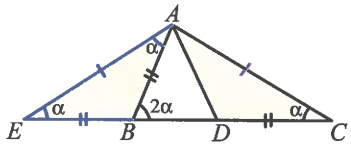
Tüm noktalar, tüm doğrular, tüm düzlemler ve aynı ölçüye sahip tüm açılar kendi aralarında eştir.

İKİZKENAR ÜÇGENLERLE İLGİLİ EŞLİK PROBLEMLERİ

Teorem. *ABC bir üçgen*
m(ABC) = 2·m(ACB) = 2α
D ∈ [BC]
|AB| = |DC|
ise |AB| = |DC| = |AD|'dir.

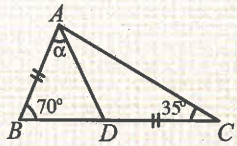


Kanıt: Verilere göre |*AC*| ≠ |*AB*| olduğu aşikar. O halde *BC* üzerinde *CAE* ikizkenar üçgen olacak şekilde bir *B*'den farklı bir *E* noktası vardır.



CAE ikizkenar üçgeni çizilirse *m*(*AEC*) = α ve *m*(*BAE*) = α olacağından *ABE* üçgeni de ikizkenar olur. Buradan |*AE*| = |*AC*|, |*EB*| = |*CD*| ve *m*(*AEB*) = *m*(*ACD*) olduğundan *AEB* ~ *ACD* eşliği görülerek |*AB*| = |*AD*| olduğu kanıtlanmış olur. Bu kural **α – 2α kuralı** olarak bilinir. Teoremin tersi zaten aşikar.

Örnek. *ABC bir üçgen*
D ∈ [BC]
|AB| = |DC|
m(ABC) = 70°
m(BCA) = 35°
olduğuna göre
m(DAB) = α kaç derecedir?

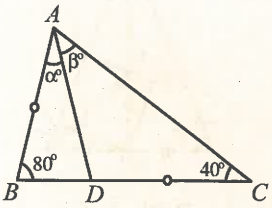


A) 35 B) 40 C) 45 D) 60 E) 70

Çözüm: Sorumuz α-2α kuralına uymaktadır. O halde |*BA*| = |*AD*| = |*DC*| olmalıdır. *DAB* üçgeni ikizkenar olduğundan taban açılarının ölçüleri 70'er derece olup tepe açısının ölçüsü 40° dir.

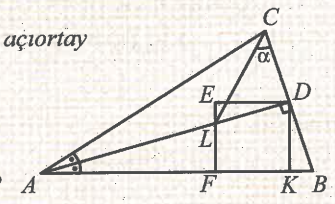
Doğru cevap: B.

18.



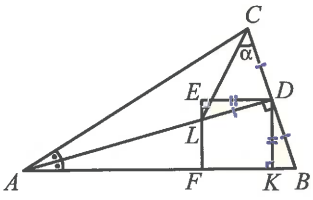
β – α farkı kaçtır?

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD bu üçgene ait bir iç açıortay
AD ⊥ BC
DEFK bir kare
AD ∩ EF = {L}
olduğuna göre
m(DCL) kaç derecedir?



A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm: *ABC* üçgeninde [*AD*] hem iç açıortay hem de yükseklik olduğundan *ABC* ikizkenardır ve [*AD*] aynı zamanda kenarortaydır.

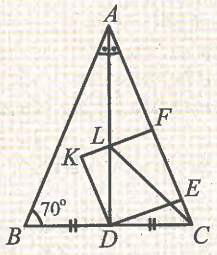


$|BD| = |DC|$ eşitliğini not edelim. Diğer yandan hem *BDL* hem de *KDE* açıları dik diye *BDK* ile *LDE* açıları eştir. Aynı zamanda $|KD| = |DE|$ olduğundan *DKB* ile *DEL* dik üçgenleri eştir. Bu eşlikten dolayı $|LD| = |BD|$ olur. $|BD| = |DC|$ olduğundan $|LD| = |DC|$ olur ki bu da *LDC* üçgeninin ikizkenar dik üçgen olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $m(DCL) = 45°$ dir.

Doğru cevap: E.

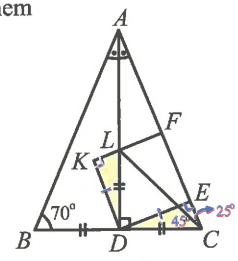
Örnek. *ABC bir üçgen*
AD bu üçgene ait bir iç açıortay
|BD| = |DC|
DEFK bir kare
AD ∩ FK = {L}
m(ABC) = 70°

olduğuna göre
m(LCA) kaç derecedir?



A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

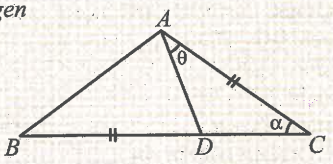
Çözüm: *ABC* üçgeninde [*AD*] hem iç açıortay hem de kenarortay olduğundan *ABC* ikizkenardır ve [*AD*] aynı zamanda yüksekliktir. Hem *KDE* hem de *LDC* açıları dik diye *KDL* ile *EDC* açıları eştir. Diğer yandan $|KD| = |DE|$ olduğundan *LKD* ile *CED* dik üçgenleri eştir.



Bu eşlikten dolayı $|LD| = |CD|$ olur. Bu da *LDC* üçgeninin ikizkenar dik üçgen olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $m(DCL) = 45°$ dir. *CAB* ikizkenar üçgen olduğundan $m(BCA) = m(ABC) = 70°$ olmalıdır. Buradan $m(LCA) = 25°$ olarak bulunur.

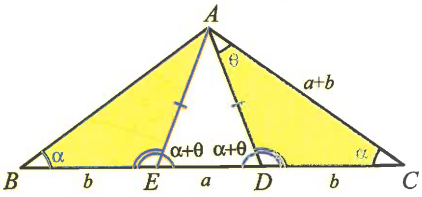
Doğru cevap: C.

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
D ∈ [BC]
|AC| = |BD|
$3\alpha + 2\theta = 180°$
olduğuna göre
m(B) aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\frac{1}{2}\alpha$ B) $15° + \alpha$ C) $30° - \alpha$ D) α E) 2α

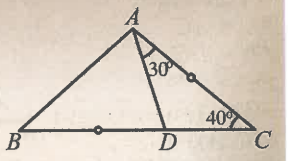
Çözümü: $m(ADB) = \alpha + \theta < 90°$ olduğundan [*BD*] üzerinde *DAE* üçgenini ikizkenar yapacak şekilde bir *E* noktası alabiliriz. Alalım hemen.



Bu durumda üst şekilden de görülebileceği üzere *DAE* açısının ölçüsü α olur. Bu da *ECA* üçgeninin de ikizkenar olacağı anlamına gelir. $|ED| = a$ br ve $|DC| = b$ br olsun. $|CA| = a + b$ br olur. Soruda $|BD| = |AC|$ verildiğinden $|BE| = b$ br olduğu anlaşılır. Buradan *ADC* ile *AEB* üçgenlerinin eşliği görülür (K.A.K.), demek ki $|AC| = |AB|$. O halde $m(B) = \alpha$.

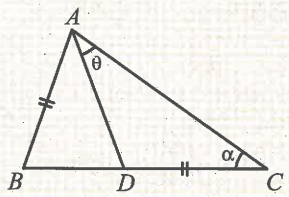
Doğru cevap: D.

19.
ABC bir üçgen
D ∈ [BC]
|AC| = |BD|
m(C) = 40°
m(CAD) = 30°
olduğuna göre
***m(B)* aşağıdakilerden hangisine eşittir?**



A) 30° B) 35° C) 40° D) 45° E) 50°

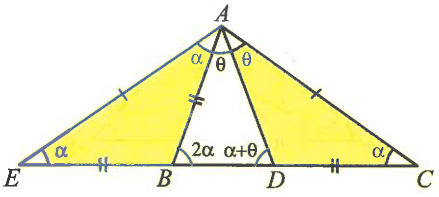
Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|AB| = |DC|$
$m(BCA) = \alpha$
$m(CAD) = \theta$
$3\alpha + 2\theta = 180°$



olduğuna göre α *ile* θ *arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\alpha = \theta = 36°$ B) $\alpha = 2\theta = 45°$ C) $\theta = 2\alpha = 360°/7$
D) $\alpha + \theta = 75°$ E) $\alpha + \theta = 90°$

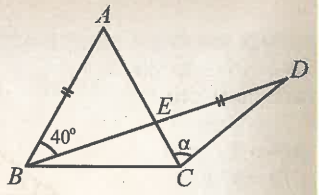
Çözümü: *DB*'yi *B* yönünde uzatalım. [*DB* üzerinde tepesi *E* olacak şekilde *DAE* ikizkenar üçgenini oluşturalım.



$m(EDA) = m(DAE) = \alpha + \theta$ olup $3\alpha + 2\theta = 180$ verildiğinden $m(E) = \alpha$ olur. Bu da *CAE* üçgeninin ikizkenar olduğu anlamına gelir ki $|AC| = |AE|$'dir. Dikkat edilecek olursa karşımıza çıkan şekil az önce gösterdiğimiz soru tipinde öğrendiğimiz şekil. Buradan *AEB* ile *ACD* üçgenlerinin K.A.K. gereğince eşliği görülür. O halde $\alpha = \theta$ olacağından verilen eşitlik gereği $\alpha = 36°$.

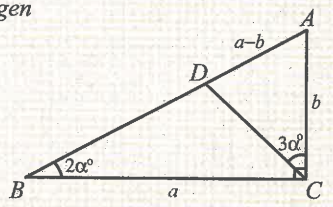
Doğru cevap: A.

20.
ABC bir eşkenar üçgen
B, E, D doğrudaş
$|BA| = |ED|$
$m(ABD) = 40°$
$m(ACD) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 45 B) 60 C) 75 **D) 80** E) 90

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BC \perp CA$
$D \in [BA]$
$m(ABC) = 2\alpha$
$m(DCA) = 3\alpha$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AD| = a - b$ br
olduğuna göre α *kaçtır?*

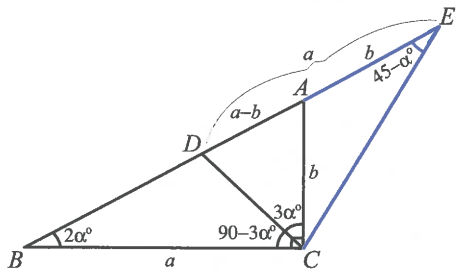


A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Çözüm: Öncelikle $m(DCB) = 90 - 3\alpha°$ olduğunu not edelim. $m(ABC) = 2\alpha°$ bilgisi de soruda verilmiş. Fark edilmesi gereken eşitlik şu:

$$3 \cdot m(ABC) + 2 \cdot m(BCD) = 180°$$

Bu eşitliği bir önceki sorudan hatırlamanız gerekiyor. Şekli tamı tamına o şekil yapmak için [*BA*]'yı *A* yönünde *b* br uzatıp vardığımız noktaya *E* diyelim. Amacımız $|DE|$'yi *a* br yapmaktı, yaptık.



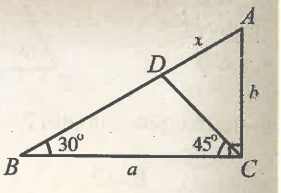
Diğer yandan *ABC* üçgeninde $m(A) = 90 - 2\alpha°$ olduğundan $m(E) = 45 - \alpha°$ olur. Daha önce kanıtladığımız üzere

$$2\alpha = 45 - \alpha$$

olması gerekir ki buradan $\alpha = 15$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

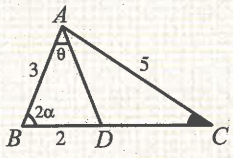
21.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$m(B) = 30°$
$m(BCD) = 45°$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AD| = x$ br



olduğuna göre *x*'in *a* ve *b* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

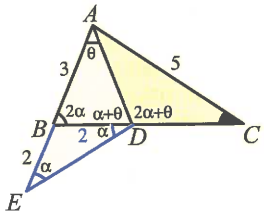
A) $a - b$ B) $2a - b$ C) $2b - a$ D) $3b - a$ E) $a - 2b$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|CA| = 5$ br
$|AB| = 3$ br
$|BD| = 2$ br
$m(DAB) = \theta$
$m(ABC) = 2\alpha$
$3\alpha + 2\theta = 180°$
olduğuna göre $m(BCA)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*



A) α B) 2α C) θ D) 2θ E) $\theta - \alpha$

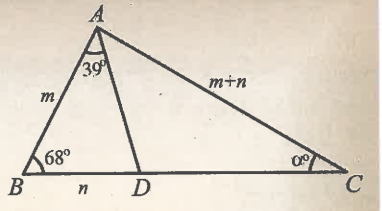
Çözüm: Sorunun esprisi $2 + 3 = 5$ olmasıdır. Bu amaçla $[AB]$ kenarını B yönünde 2 br uzatarak DBE ikizkenar üçgenini oluşturalım.



Bu üçgende B'ye ait dış açı ölçüsü 2α olduğundan B ve D açılarının ölçüleri α olur. ABD üçgeninde iç açıların ölçüleri toplamından $m(BDA) = \alpha + \theta$ ve dış açı teoreminden $m(ADC) = 2\alpha + \theta$ olur. Şimdi CAD ile EAD üçgenlerine odaklanalım. K.K.A. durumu halihazırda var. O zaman bu üçgenlerde C ve E açıları türdeşse eşlikten bahsedebiliriz. $2\alpha + \theta$ geniş olduğundan hem E hem de C açısı dardır yani türdeştirler. O zaman bu eşlikten dolayı $m(BCA) = \alpha$ olur.

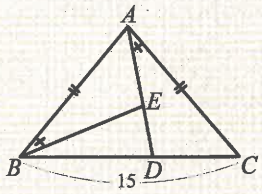
Doğru cevap: A.

22.
ABC bir üçgen
$|AB| = m$ br
$|BD| = n$ br
$|AC| = m + n$ br
$m(B) = 68°$
$m(BAD) = 39°$
$m(C) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



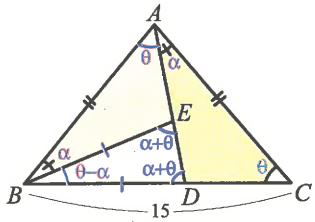
A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 39

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |BD|$
$m(CAD) = m(ABE)$
$|BC| = 15$ br
olduğuna göre
$|AE| + |AD|$ *toplamı*
kaç br *dir?*



A) 30 B) 20 C) 15 D) 12 E) 7,5

Çözüm: $m(CAD) = m(ABE) = \alpha$ diyelim. Ayrıca $m(BCA) = \theta$ olsun. $|AB| = |AC|$ olduğundan $m(ABC) = \theta$ olmalıdır, o halde $m(EBD) = \theta - \alpha$ dır. Soruda $|AD| = |BD|$ verildiğinden $m(DAB) = \theta$ eşitliğini de görelim.



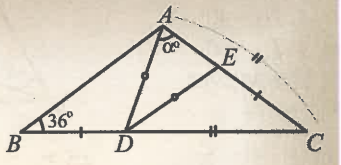
Şimdi sorunun can alıcı kısmına geldik. ABE ve CDA üçgenlerinde dış açı teoreminden $m(BED) = m(BDE) = \alpha + \theta$ olur. Bu da $|BD| = |BE|$ demek olur. O halde $|BE| = |AD|$ eşitliğinden bahsedilebilir. Şu durumda ABE ile CAD üçgenleri K.K.A. eşliği gereğince eş olurlar. Bu eşlikten $|AE| = |DC|$ çıkar. O halde

$$\begin{aligned} |AE| + |AD| &= |DC| + |AD| \\ &= |DC| + |DE| \\ &= |DC| + |BD| \\ &= |BC| \\ &= 15 \text{ br} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

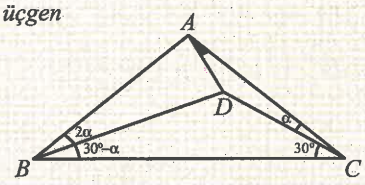
Doğru cevap: C.

23.
ABC bir üçgen
$|AD| = |DE|$
$|BD| = |EC|$
$|CD| = |CA|$
$m(B) = 36°$
$m(CAD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 54 B) 60 C) 66 D) 72 E) 78

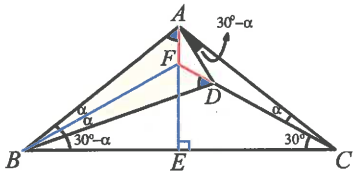
Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$D \in (ABC)$
$m(ABD) = 2\alpha$
$m(DBC) = 30° - \alpha$
$m(BCD) = 30°$
$m(DCA) = \alpha$



olduğuna göre CAD açısının ölçüsünün α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) α B) 15° + α C) 30° – α D) 30° E) 2α

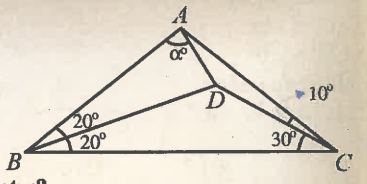
Çözümü: Burada ilk dikkat edilmesi gereken nokta *ABC* üçgeninin *B* ve *C* açılarının eşit ölçülü olmalarından dolayı *ABC* üçgeninin ikizkenar olmasıdır. Her ikizkenar üçgende yapılması gerektiği gibi evvela *A*'dan *BC*'ye bir dik indireceğiz. Dikme ayağına *E* diyelim.



CD'nin *AE*'yi kestiği nokta *F* olsun. [*BF*]'yi de çizelim. $AE \perp BC$ ve $|BE| = |EC|$ olması *FBC* üçgeninin de ikizkenar olmasını gerektirir. O halde $m(FBD) = \alpha$, dolayısıyla $m(ABF) = \alpha$ olacaktır. Şimdi *BAF* ve *BDF* açılarının ölçülerinin $60° - \alpha$ olduğunu görüp [*BF*] ortak kenarından dolayı *BAF* ile *BDF* üçgenleri A.K.A. veya K.A.A. eşliği gereğince eştirler. Bu eşlikten dolayı *ABD* üçgeni ikizkenar bulunur ki tepe açısının ölçüsü 2α olduğundan taban ölçüleri $90° - \alpha$ olmalıdır. Buradan $m(FAD) = 30°$, dolayısıyla $m(DAC) = 30° - \alpha$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

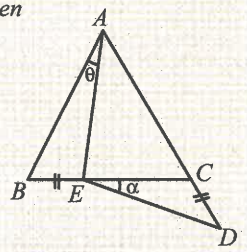
24.
ABC bir üçgen
$m(ABD) = 20°$
$m(DBC) = 20°$
$m(BCD) = 30°$
$m(DCA) = 10°$
$m(DAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 90 **B)** 80 C) 75 D) 70 E) 60

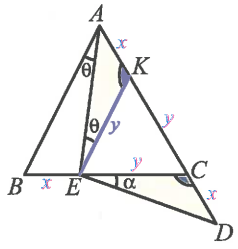
EŞKENAR ÜÇGENLERLE İLGİLİ EŞLİK PROBLEMLERİ

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
A, C, D doğrusal
$|BE| = |CD|$
$m(BAE) = \theta$
$m(CED) = \alpha$
olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\alpha = \theta$ B) $\alpha = 2\theta$ C) $\theta = 2\alpha$
D) $\alpha + \theta = 30°$ E) $\alpha + \theta = 60°$

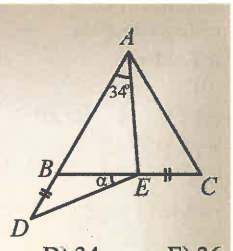
Çözümü: *E*'den *BA*'ya paralel çizilen doğru *CA*'yı *K*'de kessin.



AB // *EK* diye $m(AEK) = \theta$ ve *KEC* eşkenar üçgen olur. *AED* üçgeninin bir önceki soru tipi olduğunu fark ettiniz mi? $|EC| = |CK| = |KE| = y$ br ve $|BE| = |CD| = |KA| = x$ br olsun. $m(ECD) = m(EKA) = 120°$ olduğunu da görelim. Şu durumda *ECD* ile *EKA* eş olurlar. O halde $\alpha = \theta$ olmalıdır.

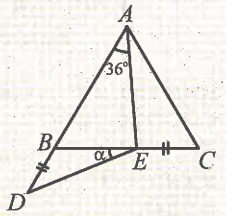
Doğru cevap: A.

25.
ABC bir eşkenar üçgen
A, B, D doğrusal
$|BD| = |EC|$
$m(EAD) = 34°$
olduğuna göre
$m(BED)$ kaç derecedir?



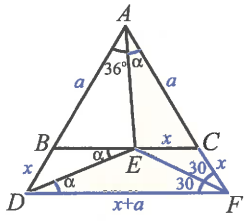
A) 15 **B)** 26 C) 30 D) 34 E) 36

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
A, B, D doğrusal
|DB| = |EC|
m(DAE) = 36°
olduğuna göre
m(DEB) = α kaç derecedir?



A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

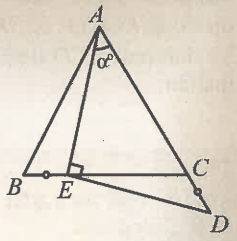
Çözüm: Üstteki sonuca göre cevap 24° ama biz farklı bir eşlik kullanarak çözelim. *ADF* eşkenar üçgenini oluşturalım.



BC // DF diye *m(EDF)* = α, *|BD| = |CF| = x* br ve bundan dolayı *FCE* ikizkenar olur. *m(CFE)* = 30° diye *m(DFE)* = 30° olur. Şu aşamada *AFE* ile *DFE* üçgenlerinin eşliği görülürse *m(FAE) = m(FDE)* = α olur. *m(FAD)* = 60° olduğundan α = 24° olarak bulunur.

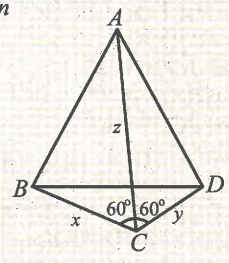
Doğru cevap: C.

26.
ABC bir eşkenar üçgen
A, C, D doğrusal
AE ⊥ ED
|BE| = |CD|
m(EAD) = α°
olduğuna göre
α kaçtır?



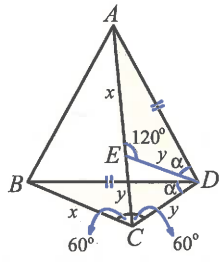
A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 **E)** 45

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
C dışarıda bir nokta
m(BCA) = m(ACD) = 60°
|CB| = x br
|CD| = y br
|CA| = z br
olduğuna göre x, y, z arasında
geçerli olan bağıntı
aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $y^2 = x \cdot z$ C) $z^2 = x \cdot y$
D) $x + z = 2y$ E) $z = x + y$

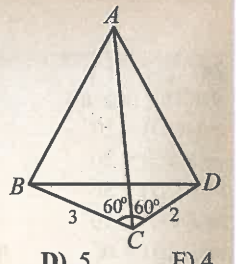
Çözümü: *m(ADC)* > 60° olduğundan *[AC]* üzerinde *m(CDE)* = 60° olacak şekilde bir *E* noktası alınabilir. *CDE* eşkenar üçgen olur.



Şimdi *BCD* ile *AED* üçgenlerine odaklanıyoruz. *|BD| = |AD|* ve *|CD| = |ED|* olduğunu biliyoruz. *m(CDB)* = α dersek, *m(EDA)* = α olacağından *BCD* ile *AED* üçgenleri eştir. Bu durumda *|BC| = x* br olduğundan *|AE|* de *x* br olmalıdır. O halde *|AC| = z = |CE| + |EA| = y + x* br olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

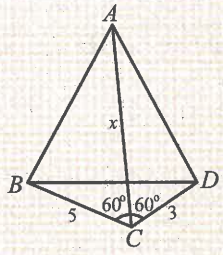
27.
ABD bir eşkenar üçgen
m(BCA) = 60°
m(ACD) = 60°
|BC| = 3 br
|CD| = 2 br
olduğuna göre
|AC| kaç br dir?



A) 8 B) 7 C) 6 **D)** 5 E) 4

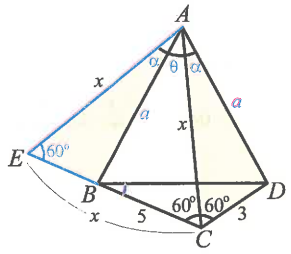
Bu teoreme Çember notlarında Batlamyus Teoremi'ni kullanarak tek satırlık bir kanıt verdik. Dileyen ona da bakabilir. Şimdi bu teoremin uygulanabileceği bir örneği başka bir teknikle çözeceğiz. Fazla çözüm tekniği bilmek göz çıkartmaz!

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
C dışarıda bir nokta
$m(BCA) = m(ACD) = 60°$
$|CB| = 5$ br
$|CD| = 3$ br
$|CA| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Üstte bulduğumuz eşitliği kullanarak cevabın 8 br olduğunu hemencecik söyleyebiliriz ama farklı bir eşlik kullanarak çözeceğiz. Hatta *BCD* özel üçgeninden $|BD| = 7$ br olduğunu biliyoruz. *ABC* üçgeninde bir kosinüs teoremiyle de cevaba ulaşılabilir. Neyse...

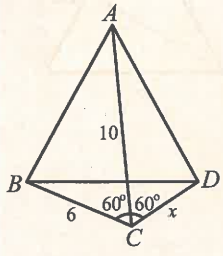


ACE eşkenar üçgenini oluşturalım. Böylelikle sorumuz daha önce A.A. Benzerliği dersinde bir uçları ortak olan iki eşkenar üçgen sorusuna dönüşmüş oldu.

$m(DAC) = \alpha$ ve $m(CAB) = \theta$ olsun. $\alpha + \theta = 60°$ olduğundan $m(BAE) = \alpha$ olur. Şu durumda *DAC* ile *BAE* üçgenlerinin üçer açısı da eş olup karşılıklı iki kenarı da eş olduğundan üçüncü kenarlar da eş olmalıdır. O halde $|BE| = |DC| = 3$ olduğundan $x = 5 + 3 = 8$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

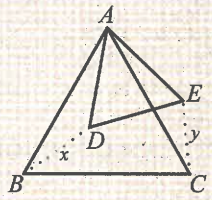
28.



ABD eşkenar üçgen ise *x* kaçtır?

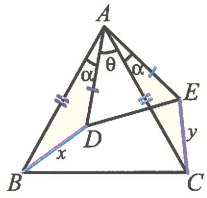
4

Soru Tipi. *ABC ve ADE birer eşkenar üçgen*
$|BD| = x$ br
$|CE| = y$ br
olduğuna göre x ile y arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x < y$ B) $x = y$ C) $x > y$ D) $x = 2y$ E) $y = 2x$

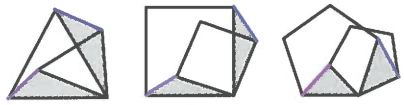
Çözümü: *ABC* ve *ADE* üçgenleri eşkenar olduklarından $|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |AE|$ olduğunu biliyoruz.



$m(BAD) = \alpha$ ve $m(DAC) = \theta$ dersek $\alpha + \theta = 60°$ olduğundan $m(CAE) = \alpha$ olur. Bu da K.A.K. gereği *BAD* ile *CAE* üçgenlerinin eş olması anlamına gelir. Madem eşler, eş açıları gördükleri kenarların boyları da eşit olmalıdır. O halde $x = y$'dir.

Doğru cevap: B.

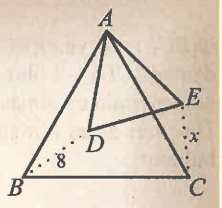
Bu eşlik sadece eşkenar üçgenlere has değildir.



Aynı kenar sayısına sahip iki düzgün çokgenin bir köşesi ortaksa daima böyle eşlikler belirir.

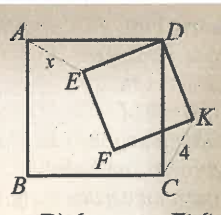
29.
ABC ve *ADE* birer eşkenar üçgen
$|BD| = 8$ br
$|CE| = x$ br

olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) 7 D) $\frac{15}{2}$ E) 8

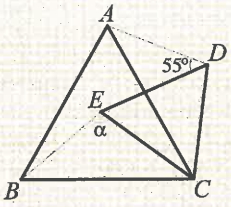
30.
$[ABCD]$ bir kare
$[DEFK]$ bir kare
$|CK| = 4$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

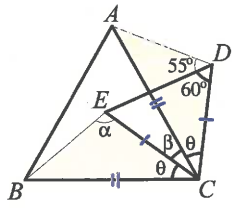
Örnek. *$[ABC]$ ve $[CDE]$ birer eşkenar üçgen*

$m(EDA) = 55°$
$m(CEB) = \alpha$
olduğuna göre
α kaç derecedir?



A) 100 B) 105 C) 110 D) 115 E) 120

Çözüm: $[ABC]$ ve $[CDE]$ üçgenleri eşkenar olduklarından $|BC| = |CA|$ ve $|CE| = |CD|$ olduğunu biliyoruz.

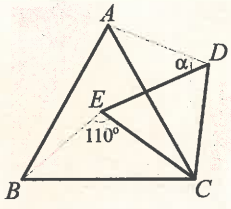


$m(BCE) = \theta$ ve $m(ECA) = \beta$ dersek $\theta + \beta = 60°$ olduğundan $m(ACD) = \theta$ olur. Bu da K.A.K. gereği BCE ile ACD üçgenlerinin eş olması anlamına gelir. Madem eşler, E ve D açıları da eş olmalıdır. Buradan $\alpha = 55° + 60° = 115°$ bulunur.

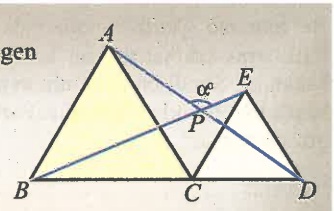
Doğru cevap: D.

31.
$[ABC]$ ve $[DEC]$ birer eşkenar üçgen

$m(BEC) = 110°$
olduğuna göre
$m(ADE) = \alpha$
kaç derecedir?

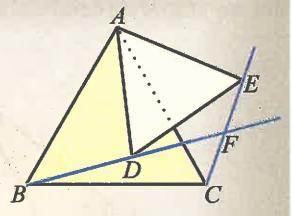


32.
$[ABC]$ ve $[ECD]$ eşkenar üçgen
B, C, D doğrusal
$AD \cap BE = \{P\}$
$m(APE) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



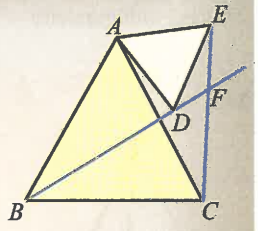
A) 150 B) 135 C) 120 D) 105 E) 90

33.
$[ABC]$ ve $[ADE]$ birer eşkenar üçgen
$BD \cap CE = \{F\}$
olduğuna göre
$m(BFC)$ kaç derecedir?



A) 30 B) 45 C) 60
D) 75 E) 120

34.
$[ABC]$ ve $[ADE]$ birer eşkenar üçgen
$BD \cap CE = \{F\}$
olduğuna göre
$m(BFC)$ kaç derecedir?

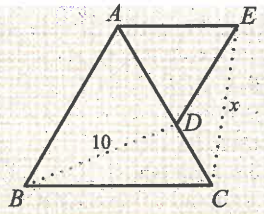


A) 30 B) 45 C) 60
D) 75 E) 120

Örnek. *ABC ve ADE birer eşkenar üçgen*

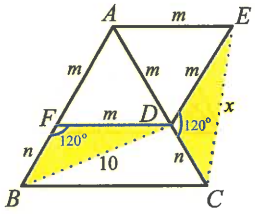
$|BD| = 10$ br
$|CE| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

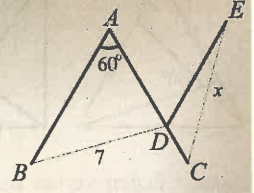
Çözüm: D'den BC'ye paralel çizilen doğru, AB'yi F'de kessin. ADF üçgeni de eşkenar üçgen olur. Bu üçgenin bir kenarının uzunluğuna m br diyelim.



$|FD| = |DA| = |DE| = m$ br olur. Diğer yandan $|FB| = n$ br olsun dersek, $|DC|$ de n br uzunlukta olur. EDC ve DFB açılarının ölçülerinin 120° olduğu da not edilirse, K-A-K eşliği gereğince EDC ile DFB üçgenleri eştirler. Bu yüzden $|BD| = |CE| = 10$ br bulunur.

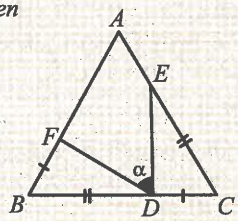
Doğru cevap: C.

35.
AB // ED
$m(A) = 60°$
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |DE|$
$|BD| = 7$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



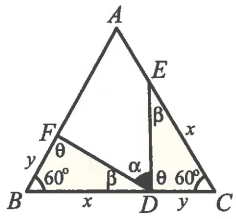
A) 6 **B) 7** C) 8 D) 10 E) 14

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
$F \in [AB]$, $D \in [BC]$, $E \in [CA]$
$|FA| = |DC|$
$|BD| = |CE|$
olduğuna göre
m(FDE) aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 108°

Çözümü: $|BD| = |CE| = x$ br ve $|FB| = |DC| = y$ br olsun. FBD ile DCE üçgenlerinin ikişer kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açılar da eş olduğundan FBD ile DCE üçgenleri eştir.



FBD üçgeninde F ve D açılarının ölçüleri θ ve β dersek, DCE üçgeninde de D ve E açılarının ölçüleri θ ve β olur. $\theta + \beta = 120°$ olduğundan $\alpha = 60°$ olarak bulunur.

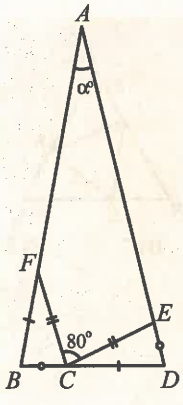
Doğru cevap: C.

60° burada rastgele bir değer değil, eşkenar üçgenin bir iç açısının ölçüsüdür.



Aynı durum karede olsa cevap 90°, düzgün beşgende olsa 108° olurdu.

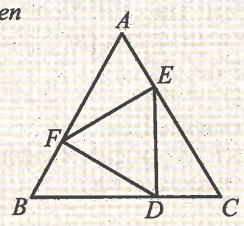
36.



α kaçtır?

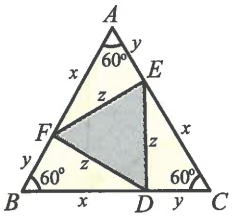
20

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
$F \in [AB], D \in [BC], E \in [CA]$
$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$
olduğuna göre FDE üçgeni için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?



A) Eşkenar üçgendir. B) Dik üçgendir.
C) İkizkenar dik üçgendir. D) 30°-60°-90° üçgenidir.
E) Hiçbiri

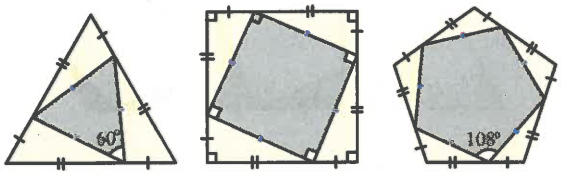
Çözümü: $|AF| = |BD| = |CE| = x$ br ve $|FB| = |DC| = |EA| = y$ br olsun.



FBD, *DCE* ve *EAF* üçgenlerinin ikişer kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açılar da eş olduğundan *FBD*, *DCE* ve *EAF* üçgenleri eştir. O halde $|FD| = z$ br dersek $DE| = |EF| = z$ br olur. *DEF* üçgeninin üç kenar uzunluğu da birbirlerine eşit olduğundan *DEF* eşkenar üçgendir.

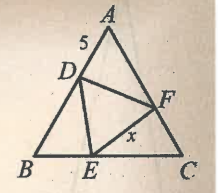
Doğru cevap: C.

Ortadaki şeklin eşkenar üçgen çıkması, *ABC* üçgeninin eşkenar üçgen verilmesindendi.



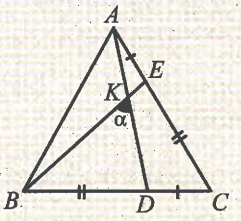
Eğer ilk şekil eşkenar üçgen yerine herhangi bir düzgün çokgen olsaydı ortadaki şekil de o düzgün çokgenin bir yavrusu olurdu!

37.
ABC ve *DEF* birer eşkenar üçgen
$|AD| = 5$ br
Çevre(*ABC*) = 39 br
olduğuna göre $|EF| = x$ kaçtır?



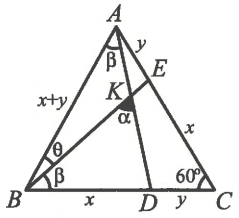
A) 3 B) 4 C) 5 **D) 7** E) 8

Soru Tipi. *ABC eşkenar üçgen*
$D \in [BC], E \in [CA]$
$|BD| = |CE|$
$|DC| = |EA|$
$AD \cap BE = \{K\}$
olduğuna göre
m(*DKB*) *kaç derecedir?*



A) 60 B) 55 C) 50 D) 45 E) 30

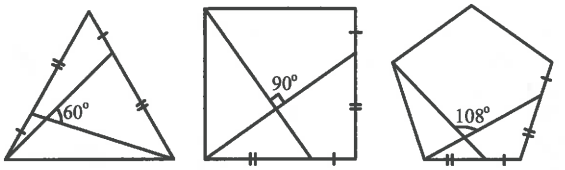
Çözümü: $|BD| = |CE| = x$ br ve $|DC| = |EA| = y$ br olsun. $|AB| = x + y$ br olur.



Şu durumda *ABD* ile *BCE* üçgenlerine bakılırsa ikişer kenarları eşit uzunluktayken bu kenarların belirttiği açıları da eş diye K.A.K. gereği *ABD* ile *BCE* eş olurlar. *m*(*DAB*) = β denirse *m*(*EBC*) = β olur. *m*(*ABE*) = θ olsun. θ + β = 60° olduğundan *ABK* üçgeninin iç açı ölçüleri toplanırsa α = 60° olarak bulunur.

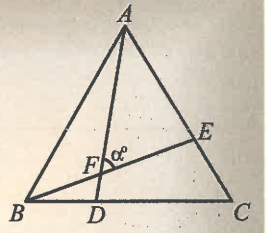
Doğru cevap: A.

Cevabın 60° çıkması *ABC* üçgeninin eşkenar olmasındandır.



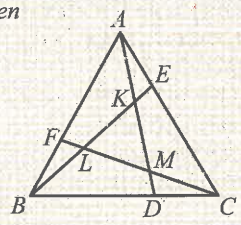
Eşkenar üçgen yerine başka bir düzgün çokgende aynı durum olsaydı, cevap o düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü olurdu!

38.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$E \in [CA]$
$|BC| = 3 \cdot |BD|$
$|AE| = 2 \cdot |EC|$
m(*AFE*) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



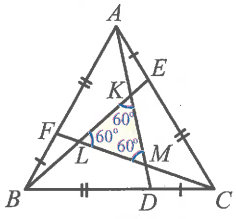
A) 30 B) 45 **C) 60** D) 75 E) 80

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen* $F \in [AB], D \in [BC], E \in [CA]$ $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$ *olduğuna göre KLM üçgeni için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?*



A) Eşkenar üçgendir. B) Dik üçgendir.
C) İkizkenar dik üçgendir. D) 30°-60°-90° üçgenidir.
E) Hiçbiri

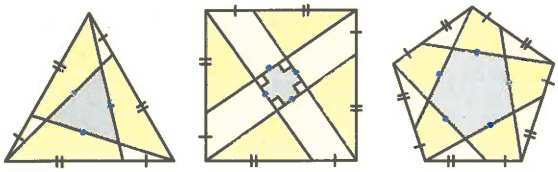
Çözümü: *ABD* ile *BCE* üçgenleri eştir.



O halde $m(BAD) = m(CBE)$ olduğundan $m(ABK) = m(BCM)$'dir. Dolayısıyla $m(MKL) = 60^\circ$ bulunur. Simetrik şekilde diğer benzerliklerden de faydalanarak $m(KLM) = 60^\circ$ bulunur. Dolayısıyla *KLM* üçgeni eşkenardır.

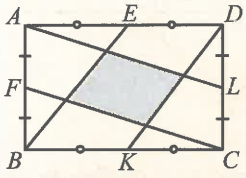
Doğru cevap: A.

Ortadaki şeklin eşkenar üçgen çıkması, *ABC* üçgeninin eşkenar üçgen olmasına bağlıdır.



Eğer eşkenar üçgen yerine başka bir düzgün çokgende aynı işlemler yapılırsa, ortada düzgün çokgenin yavrusu oluşur!

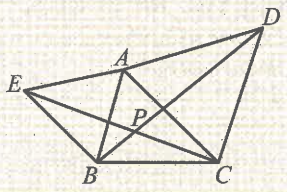
39.



Yukarda taranmış dörtgen hangi dörtgen ailesindendir?

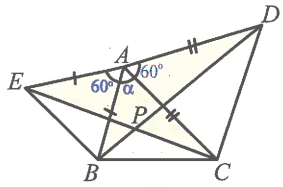
Paralelkenar

Soru Tipi. *ABC bir üçgen CDA ve AEB birer eşkenar üçgen* $BD \cap CE = \{P\}$ *olduğuna göre* $\frac{|BD|}{|CE|}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

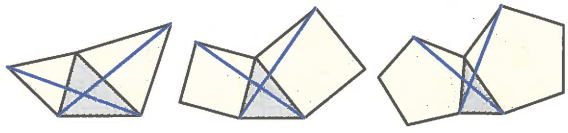
Çözümü: *CDA* ve *AEB* birer eşkenar üçgen oldukların-dan $m(DAC) = m(BAE) = 60^\circ$ olmalıdır. $m(CAB) = \alpha$ olsun.



Şimdi *CAE* ve *DAB* üçgenlerine odaklanıyoruz. $|AE| = |AB|$, $|CA| = |DA|$ ve $m(CAE) = m(DAB) = 60^\circ + \alpha$ olduğundan *CAE* ve *DAB* üçgenleri eştir. Bu yüzden $|CE| = |BD|$ olmalıdır. Dolayısıyla da oranları 1'dir.

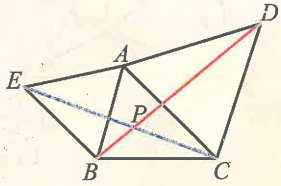
Doğru cevap: C.

Bu eşliğin oluşması için sadece eşkenar üçgen değil, diğer düzgün çokgenlerin yapıştırılması da yeter!



Hepsinde de maviyle gösterilmiş doğru parçalarının boyları eşittir.

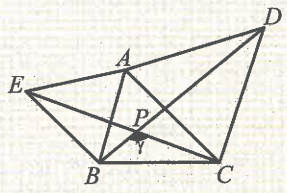
40.



AEB ve *ACD* birer eşkenar üçgen
$|EC| = 2x + 5$ br ve $|BD| = x + 8$ br ise x kaçtır?

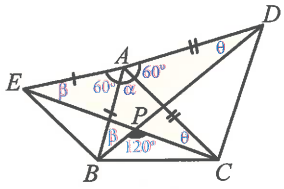
3

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
CDA ve AEB birer eşkenar üçgen
BD ∩ CE = {P}
m(CPB) = γ°
olduğuna göre γ kaçtır?



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

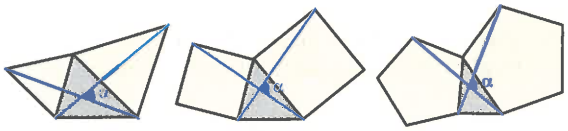
Çözümü: Lafı uzatmayalım. Bir önceki soruda *CAE* ve *DAB* üçgenlerinin eş olduklarını kanıtlamıştık.



CAE üçgeninin *C* ve *E* açılarının ölçülerine sırasıyla θ ve β dersek *DAB* üçgeninin *D* ve *B* açılarının ölçüleri sırasıyla θ ve β olmalıdır. Bu üçgenlerin herhangi birinin iç açılarının ölçüleri toplanırsa α + θ + β = 120° bulunur. Bu toplam *CABP* konkav dörtgeninde kullanılırsa *m(CPB)* = γ = 120° bulunur.

Doğru cevap: C.

Boyları eşit olan doğru parçalarının 120° ya da 60° ile kesişmeleri bir rastlantı değildir.

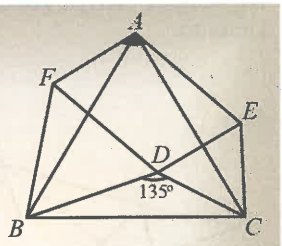


α = 60° α = 90° α = 108°

ABC üçgeninin kenarlarına hangi tip düzgün çokgen yapıştırılmışsa o düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsüyle kesişirler!

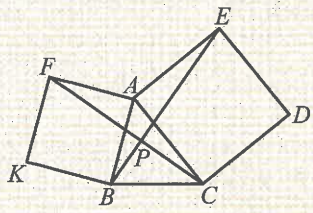
41.
ABC, FBD ve EDC
birer eşkenar üçgen
m(BDC) = 135°

olduğuna göre
***m(FAE)* kaç derecedir?**



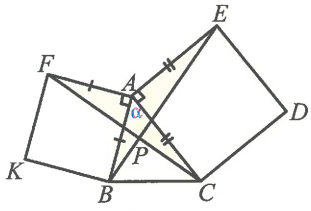
A) 90 **B)** 105 C) 120 D) 135 E) 150

Örnek. *ABC bir üçgen*
CDEA ve AFKB
birer kare
BE ∩ CF = {P}
|BE| = 10 br
olduğuna göre
|CF| kaç br dir?



A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20

Çözüm: Yukarda eşkenar üçgene ne yaptıysak burada da kareye aynısını yapacağız. Hemen *EAC* ve *BAF* açılarının ölçülerine 90° ifadesini yapıştıracağız.

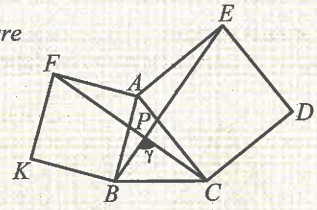


Diğer yandan *|AF| = |AB|*, *|AC| = |AE|* ve *m(CAF) = m(EAB)* = 90° + α olduğundan *CAF* ile *EAB* üçgenleri eştir. Bu eşlikten dolayı *|BE|* = 10 br ise *|CF|* = 10 br dir.

Doğru cevap: B.

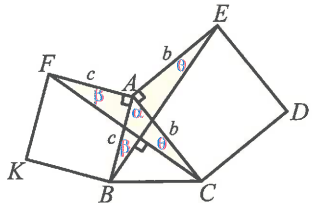
Örnek. *ABC bir üçgen*
CDEA ve AFKB birer kare

BE ∩ CF = {P}
olduğuna göre
m(CPB) = γ
kaç derecedir?



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: *CAF* ve *EAB* üçgenlerinin eş olduklarını daha önce kanıtlamıştık. *CAF* üçgeninin *C* ve *F* açılarının ölçüleri sırasıyla θ ve β olsun.



O halde *EAB* üçgeninin *E* ve *B* açılarının ölçüleri de sırasıyla θ ve β olur. Bu üçgenlerin herhangi birinde iç açıların ölçüleri toplanırsa α + θ + β = 90° bulunur. O halde *m(CPB)* = 90° olmalıdır.

Doğru cevap: A.

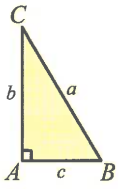
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dik Üçgen

Nihayet geometride uzunluk hesaplamalarına geçmiş bulunuyoruz. İlk öğreneceğimiz uzunluk hesapları dik üçgenin kenarlarına ait olacak. Önce dik üçgeni bir tanımlayalım, ardından kenar uzunluklarını nasıl hesaplayacağımızı öğreneceğiz.

Dik üçgen. Herhangi iki kenarı dik kesişen ya da başka bir ifadeyle (iç veya dış) bir açısı dik olan üçgenlere **dik üçgen** denir.

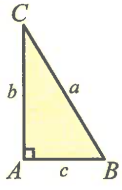


Dik açının karşısındaki kenara **hipotenüs**, diğer iki kenara ise **dik kenarlar** adı verilir. Yandaki şekle göre $[BC]$ kenarı hipotenüstür, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları da dik kenarlardır. Ayrıca hipotenüsün boyu a br, dik kenarların uzunlukları da b br ve c br dir.

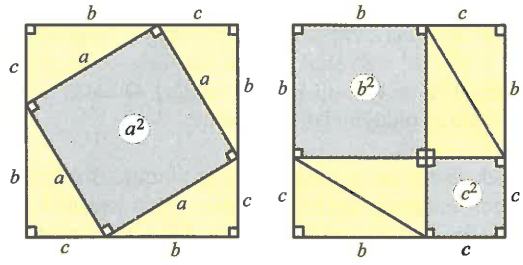
Şimdi bu a, b, c değerleri arasındaki ilişkiyi anlatan ünlü bir teorem verip kanıtlayacağız. Bu sayede herhangi iki kenarının uzunluğu bilinen bir dik üçgenin üçüncü kenarının uzunluğunu bulabileceğiz. Teorem, ilköğretimden beri bildiğimiz Pisagor Teoremi. Adı her ne kadar Pisagor olsa da, teoremin ilk defa Pisagor tarafından bulunmuş veya kanıtlanmış olduğunda ciddi şüpheler vardır. Fakat bu isim çok yaygın bir şekilde kullanıldığından biz de sürüye katılacağız. Teoremin günümüze kadar 400'den farklı kanıtı yapılmıştır. Biz şimdilik şu anki bilgilerimizle en anlaşılabilir olanı vereceğiz, geometride yol katettikçe diğer kanıtlardan da örnekler sunacağız. Neyse, çok uzatmadan teoremi verelim:

Pisagor Teoremi. *Bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.*

Yani yandaki şekle göre; $b^2 + c^2 = a^2$.

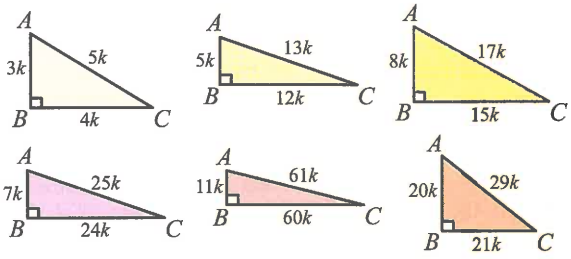


Kanıt: Hintli matematikçi *Bhaskara*'ya (M.S. 12'inci y.y.) izafe edilen bu kanıt Pisagor Teoremi'nin en zarif kanıtlarından biridir.



Sadece okuyucuyu şekle bakmaya davet eder. Buyrun!

Aşağıda bu teoremin koşullarını sağlayan en meşhur üçlüleri ve onların katlarını görmektesiniz.

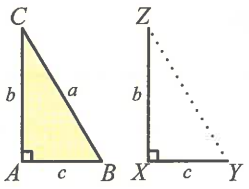


Tabi ki dik kenar uzunlukları a br ve b br bir dik üçgende hipotenüs c br ise, herhangi bir pozitif k reel sayısı için dik kenar uzunlukları ak br ve bk br olan bir dik üçgende de hipotenüs ck br olur.

Burada aklımıza şu soru geliyor: Örneğin, bir dik üçgende dik kenar uzunlukları 3 br ve 4 br iken hipotenüsün 5 br olacağını biliyoruz, peki tüm kenar uzunlukları 3-4-5 olan bir üçgene dik diyebilir miyiz? Şimdiki teorem bununla ilgili:

Pisagor Teoreminin Karşıtı. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir üçgende $b^2 + c^2 = a^2$ eşitliği sağlanıyorsa ABC üçgeni A açısı dik olan bir üçgendir.*

Kanıt: ABC üçgeni $|BC| = a$ br, $|AC| = b$ br ve $|AB| = c$ br olan ve $b^2 + c^2 = a^2$ eşitliğine sahip bir üçgen olsun.



Şimdi başka bir XYZ dik üçgeni düşünelim. $|ZX| = b$ br, $|XY| = c$ br ve $m(ZXY) = 90^\circ$ olsun. Pisagor Teoremi'nden $|YZ|^2 = b^2 + c^2 = a^2$ olur, dolayısıyla $|YZ| = a$ br olur. Bu yüzden $ABC \equiv XYZ$ dir (K-K-K eşliği). O halde A açısı, X açısıyla eş olduğundan dik açıdır.

Demek ki teoremin karşıtı da doğruymuş. Bu durumda Pisagor teoremini sağlayan üçlüler önem kazanıyor. Bir soruda bu üçlüleri görür görmez dik açıyı yapıştırmak için! Aşağıdaki yazıda, tüm üçlülerin gizemini bulacaksınız.

Pisagor Üçlüsü. Pisagor Teoremi olarak bilinen

$$a^2 + b^2 = c^2$$

eşitliğini sağlayan (a, b, c) sıralı doğal sayı üçlüsüne **Pisagor Üçlüsü** denir. Benzer şekilde

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

eşitliğini sağlayan (a, b, c, d) sıralı doğal sayı dörtlüsüne de **Pisagor dörtlüsü** denir ve benzer şekilde devam eder.

En küçük Pisagor üçlüsü, en meşhur olan (3, 4, 5) üçlüsüdür. (3, 4, 5) aynı zamanda bileşenleri ardışık olan tek üçlüdür.

Eğer a, b, c değerleri aralarında asal ise (a, b, c) sıralı üçlüsüne **İlkel Pisagor Üçlüsü** denir. Örneğin (3, 4, 5) ilkel Pisagor üçlüsüdür, fakat (6, 8, 10) değildir.

Çok eskiden beri insanoğlu yeni Pisagor üçlüleri bulma gayretindedir. Fakat bu çabalar hiçbir zaman son bulmayacaktır. Çünkü üçlüler sonsuza kadar uzamakta. Yine de başarılı teknikler geliştirilmiştir. İnsanın aklına hemen 'E, *Pisagor*'un kendisi bunu bulamamış mı?' diyesi geliyor. Bulmaz mı?

m, 1'den büyük bir tam sayı olmak üzere;

$$(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$$

üçlüsünü bulmuş. Fakat tüm Pisagor üçlülerini vermediği de ortada. Örneğin (5, 12, 13) üçlüsünü burdan bulamıyoruz. Daha sonra *Plato*

$$(2m^2, (m^2 - 1)^2, (m^2 + 1)^2)$$

üçlüsünü, eski Yunanlılar da aralarında asal v ve u tam sayıları için

$$(v^2 - u^2, 2uv, v^2 + u^2)$$

üçlüsünü bulmuş.

Buradan da açıkça görülebilmektedir ki, ilkel Pisagor üçlüleri de sonsuz çoğunluktadır. Ayrıca Pisagor üçlülerinin bir özelliğinden daha bahsedelim. Tüm (a, b, c) Pisagor üçlüleri için $a \cdot b$ çarpımı daima 12 ile $a \cdot b \cdot c$ çarpımı da daima 60 ile bölünebilmektedir.

İlla 'Ben de bu konu üzerinde çalışmak istiyorum' diyenler, bileşenlerinin çarpımı eşit olan farklı iki Pisagor üçlüsü bulmaya çalışabilirler. Zira hala bulunabilmiş değil. Bununla birlikte Fermat bundan yaklaşık 5 asır önce bir Pisagor üçlüsünde dik kenarların çarpımının hiçbir zaman bir tamkareye eşit olamayacağını kanıtlamış. İsterseniz bunu da kanıtlamaya çalışabilirsiniz. ☺

Hipotenüsü 100'den küçük 50 tane Pisagor üçlüsü vardır:

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 15, 17), (12, 16, 20), (15, 20, 25), (7, 24, 25), (10, 24, 26), (20, 21, 29), (18, 24, 30), (16, 30, 34), (21, 28, 35), ...

Bunların sadece 16 tanesi ilkeldir:

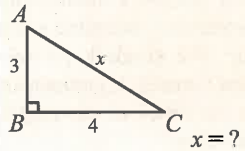
(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53), (11, 60, 61), (33, 56, 65), (16, 63, **65**), (48, 55, 73), (36, 77, 85), (13, 84, 85), (39, **80**, 89), (65, 72, 97).

Bunlardan da sadece 7 tanesi ardışık iki kenara sahiptir:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (9, **40, 41**), (11, **60, 61**), (**13**, 84, 85).

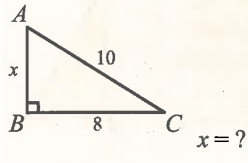
Öncelikle şu en meşhur Pisagor üçgenleriyle ilgili birkaç soru çözelim de her biri zihnimize yerleşsin.

1.



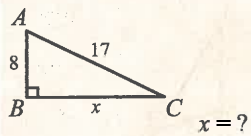
5

2.



6

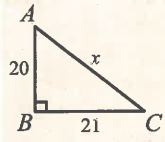
3.



$x = ?$

15

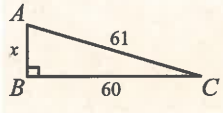
4.



$x = ?$

29

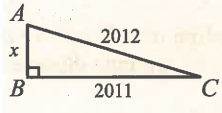
5.



$x = ?$

11

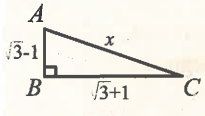
6.



$x = ?$

$\sqrt{4023}$

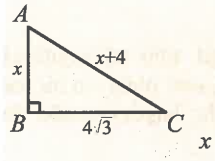
7.



$x = ?$

$2\sqrt{2}$

8.

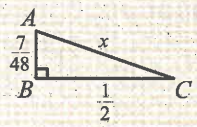


$x = ?$

4

Şimdi vereceğimiz örnekler de Pisagor üçlülerinin katlarıyla ilgili...

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$|AB| \perp |BC|$
$|AB| = 7/48$ br
$|BC| = 1/2$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ *kaç br dir?*

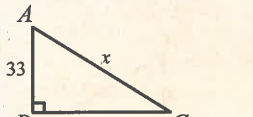


A) $\frac{48}{25}$ B) $\frac{49}{25}$ C) $\frac{25}{24}$ D) $\frac{25}{48}$ E) 25

Çözüm: Bu değerlerle Pisagor Teoremi'ni uygulayacak halimiz yok. Aklımızı yemedik daha. Kenar uzunluklarını tam sayı yapmak amacıyla her kenarı 48 ile çarpalım. Bu durumda $|AB| = 7$ br ve $|BC| = 24$ br olacaktır. Ünlü (7, 24, 25) üçlüsünü hatırlarsak $|CA| = 25$ br deriz. Fakat unutmayın ki kenar uzunluklarını 48 ile çarpmıştık, tekrar eski hale dönmek için tüm kenar uzunluklarını 48'e bölmek gerekir. O halde cevabımız 25/48 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

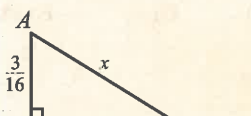
9.



$x = ?$

55

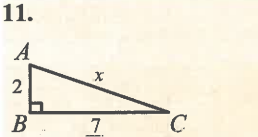
10.



$x = ?$

5/16

11.

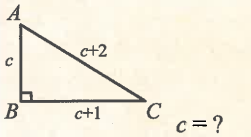


$x = ?$

25/12

Şimdiki örneklerimiz, kenarları ardışık olan tek dik üçgenin 3-4-5 üçgeni olduğuyla ilgili. Eğer kenarlar arasındaki fark 1 değil de başka bir sayı olsa bile üçgenin 3-4-5 üçgeninin bir katı olması gerektiğidir.

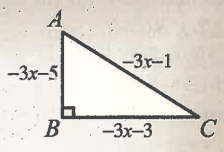
12.



$c = ?$

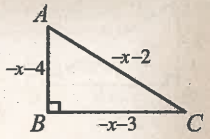
3

13.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = -3x - 5$ br
$|BC| = -3x - 3$ br
$|CA| = -3x - 1$ br
olduğuna göre Alan(ABC) kaç br^2 dir?



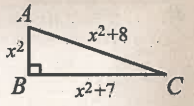
A) 6 B) 12 **C)** 24 D) 48 E) 96

14.
ABC dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = -x - 4$ birim
$|BC| = -x - 3$ birim
$|AC| = -x - 2$ birim
olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?



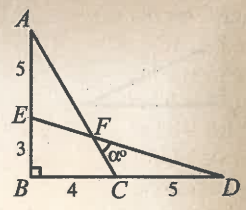
A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

15.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = x^2$ br
$|BC| = x^2 + 7$ br
$|CA| = x^2 + 8$ br
olduğuna göre Çevre(ABC) kaç br dir?



A) 18 B) 24 C) 25 D) 27 **E)** 30

16.
ABC ve EBD birer dik üçgen
$AB \perp BD$
$AC \cap ED = \{F\}$
$|AE| = |CD| = 5$ br
$|EB| = 3$ br
$|BC| = 4$ br
$m(DFC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 22,5 C) 30 **D)** 45 E) 60

Pratik olarak Pisagor üçlüsü bulmak. Bir dik üçgenin bir dik kenar uzunluğu 2'den büyük bir asal sayıysa, diğer dik kenar uzunluğuyla ile hipotenüs uzunluğu ardışık olup toplamları da o asal sayının karesidir.

Hemen sebebini açıklayalım: Sözgelimi $a^2 + b^2 = c^2$ ve a asal sayı olsun. Denklemi $a^2 = c^2 - b^2$ şeklinde düzenleyelim.

$$a^2 = (c - b)(c + b)$$

olup a asal olduğundan a^2 sayısının pozitif çarpanları 1 ve a^2'den başka bir şey olamaz.

$c + b > c - b$ olduğundan

$$c - b = 1$$
$$c + b = a^2$$

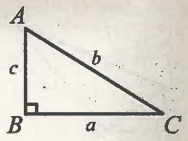
olmalıdır. Çok kolaymış yahu... Örneğin,

(**3**, 4, 5),
(**5**, 12, 13),
(**7**, 24, 25),
(**11**, 60, 61),
(**13**, 84, 85),
(**17**, 144, 145), ...

Bu kural sadece asal sayılarda değil, tüm tek sayılarda geçerlidir. Ama bir kenar uzunluğu, asal olmayan bir tek sayı olduğu zaman üçgen tek değildir, başka üçgenler de vardır.

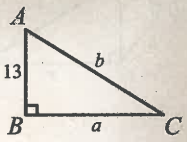
Örneğin,
(**9**, 40, 41) ve (**9**, 12, 15),
(**15**, 112, 113), (**15**, 20, 25) ve (**15**, 36, 39),
(**21**, 220, 221), (**21**, 28, 35) ve (**21**, 72, 75) gibi.

17.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
a ve b birer tam sayı
c asal sayı
olduğuna göre $b - a$ farkı kaçtır?



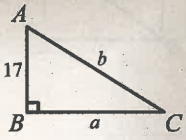
A) 1 B) 2 C) 3 D) $c-1$ E) $c+1$

18.
ABC dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 13$ birim
$|BC| = a$ birim
$|AC| = b$ birim
a ve b birer tam sayı
olduğuna göre $a + 2b$ toplamı kaça eşittir?



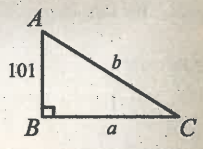
A) 252 B) 253 C) 254 D) 255 E) 256

19.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 17$ br
a ve b birer tam sayı
olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?



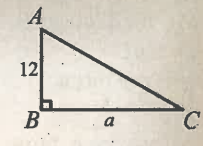
A) 51 B) 170 C) 289 D) 290 E) 324

20.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 101$ br
a ve b birer tam sayı
olduğuna göre $\sqrt{a+b}$ ifadesinin değeri kaçtır?



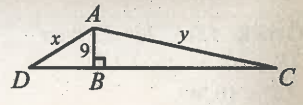
A) 99 B) 100 C) 101 D) 102 E) 103

21.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AC|$ bir tam sayı
$|AB| = 12$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olamaz?



A) 5 B) 9 C) 16 D) 24 E) 35

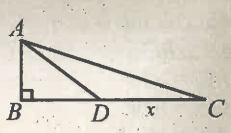
22.
ADC bir üçgen
$AB \perp DC$
$|AB| = 9$ birim
$|AD| = x$ birim
$|AC| = y$ birim
Şekildeki tüm uzunluklar farklı birer tam sayı olduğuna göre $y - x$ farkının pozitif değeri kaçtır?



A) 16 B) 21 C) 26 D) 36 E) 56

23.
ABC dik üçgen

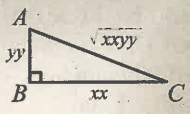
$AB \perp BC$
$D \in [BC]$



Şekildeki tüm uzunluklar farklı birer tam sayı olduğuna göre $|AB|$'nin en küçük değeri için x kaçtır?

A) 6 **B)** 9 C) 16 D) 22 E) 28

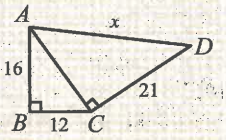
24.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = yy$ birim
$|BC| = xx$ birim
$|AC| = \sqrt{xxyy}$ birim



xx ve yy iki basamaklı, $xxyy$ dört basamaklı bir doğal sayı olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 10 **D)** 11 E) 13

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AB \perp BC$ *ve* $AC \perp CD$
$|AB| = 16$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 21$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ *kaç br dir?*



A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

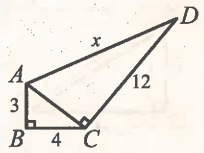
Çözüm: ABC dik üçgeninin 3-4-5 üçgeninin 4 katı olduğunu fark ederseniz Pisagor teoremini uygulamadan

$$|AC| = 5 \cdot 4 = 20$$

olduğunu bulursunuz. Daha sonra ACD dik üçgeni de (20, 21, 29) üçlüsünü hatırlatır ki cevabımız 29 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

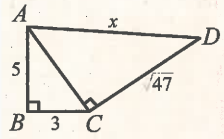
25.



x kaçtır?

13

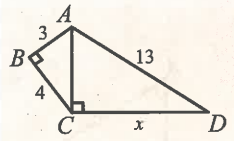
26.



x kaçtır?

9

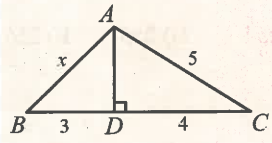
27.



x kaçtır?

12

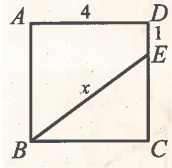
28.



x kaçtır?

$3\sqrt{2}$

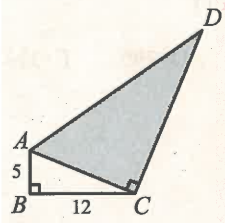
29.



ABCD kareyse x kaçtır?

5

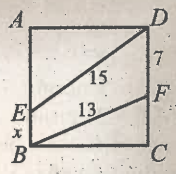
30.



$|CD|$ ve $|DA|$ tam sayı ise Çevre(ACD) kaç br dir?

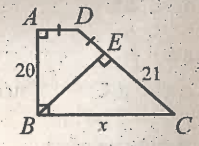
182

31.
$ABCD$ bir kare
$|BF| = 13$ br
$|FD| = 7$ br
$|DE| = 15$ br
$|EB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

32.
$ABCD$ bir dik yamuk
$DA \perp AB$ ve $AB \perp BC$
$|AD| = |DE|$
$|AB| = 20$ br
$|CE| = 21$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



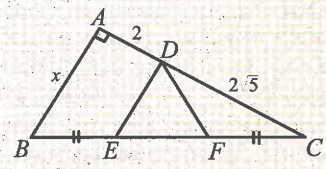
A) 22 B) 25 C) 28 **D)** 29 E) 30

33.
Yandaki şekilde dik kenarları 1 br olan ikizkenar bir dik üçgenin hipotenüsü üzerine bir kenarı 1 br olan başka bir dik üçgen yapıştırılmış ve bu işleme devam edilmiştir.
Şekle göre x kaçtır?



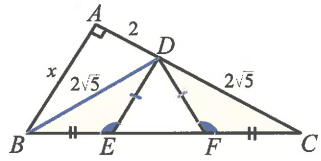
A) $2\sqrt{2}$ **B)** 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{11}$ E) $2\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$CA \perp AB$
DEF bir eşkenar üçgen
$|BE| = |FC|$
$|AD| = 2$ br
$|DC| = 2\sqrt{5}$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ kaç br *dir?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

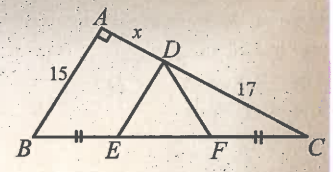
Çözüm: Evvela B ile D noktalarını birleştirelim.



$|BE| = |FC|$ verilmiş. DEF eşkenar üçgen olduğundan $|DE| = |DF|$ olduğunu da biliyoruz. Diğer yandan eşkenar üçgende E ve F açıları eş olduğundan bütünler açıları da eştir. O halde BED ve CFD üçgenleri K.A.K. gereğince eştirler. Bu durumda $|BD| = 2\sqrt{5}$ br olup BAD dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AB| = 4$ br olarak bulunur.

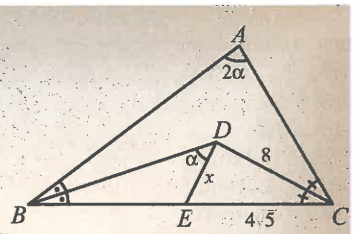
Doğru cevap: C.

34.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
DEF bir eşkenar üçgen
$|BE| = |FC|$
$|BA| = 15$ br
$|DC| = 17$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 7 **C)** 8 D) 9 E) 10

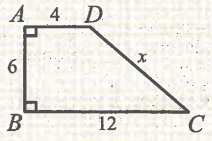
35.
ABC bir üçgen
BD ve CD iç açıortay
$m(A) = 2\alpha^\circ$
$m(BDE) = \alpha^\circ$
$|EC| = 4\sqrt{5}$ br
$|CD| = 8$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 5 E) 6

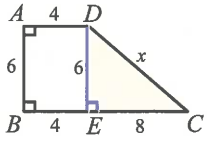
Gizli Pisagor. Bazen bize verilen bir şekil dik üçgen değildir. Fakat soruyu çözmek için uygun yerden bir veya birden fazla dikme indirip dik üçgen oluşturup Pisagor teoreminden soruyu çözeriz. Bu durum ekseriyetle dik yamukta vardır. Kim ne zaman dik yamuk görürse dik indirsin, çıkmazsa bana gelsin...

Örnek. *ABCD bir dik yamuk*
$DA \perp AB$ *ve* $AB \perp BC$
$|DA| = 4$ br
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



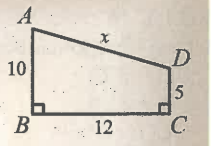
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Derhal D'den $[BC]$'ye dik indirelim. Dikme ayağı da E olsun.Görüldüğü üzere; DEC üçgeni nerdeyse 'bende Pisagor yapın' diye yalvarıyor. Rakamlar kötü olsa yapardık da rakamlar güzel olduğundan $x = 10$ olduğu gün gibi ortada...



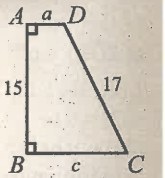
Doğru cevap: C.

36.
$ABCD$ bir dik yamuk
$AB \perp BC$ ve $BC \perp CD$
$|AB| = 10$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 5$ br
$|DA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



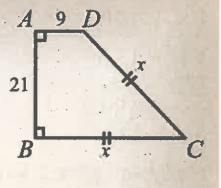
A) 17 B) 15 C) 14 **D)** 13 E) 12

37.
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$|AB| = 15$ birim
$|CD| = 17$ birim
$|AD| = a$ birim
$|BC| = c$ birim
olduğuna göre $c - a$ farkı kaçtır?



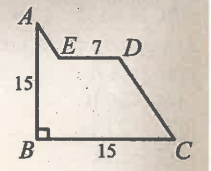
A) 2 B) 5 C) 7 **D)** 8 E) 9

38.
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$|AD| = 9$ birim
$|AB| = 21$ birim
$|BC| = |CD| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



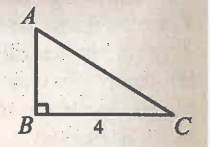
A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

39.
$AB \perp BC$
$ED \,//\, BC$
$AE \,//\, DC$
$|AB| = |BC| = 15$ birim
$|ED| = 7$ birim
olduğuna göre
Çevre($ABCDE$) kaç birimdir?



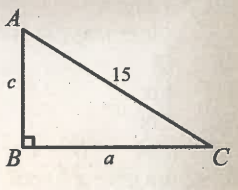
A) 37 B) 44 C) 47 D) 51 **E)** 54

40.
ABC dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = 4$ birim
Çevre(ABC) = 12 birim
olduğuna göre
Alan(ABC) kaç br^2 dir?



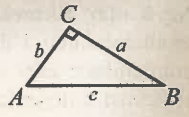
A) 3 B) 4 **C)** 6 D) 12 E) 24

41.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = c$ br
$|BC| = a$ br
$|AC| = 15$ br
$c - a = 3$
olduğuna göre
$c + a$ toplamı kaçtır?



A) 18 B) 20 **C)** 21 D) 24 E) 25

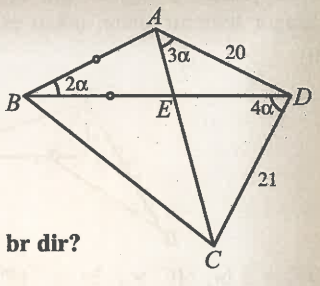
42.
Dik kenar uzunlukları a ve b birim, hipotenüs uzunluğu c birim olan bir dik üçgende
$(a + b + c)(a + b - c) = 60$



olduğuna göre Alan(ABC) kaç br^2 dir?

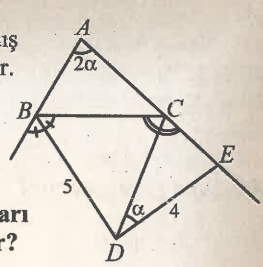
A) 7,5 **B)** 15 C) 30 D) 60 E) 120

43.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$|BA| = |BE|$
$m(DBA) = 2\alpha$
$m(CAD) = 3\alpha$
$m(BDC) = 4\alpha$
$|AD| = 20$ br
$|DC| = 21$ br
olduğuna göre $|AC|$ kaç br dir?



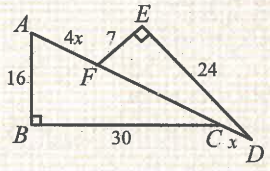
A) 24 B) 25 **C)** 29 D) 30 E) 32

44.
ABC üçgeninin B ve C'ye ait dış açıortayları D'de kesişmektedir.
$m(A) = 2\alpha$
$m(CDE) = \alpha$
$|DB| = 5$ br
$|DE| = 4$ br
olduğuna göre B ile E noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



A) 4 B) 5 C) 6 **D)** $\sqrt{41}$ E) 7

Örnek. *ABC ve DEF birer dik üçgen*
$AB \perp BC$ ve $DE \perp EF$
$|AB| = 16$ br
$|BC| = 30$ br
$|EF| = 7$ br
$|ED| = 24$ br
$|AF| = 4 \cdot |CD| = 4x$ br *olduğuna göre x kaçtır?*

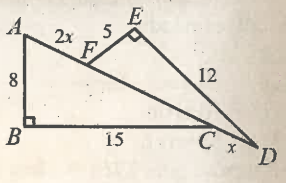


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $|FC| = a$ olsun. DEF dik üçgeninden $x + a = 25$ ve ABC dik üçgeninden $4x + a = 34$ olduğunu biliyoruz. İkinci eşitlikten birincisi çıkartılırsa $3x = 9$ yani $x = 3$ bulunur.

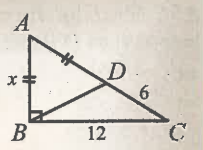
Doğru cevap: B.

45.
ABC ve DEF birer dik üçgen
A, F, C, D doğrudaş
$|AB| = 8$ birim
$|BC| = 15$ birim
$|DE| = 12$ birim
$|EF| = 5$ birim
$|AF| = 2 \cdot |CD| = 2x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



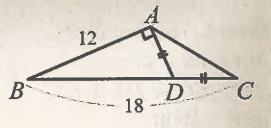
A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 5 E) 6

46.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 6$ br
$|AB| = |AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



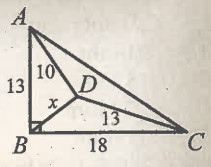
A) 7 B) 8 **C) 9** D) 10 E) 11

47.
ABC bir üçgen
$BA \perp AD$
$|AD| = |DC|$
$|AB| = 12$ birim
$|BC| = 18$ birim
olduğuna göre $|BC| - |BD|$ farkı kaçtır?



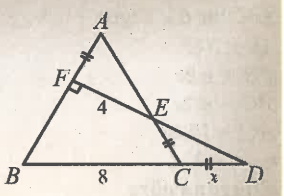
A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

48.
D noktası ABC dik üçgeninin iç bölgesindedir.
$AB \perp BC$
$|AB| = |DC| = 13$ birim
$|AD| = 10$ birim
$|BC| = 18$ birim
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç birimdir?



A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{13}$ **D) $\sqrt{61}$** E) 8

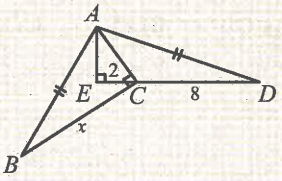
49.
ABC bir üçgen
B, C, D doğrudaş
$DF \perp AB$
$|FE| = 4$ br
$|BC| = 8$ br
$|AF| = |EC| = |CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

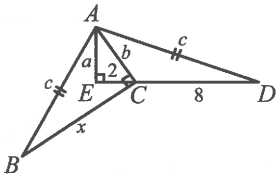
Ne Kadar Ekmek, O Kadar Köfte! Bazı dik üçgen problemlerinde 1'den fazla dik üçgen iç içedir. Böyle problemlerin eğer kendine özel bir çözümü yoksa, şekildeki dik üçgenleri sayın, her dik üçgen için Pisagor teoremi yazıp elde ettiğiniz denklemleri birlikte çözün.

Örnek. *ABC ve AED birer dik üçgen*
$BC \perp CA$
$AE \perp ED$
$|AB| = |AD|$
$|EC| = 2$ br
$|CD| = 8$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br *dir?*



A) 10 B) $\sqrt{99}$ C) $7\sqrt{2}$ D) $\sqrt{97}$ E) $4\sqrt{6}$

Çözüm: Dikkatle bakılırsa, ACB, AED ve AEC olmak üzere şekilde 3 değişik dik üçgen var. Bu üçgenlerde Pisagor teoremi yazıp, çıkan eşitlikleri birlikte çözeceğiz.



$|AE| = a$ br, $|AC| = b$ br ve $|AB| = |AD| = c$ br diyelim. ACB ve AED üçgenlerinde Pisagor teoreminden

$$b^2 + x^2 = c^2$$
$$a^2 + 10^2 = c^2$$

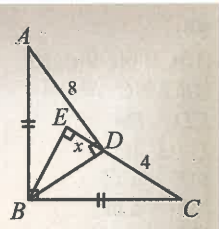
yani $b^2 - a^2 = 10^2 - x^2$ elde edilir. AEC dik üçgeninde Pisagor teoremindense $a^2 + 4 = b^2$ geldiğinden

$$10^2 - x^2 = 4$$

denkleminden $x^2 = 96$ yani $x = 4\sqrt{6}$ bulunur.

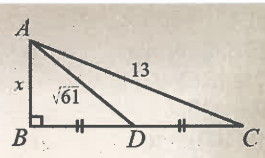
Doğru cevap: E.

50.
$[ABD]$ ve $[BCE]$ birer dik üçgen
$AD \perp DB$
$CE \perp EB$
$AB \perp BC$
$|AB| = |BC|$
$|AD| = 8$ br
$|CD| = 4$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir?



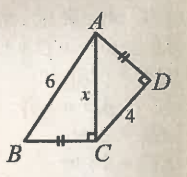
A) 8 B) 7 **C) 6** D) 5 E) 4

51.
$[ABC]$ dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|AD| = \sqrt{61}$ birim
$|AC| = 13$ birim
olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?



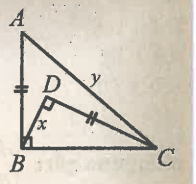
A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

52.
$[ABC]$ ve $[ADC]$ birer dik üçgen
$AD \perp DC$
$AC \perp CB$
$|DC| = 4$ birim
$|AB| = 6$ birim
$|AD| = |BC|$
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç birimdir?



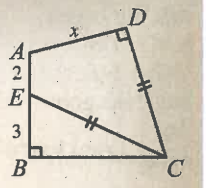
A) 4 B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{21}$ D) $2\sqrt{6}$ **E) $\sqrt{26}$**

53.
$[ABC]$ dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |CD|$
$|BD| = x$ birim
$|CA| = y$ birim
olup $y^2 - x^2 = 18$ olduğuna göre $|BA|$ kaç birimdir?



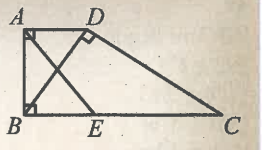
A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $6\sqrt{2}$

54.
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$|CD| = |CE|$
$|BE| = 3$ birim
$|EA| = 2$ birim
$|AD| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



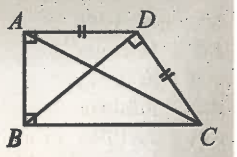
A) 3 B) $2\sqrt{3}$ **C) 4** D) $3\sqrt{2}$ E) 5

55.
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$BD \perp DC$
$|DC| = 3 \cdot |AD|$
$|BC| = 3 \cdot |BE|$
$|BD| = 3$ birim
olduğuna göre $|AE|$ kaç birimdir?



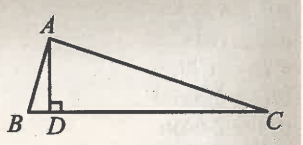
A) 3 **B) $\sqrt{10}$** C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 4

56.
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$BD \perp DC$
$|AD| = |DC|$
olduğuna göre $\frac{|AC|}{|BD|}$ **kaçtır?**



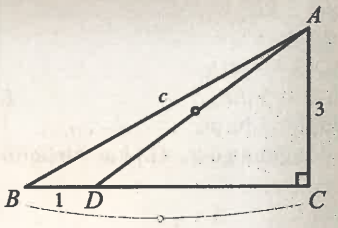
A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

57.
ABC bir üçgen
$|CA| = |CB|$
$|DA| = 5 \cdot |DB|$
olduğuna göre
$\frac{|DC|}{|DB|}$ **oranı kaçtır?**



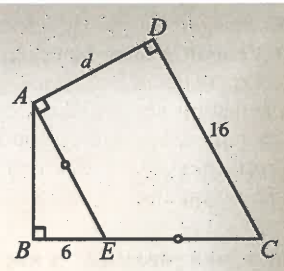
A) 17 B) 16 C) 13 **D)** 12 E) 8

58.
ABC bir üçgen
$BC \perp CA$
$|AD| = |BC|$
$|BD| = 1$ br
$|CA| = 3$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre
c kaçtır?



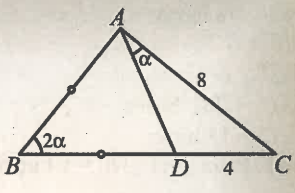
A) 5 B) $2\sqrt{7}$ C) $\sqrt{30}$ **D)** $\sqrt{34}$ E) 6

59.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$DA \perp AE$
$|AE| = |EC|$
$|BE| = 6$ br
$|CD| = 16$ br
$|AD| = d$ br
olduğuna göre d kaçtır?



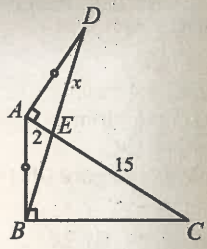
A) 6 B) 7 **C)** 8 D) 9 E) 10

60.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|BA| = |BD|$
$m(CAD) = \alpha$
$m(B) = 2\alpha$
$|DC| = 4$ br
$|CA| = 8$ br
olduğuna göre Alan(ABC) kaç br^2 dir?



A) 16 B) 20 **C)** 24 D) 32 E) 48

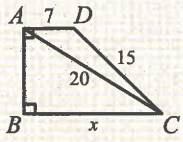
61.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$ ve $DA \perp AC$
$|DA| = |AB|$
$AC \cap BD = \{E\}$
$|AE| = 2$ br
$|EC| = 15$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 **B)** $\sqrt{68}$ C) 9 D) $\sqrt{95}$ E) 10

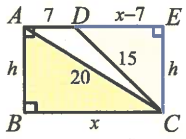
İki Pisagor Yerine Destekli Sallama. Bazı problemlerde Pisagor teoreminden doğan iki eşitliği ortak çözmek gerekir ki bizim gibi tembel geometriciler için bu hiç de istenilen bir şey değildir. Böyle durumlarda eğer veriler izin verirse, bu dik üçgenler olsa olsa şunlar olur diyerek bir sallama yaparız ama tutup tutmadığını anlamanın da bir yolu var elbet, aşağıdaki örnekte anlattım.

Örnek. *ABCD bir dik yamuk*
$DA \perp AB$ *ve* $AB \perp BC$
$|AC| = 20$ br
$|CD| = 15$ br
$|DA| = 7$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: *ABCE* dikdörtgenini oluşturalım. Dikdörtgenin kısa görünen kenarının boyuna da *h* br diyelim.



ABC ve *CED* dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden doğan

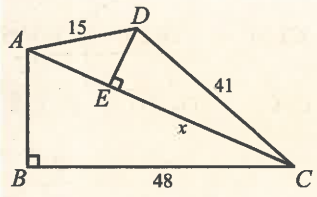
$$x^2 + h^2 = 20^2$$
$$(x-7)^2 + h^2 = 15^2$$

denklemlerini ortak çözmemiz gerekir. Bunun yerine aklımıza hipotenüsü 15 ve 20 br olan dik üçgenleri getirelim. İkisinin de bir dik kenarı ortak olacak ama. O zaman 'acaba bu üçgenler 9-12-15 ve 12-16-20 üçgenleri mi?' diye bakınca, yani *h*'ye 12 verince taşlar yerine oturuyor mu? Bakalım:

$x = 16$ oluyor. Eğer $x - 7$ değeri 9 oluyorsa 'attık, tuttu' olacak. Gerçekten de $16 - 7 = 9$ olduğundan $x = 16$'dır.

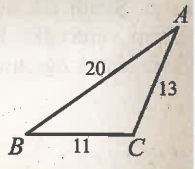
Doğru cevap: E.

62.



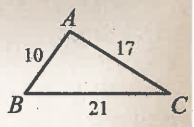
x kaçtır?

63.
ABC bir üçgen
$|BC| = 11$ birim
$|CA| = 13$ birim
$|AB| = 20$ birim
olduğuna göre *A* noktasının *BC* doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?



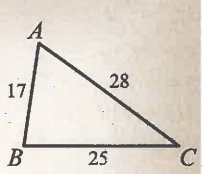
A) 5 B) 7 C) 8 D) 10 **E)** 12

64.
ABC bir üçgen
$|AB| = 10$ birim
$|AC| = 17$ birim
$|BC| = 21$ birim
olduğuna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alanı kaç birimkaredir?



A) 63 **B)** 84 C) 105 D) 168 E) 189

65.
ABC bir üçgen
$|AB| = 17$ birim
$|BC| = 25$ birim
$|AC| = 28$ birim
olduğuna göre *ABC* üçgeninin en kısa yüksekliğinin uzunluğu kaç birimdir?

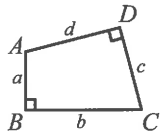


A) 8 B) 12 C) 13 **D)** 15 E) 16

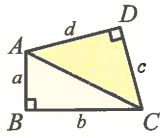
Artık Pisagor teoremini adamakıllı kavramış olmamız lazım. Şimdi dik üçgenlerle alakalı çok önemli bir dizi teorem vereceğiz. Hepsi birbirinden değerli, lütfen eksiksiz olarak öğrenin ki ilerde rahat edelim.

Teorem. *Karşılıklı iki açısı dik olan bir dörtgende, dik açıları oluşturan kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirlerine eşittir.*

Yani yandaki şekle göre;
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.



Kanıt: Dörtgenimiz B ve D açıları dik olan $ABCD$ dörtgeni olsun. Kenar uzunlukları da $|AB| = a$ br, $|BC| = b$ br, $|CD| = c$ br ve $|DA| = d$ br olsun.



$[AC]$ köşegeni çizilirse, şeklin aslında hipotenüs uzunlukları birbirlerine eşit olan iki dik üçgenin zıt yönde yapıştırılmış hali olduğunu anlarsınız. O halde iki Pisagor Teoremi bizi sonuca götürecektir.

$$a^2 + b^2 = |AC|^2$$
$$c^2 + d^2 = |AC|^2$$

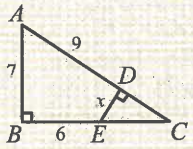
olduğundan $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ eşitliği kanıtlanmış olur.

Not: B ve D açılarından sadece biri dik iken

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

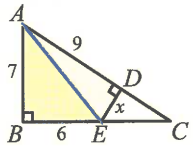
eşitliği sağlanıyorsa, diğer açı da dik olmak zorundadır!

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$ED \perp AC$
$|EB| = 6$ br
$|BA| = 7$ br
$|AD| = 9$ br
olduğuna göre $|ED| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $ABED$ dörtgeni karşılıklı iki açısı dik olan bir dörtgen olduğundan $[AE]$ kenarı, ABE ile ADE dik üçgenlerinin ortak hipotenüsüdür.

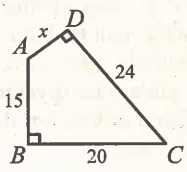


$$x^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$$
$$x^2 + 81 = 36 + 49$$

eşitliğinden $x^2 = 4$ yani $x = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

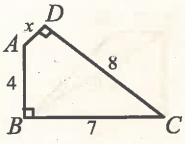
66.



$x = ?$

7

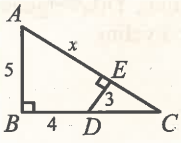
67.



$x = ?$

1

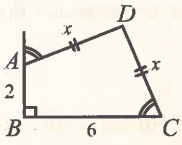
68.



$x = ?$

$4\sqrt{2}$

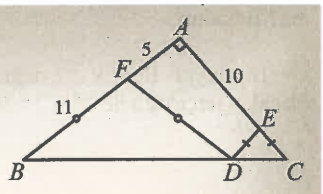
69.



$x = ?$

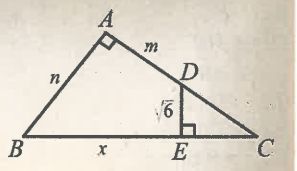
$2\sqrt{5}$

70.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|EA| = 10$ br
$|AF| = 5$ br
$|FB| = |FD| = 11$ br
$|ED| = |EC|$
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



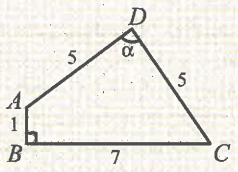
A) 17 B) 18 C) 20 D) 24 E) 25

71.
$CA \perp AB$ ve $DE \perp BC$
$|ED| = \sqrt{6}$ br
$|DA| = m$ br
$|AB| = n$ br
$|BE| = x$ br
$m + n = 6$ ve $m \cdot n = 7$
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 **E) 4**

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AB \perp BC$
$|AB| = 1$ br
$|BC| = 7$ br
$|CD| = |DA| = 5$ br
olduğuna göre
$m(CDA) = \alpha$ *kaç derecedir?*

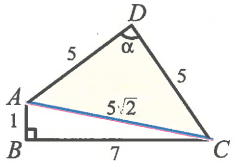


A) 45 B) 60 C) 75 D) 90 E) 120

Çözüm: $[AC]$'yi çizip ABC dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygularsak

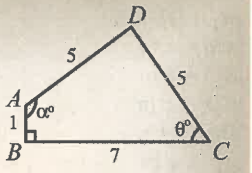
$$|AC| = 5\sqrt{2} \text{ br}$$

bulunur. CDA üçgeninin kenar uzunlukları da Pisagor Teoremi'ni sağladığından $m(CDA) = \alpha = 90°$ bulunur.



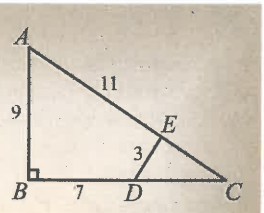
Doğru cevap: D.

72.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 1$ br
$|BC| = 7$ br
$|CD| = |DA| = 5$ br
$m(A) = \alpha°$, $m(C) = \theta°$
olduğuna göre $\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



A) 90 B) 120 C) 135 D) 150 **E) 180**

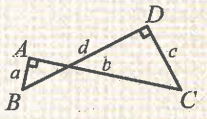
73.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 9$ br
$|BD| = 7$ br
$|DE| = 3$ br
$|EA| = 11$ br
olduğuna göre EDC üçgeninin çevresi kaç br dir?



A) 10 B) 11 **C) 12** D) 13 E) 14

Bu teorem başka bir halde de karşınıza çıkabilir. Hipotenüsü ortak olan dik üçgenler zıt yönlü değil de aynı yönlü yapıştırılabilir. Böyle bir durumda aşağıdaki gibi bir şekil elde edilir:

Soru Tipi. $BA \perp AC$
$BD \perp DC$
$|BA| = a$ br
$|AC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|DB| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



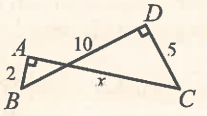
A) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ B) $b^2 + d^2 = 2(a^2 + c^2)$
C) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ D) $b^2 + d^2 = 4(a^2 + c^2)$
E) $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

Çözümü: B ile C noktalarını birleştirelim. Görüldüğü üzere; $[BC]$ kenarı hem CAB hem de CDB dik üçgeninde ortak hipotenüs konumundadır. O halde iki dik üçgende de Pisagor Teoremi uygulanırsa sonuca ulaşılacaktır.

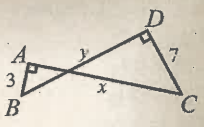
$$a^2 + b^2 = |BC|^2 = c^2 + d^2.$$

Doğru cevap: C.

74.
$BA \perp AC$
$BD \perp DC$
$|BA| = 2$ birim
$|BD| = 10$ birim
$|DC| = 5$ birim
olduğuna göre $|AC| = x$ kaçtır?



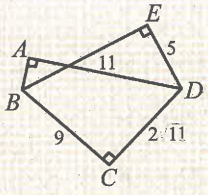
75.
$BA \perp AC$ ve $BD \perp DC$
$|BA| = 3$ birim
$|DC| = 7$ birim
$|AC| = x$ birim
$|BD| = y$ birim
olduğuna göre $x^2 - y^2$ farkı kaçtır?



A) 58 B) 49 **C) 40** D) 21 E) 10

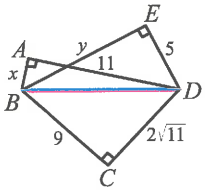
Şimdi hem bu soru tipinden olan hem de o soru tipinin dayandığı teoremle ilgili bir soru çözelim.

Örnek. $BC \perp CD$
$DE \perp EB$
$DA \perp AB$
$|BC| = 9$ br
$|CD| = 2\sqrt{11}$ br
$|DE| = 5$ br
$|DA| = 11$ br
olduğuna göre $|BA| + |BE|$ *toplamı kaç* br *dir*?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: $|BA| = x$ br ve $|BE| = y$ br olsun. $x + y$ toplamını arıyoruz. B ile D noktalarını da birleştirelim.



Hem $BCDE$ hem de $ABCD$ karşılıklı iki açısı dik bir dörtgen olduğundan $[BD]$ kenarı BCD, DEB ve DAB dik üçgenlerinde ortak hipotenüstür.

$$y^2 + 5^2 = 9^2 + 44$$

eşitliğinden $y = 10$ br bulunur. Şu durumda isterseniz

$$x^2 + 11^2 = 10^2 + 5^2$$

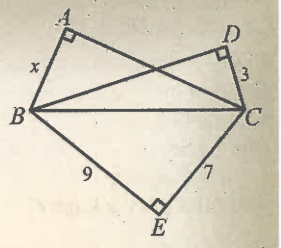
isterseniz de

$$x^2 + 11^2 = 9^2 + 44$$

eşitliğinden $x = 2$ olduğunu bulabilirsiniz. O halde $x + y$ toplamı $10 + 2 = 12$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

76.
$BE \perp EC$
$CD \perp DB$
$CA \perp AB$
$|BE| = 9$ br
$|EC| = 7$ br
$|CD| = 3$ br
$|AB| = x$ br
$|BD| = |AC| + 1$
olduğuna göre x'ten küçük en büyük tam sayı kaçtır?

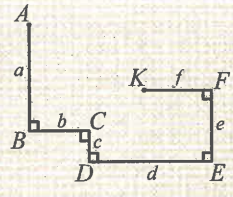


A) 4 **B) 5** C) 6 D) 7 E) 8

Uzaklık Problemlerinde Dik Üçgenin Kullanımı. Sadece yatay ve dikey doğrultularda hareket eden bir cismin, bir müddet sonra başlangıç noktasından ne kadar uzaklaştığını hesaplamanın en iyi yolu Pisagor teoremidir. Burada yatay ve dikey doğrultudan kasıt, doğrusal bir şekilde harekete başlayan cismin, yön değiştireceği zaman, hep ilk doğrultusuna dik veya paralel olarak yön değiştirmesidir.

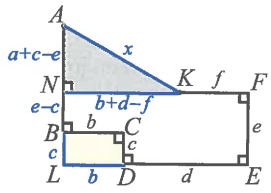
Örneğin bir cisim, a br güneye, sonra b br doğuya, sonra tekrar c br güneye, sonra tekrar d br doğuya gittikten sonra, e br kuzeye ve sonra f br batıya giderse, harekete başladığı noktadan ne kadar uzaklaşmış olur? Bu problemi aşağıda çözdük, sebeplerimizi de açıkladık.

Soru Tipi. $AB \perp BC$
$AB \,//\, CD \,//\, FE$
$BC \,//\, DE \,//\, KF$
$|AB| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|DE| = d$ br
$|EF| = e$ br
$|FK| = f$ br
olduğuna göre A ile K noktaları arasındaki uzaklık kaç br *dir*?



A) $\sqrt{(a+c+e)^2 + (b+d+f)^2}$
B) $\sqrt{(a+c-e)^2 + (b+d+f)^2}$
C) $\sqrt{(a+c+e)^2 + (b+d-f)^2}$
D) $\sqrt{(a-c-e)^2 + (b-d-f)^2}$
E) $\sqrt{(a+c-e)^2 + (b+d-f)^2}$

Çözümü: Bize $[AK]$'nin boyu sorulmaktadır. AB ile ED'nin kesişimi L olsun. $BLDC$ bir dikdörtgen olduğundan $|BL| = c$ br ve $|LD| = b$ br olur.



Şimdi $[FK]$'yi K yönünde uzatalım, AL'yi kestiği nokta N olsun. $NLEF$ de bir dikdörtgen olduğundan $|NF| = |LE|$ olmalıdır. Bu durumda $|NK| = b + d - f$ br olur. Diğer yandan $|NB| = e - c$ br olduğundan $|AN| = a + c - e$ br olur. O halde ANK dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

$$x = \sqrt{(a+c-e)^2 + (b+d-f)^2}$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

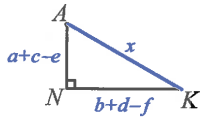
Okumadan Geçmeyin. Bulduğumuz

$$x^2 = (a+c-e)^2 + (b+d-f)^2$$

eşitliğine biraz kafa yoralım. $a + c - e$ ve $b + d - f$ değerlerinin belki bize anlatmak istedikleri bir şeyler vardır.

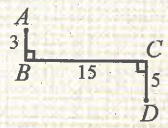
Değerli meslektaşım Alparslan Ceran diyor ki: Dikkat edecek olursanız, şekilde önce a br aşağı doğru hareket ettik, daha sonra tekrar c br aşağı gittik, daha daha sonra da e br yukarı çıktık. Yani toplamda düşey yönde toplam $a + c - e$ br yer değiştirmiş olmadık mı?

Benzer şekilde önce b br ardından d br sağa doğru gidip daha sonra da f br sola gidince yatay eksende toplam olarak $b + d - f$ br yer değiştirmiş olmadık mı?



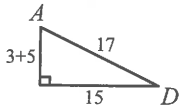
İşte bu yüzden bu tarz soruları çözerken önce kenara boş bir dik üçgen çizip, düşey durumdaki dik kenarın uzunluğuna düşey yönde yaptığımız yer değiştirme miktarını, yatay durumda olan dik kenarın uzunluğuna da yatay eksende yaptığımız yer değiştirme miktarını yazıp, Pisagor Teoremi'ni uygulayacağız, bitecek. Dikkat ederseniz, yukardaki ANK dik üçgeni, aslında sol tarafta uzun uğraşlar sonucunda elde ettiğimiz ANK üçgeninin ta kendisidir! Bu arada, ne kadar hareket ettiğimizi değil, ne kadar yer değiştirdiğimizi yazdığımıza dikkat edin lütfen. Nasıl yapacağımızı tam olarak anlayamayanlar aşağıdaki örnekleri inceleyebilirler.

Örnek. $AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 15$ br
$|CD| = 5$ br
olduğuna göre A ile D noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



A) 10 B) 13 C) 15 D) 17 E) 18

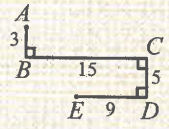
Çözüm: Düşey yönde 3 + 5 = 8 br, yatay yönde de 15 br hareket edildiğinden bu değerleri dik üçgende uygun yerlere yazalım.



Pisagor Teoremi'nden $|AD| = 17$ br olarak bulunur.

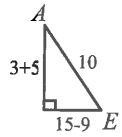
Doğru cevap: D.

Örnek. $AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$CD \perp DE$
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 15$ br
$|CD| = 5$ br
$|DE| = 9$ br
olduğuna göre A ile E noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



A) 10 B) 13 C) 15 D) 17 E) 18

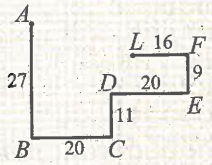
Çözüm: Düşey yönde önce 3 br sonra da 5 br olmak üzere 3 + 5 = 8 br hareket ettik. Yatay yönde de 15 br sağa ve 9 br sola gidildiğinden toplamda 6 br sağa gidilmiş oldu.



Değerler yerlerine yazılıp Pisagor Teoremi uygulanırsa $|AE| = 10$ br olarak bulunur.

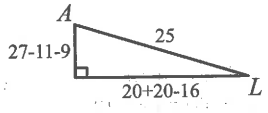
Doğru cevap: A.

Örnek. $AB \perp BC$
$AB \,//\, CD \,//\, FE$
$BC \,//\, DE \,//\, LF$
$|AB| = 27$ br
$|BC| = |DE| = 20$ br
$|CD| = 11$ br
$|EF| = 9$ br
$|LF| = 16$ br
ise A ile L noktaları arasındaki uzaklık kaç br *dir?*



A) 15 B) 17 C) 18 D) 20 E) 25

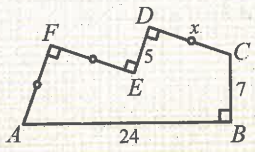
Çözüm: 27 br aşağı, 11 br yukarı ve sonra da 9 br yukarı gidince toplamda $27 - 11 - 9 = 7$ br aşağı doğru gidilmiş olur. 20 br sağa, ardından bir 20 br daha sağa ve sonra 16 br sola gidince de $20 + 20 - 16 = 24$ br sağa doğru gidilmiş olur.



Değerleri, anlattığımız üzere bir dik üçgende yerlerine yazarsak Pisagor Teoremi'nden $|AL| = 25$ br olarak bulunur.

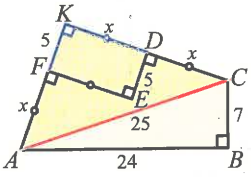
Doğru cevap: E.

Örnek. $AB \perp BC$, $CD \perp DE$
$DE \perp EF$, $EF \perp FA$
$|AB| = 24$ br
$|BC| = 7$ br
$|DE| = 5$ br
$|CD| = |EF| = |FA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

Çözüm: CD ile AF'nin arakesitine K diyelim. ABC ile CKA dik üçgenlerinin hipotenüslerinin ortak olduğuna dikkat ediniz.



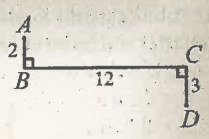
ABC dik üçgeninden bu değeri 25 br olarak buluruz. Şimdi DKA dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayarak cevabı bulacağız:

$$(2x)^2 + (x+5)^2 = 25^2$$
$$5x^2 + 10x - 600 = 0$$
$$5(x-10)(x+12) = 0$$

eşitliğinden $x = 10$ bulunur.

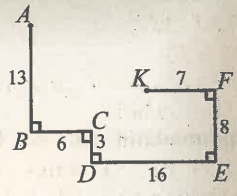
Doğru cevap: E.

77.
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$|AB| = 2$ birim
$|BC| = 12$ birim
$|CD| = 3$ birim
olduğuna göre *A* ile *D* noktaları arasındaki en kısa mesafe kaç birimdir?



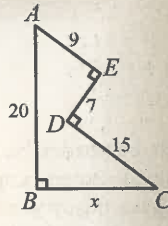
A) 12 **B) 13** C) 14 D) 15 E) 17

78.
$AB \perp BC$
$AB \,//\, CD \,//\, FE$
$BC \,//\, DE \,//\, KF$
$|AB| = 13$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 3$ br
$|DE| = 16$ br
$|EF| = 8$ br
$|FK| = 7$ br
olduğuna göre *A* ile *K* noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



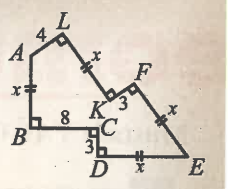
A) 10 B) 13 C) 15 **D) 17** E) 20

79.
$AB \perp BC$
$CD \perp DE$
$DE \perp EA$
$|CD| = 15$ br
$|DE| = 7$ br
$|EA| = 9$ br
$|AB| = 20$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



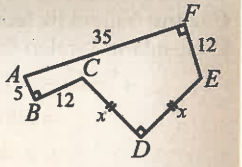
A) 10 B) 13 **C) 15** D) 17 E) 20

80.
A ve E dışındaki köşelerinde kenarları birbirlerini dik kesen yandaki sekizgende
$|LA| = 4$ birim
$|BK| = 8$ birim
$|CD| = |FK| = 3$ br
$|AB| = |DE| = |EF| = |KL| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



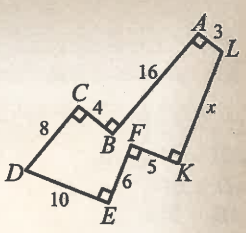
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 **E)** 12

81.
$AB \perp BC$
$CD \perp DE$
$EF \perp FA$
A, C, E noktaları doğrudaş
$|FA| = 35$ birim
$|AB| = 5$ birim
$|BC| = |EF| = 12$ birim
olduğuna göre $|CD| = |DE| = x$ kaç birimdir?



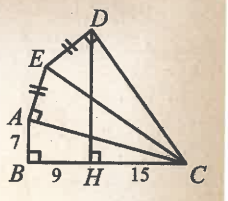
A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 12 **E)** $12\sqrt{2}$

82.
$LA \perp AB, AB \perp BC, BC \perp CD$
$DE \perp EF, EF \perp FK, FK \perp KL$
$|LA| = 3$ br
$|AB| = 16$ br
$|BC| = 4$ br
$|CD| = 8$ br
$|DE| = 10$ br
$|EF| = 6$ br
$|FK| = 5$ br
olduğuna göre $|KL| = x$ kaç br dir?



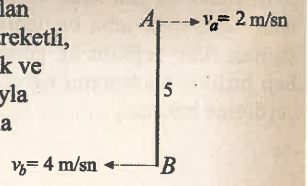
A) 17 B) 16 C) 15 **D)** 14 E) 13

83.
ABC, EAC, EDC ve DHC birer dik üçgen
$|DE| = |EA|$
$|AB| = 7$ birim
$|BH| = 9$ birim
$|HC| = 15$ birim
olduğuna göre $|DH|$ kaç birimdir?



A) 15 B) 16 C) 17 **D)** 20 E) 25

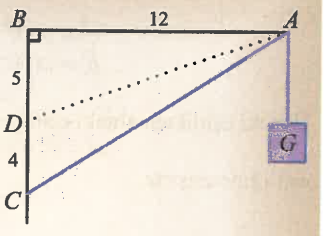
84.
Aralarındaki uzaklık 5 br olan A ve B noktalarından iki hareketli, yan şekildeki gibi AB'ye dik ve birbirlerine zıt yönde sırasıyla 2 m/sn ve 4 m/sn lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Buna göre 2 sn sonra aralarındaki uzaklık kaç br olur?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 **E)** 13

85.
$CB \perp BA$
$|CD| = 4$ br
$|DB| = 5$ br
$|BA| = 12$ br

Boyu sabit olan bir ipin ucuna bağlanmış G yükü, ipin başlangıç noktası olan C noktası D noktasına kaydırılınca kaç br aşağı iner?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

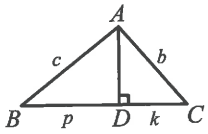
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Yükseklik Teoremi

Öğrencilik yıllarımdan beri, hangi geometri kitabını elime alsam, 'İç Açıortay Teoremi', 'Dış Açıortay Teoremi', 'Kenarortay Teoremi' yazılarını gördükçe, gözüm hep 'Yükseklik Teoremi'ni aradı. Bir türlü bulamadım. Büyüyünce de bir şey değişmedi. Hala bulamıyorum. Yüksekliğe neden üvey evlat muamelesi yapıldığını bir türlü anlayamadım ve içime sindiremedim. Oysa bu ismi hak eden oldukça güzel bir teorem var. Adı konulmasa da her geometri kitabında olan ve olması gereken bir teorem. Belki de çok sade ve basit bir teorem olduğu için isim verilmiyor ama bir teoremi güçlü yapan, zor anlaşılması filan değildir ki, gebe olduğu sonuçlardır. Şimdi hep birlikte bu teoremi öğrenelim, ardından ne işler becerdiğine bakalım.

Yükseklik Teoremi. *ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D olsun. Öyleyse* $|AB|^2 - |AC|^2 = |BD|^2 - |DC|^2$.

Yani, kenar uzunlukları belli olan yandaki üçgene göre $c^2 - b^2 = p^2 - k^2$.



Kanıt: *ADB* ve *ADC* dik üçgenlerinde $[AD]$ kenarının ortak olmasından faydalanacağız. Her iki üçgende de Pisagor teoremi yazılırsa ortak ifadeden kurtulunarak sonuca ulaşılır.

$$c^2 = |AD|^2 + p^2$$
$$b^2 = |AD|^2 + k^2$$

Üstteki eşitlikten alttaki eşitliği çıkartırsak, aradığımız

$$c^2 - b^2 = p^2 - k^2$$

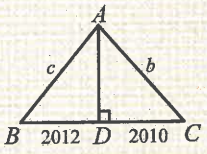
eşitliğine erişiriz.

Eşitliği

$$c^2 + k^2 = p^2 + b^2$$

şeklinde düzenleyip, '*Çaprazların kareleri toplamı birbirlerine eşittir*' diye akılda tutabilirsiniz fakat bu teoremi, '*Yanların kareleri farkı, tabanların kareleri farkına eşittir*' diye akılda tutalım, çünkü bu hali ilerde bize çok lazım olacak.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \perp BC$
$|BD| = 2012$ br
$|DC| = 2010$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre $c^2 - b^2$ *farkı kaçtır?*



A) 2010 B) 2011 C) 2012 D) 4022 E) 8044

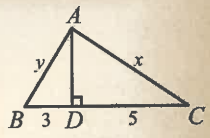
Çözüm: Yükseklik teoremine göre; yanların kareleri farkı tabanların kareleri farkına eşit olduğundan

$$c^2 - b^2 = 2012^2 - 2010^2$$
$$= (2012 - 2010)(2012 + 2010)$$
$$= 2 \cdot 4022 = 8044$$

olarak bulunur.

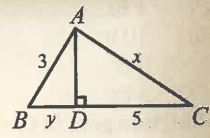
Doğru cevap: E.

1.
ABC dik üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$|AB| = y$ br
olduğuna göre $x^2 - y^2$ **toplamı kaçtır?**



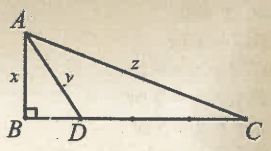
A) 16 B) 22 C) 25 D) 30 E) 34

2.
ABC dik üçgen
$AD \perp BC$
$|AB| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$|BD| = y$ br
olduğuna göre $x^2 + y^2$ **toplamı kaçtır?**



A) 16 B) 31 C) 34 D) 36 E) 41

3.
$[ABC]$ dik üçgen
B, D, C doğrudaş
$|AB| = x$ birim
$|AD| = y$ birim
$|AC| = z$ birim
$|DC| = 3 \cdot |BD|$

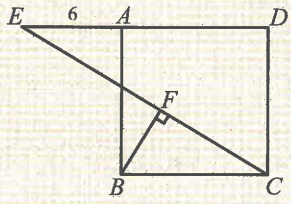


olduğuna göre $z^2 = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$ eşitliğini sağlayan a ve b değerleri için (a, b) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-16, -15)$ B) $(-15, -16)$ C) $(15, 16)$
D) $(16, 15)$ **E)** $(-15, 16)$

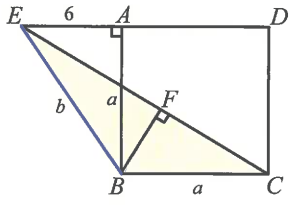
Örnek. *$[ABCD]$ bir kare*
D, A, E doğrudaş
$[BF] \perp [CE]$

$|EA| = 6$ br
olduğuna göre
$|EF|^2 - |FC|^2$ farkı kaçtır?



A) 6 B) 12 C) 24 D) 36 E) 72

Çözüm: Derhal E ile B noktalarını birleştirelim. Karenin bir kenar uzunluğu a br ve bununla birlikte $|EB| = b$ br olsun.



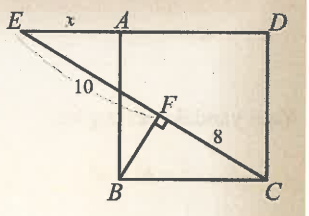
Oluşan EBC üçgeninde $[BF]$ yükseklik olduğundan, yükseklik teoremine göre

$$|EF|^2 - |FC|^2 = b^2 - a^2$$

olur. Diğer yandan BAE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $a^2 + 36 = b^2$ olduğundan $b^2 - a^2 = 36$ bulunur.

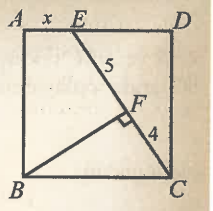
Doğru cevap: D.

4.
$[ABCD]$ bir kare
D, A, E doğrudaş
$[BF] \perp [CE]$
$|CF| = 8$ br
$|FE| = 10$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



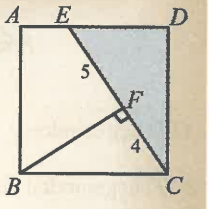
A) 3 B) 4 C) 5 **D)** 6 E) 7

5.
$[ABCD]$ bir kare
$E \in [AD]$
$[BF] \perp [CE]$
$|CF| = 4$ br
$|FE| = 5$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 3/2 C) 2 D) 5/2 **E)** 3

6.
$[ABCD]$ bir kare
$E \in [AD]$
$[BF] \perp [CE]$
$|CF| = 4$ br
$|FE| = 5$ br
olduğuna göre taralı CDE dik üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

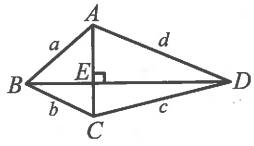


A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 45

Teorem [Dikgen]. *Köşegenleri dik kesişen bir dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirlerine eşittir.*

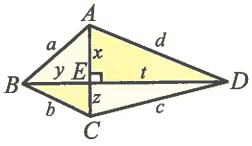
Yani yandaki şekle göre;

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$



Kanıt: Aslında aynı kapıya çıkan iki ayrı kanıt sunacağız. İkincisi, yükseklik teoreminin maharetini gösterecek.

Birinci yol. Uzunlukları alt şekildeki gibi adlandıralım.



AEB ve DEC dik üçgenlerinde Pisagor teoremi yazıp taraf tarafa toplayalım:

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$z^2 + t^2 = c^2$$

olduğundan

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + c^2$$

elde edilir. Şimdi de BEC ve AED dik üçgenlerinde Pisagor teoremi yazıp taraf tarafa toplayacağız.

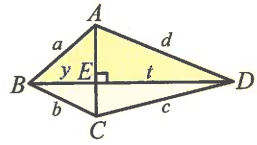
$$z^2 + y^2 = b^2$$
$$x^2 + t^2 = d^2$$

olduğundan

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b^2 + d^2$$

elde edilir. Demek ki gerçekten $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ imiş.

İkinci yol. Dikkat edilecek olursa, şeklimize iki adet yükseklik teoremi uygulanabilir.



ABD üçgeninden

$$a^2 - d^2 = y^2 - t^2$$

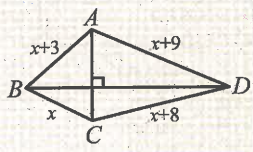
BCD üçgeninden de

$$b^2 - c^2 = y^2 - t^2$$

olduğundan $a^2 - d^2 = b^2 - c^2$ yani $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ bulunur.

Köşegenleri dik kesişen böyle dörtgenlere **dikgen dörtgen** denir. Bu teoremi de '*Dikgen dörtgenlerde karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirlerine eşittir*' diye akılda tutarız.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AC \perp BD$
$|BC| = x$ br
$|CD| = x + 8$ br
$|DA| = x + 9$ br
$|AB| = x + 3$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

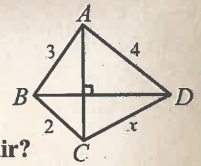
Çözüm: Dikgen dörtgen teoremine göre

$$x^2 + (x+9)^2 = (x+3)^2 + (x+8)^2$$
$$x^2 + x^2 + 18x + 81 = x^2 + 6x + 9 + x^2 + 16x + 64$$
$$18x + 81 = 22x + 73$$
$$4x = 8$$

eşitliğinden $x = 2$ bulunur.

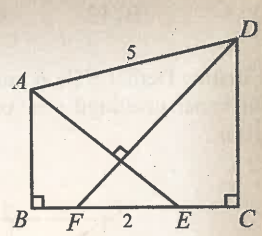
Doğru cevap: B.

7.
ABCD bir dörtgen
$AC \perp BD$
$|CB| = 2$ birim
$|BA| = 3$ birim
$|AD| = 4$ birim
olduğuna göre $|CD| = x$ kaç birimdir?



A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 5

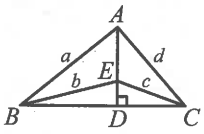
8.
ABCD bir dörtgen
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$AE \perp DF$
$|FE| = 2$ br
$|AD| = 5$ br
olduğuna göre
$|AB|^2 + |BF|^2 + |EC|^2 + |CD|^2$ toplamı kaçtır?



A) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{23}$ C) 5 D) $\sqrt{27}$ E) $\sqrt{29}$

Teorem [Çapraz]. *E noktası, ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik üzerindeyse* $|AB|^2+|EC|^2=|AC|^2+|BE|^2$.

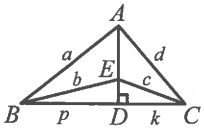
Yani yandaki gibi bir şekilde;



$a^2+c^2=b^2+d^2$.

Kanıt: Yine iki kanıt yapacağız.

Birinci yol. $|BD|=p$ br ve $|DC|=k$ br olsun.



ABC üçgeninde yükseklik teoreminden gelen

$$a^2-d^2=p^2-k^2$$

eşitliğiyle EBC üçgeninde yükseklik teoreminden gelen

$$b^2-c^2=p^2-k^2$$

eşitlikleri birlikte düşünülürse

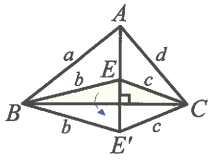
$$a^2-d^2=b^2-c^2$$

çıkacağından

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

olduğu kanıtlanır. Bu teorem kesinlikle cennetlik!

İkinci yol. EBC üçgenini $[BC]$ üzerinden katlayalım. E noktasının geldiği yere E' diyelim.

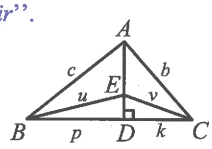


Şekilden de görüldüğü üzere; oluşan $ABE'C$ dörtgeni bir dikgen dörtgendir. Bu yüzden

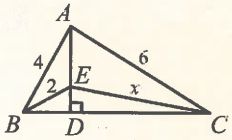
$$a^2+c^2=b^2+d^2.$$

Sonuç: Böyle bir şekilde *''Tüm çapraz uzunlukların kareleri toplamları birbirlerine eşittir''*.

$c^2+k^2=b^2+p^2$
$u^2+k^2=v^2+p^2$
$c^2+v^2=b^2+u^2$



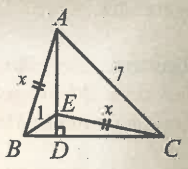
9.



x kaçtır?

$2\sqrt{6}$

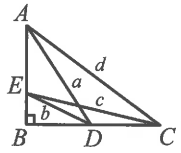
10.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BE|=1$ birim
$|CA|=7$ birim
$|AB|=|CE|=x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 5 D) $5\sqrt{2}$ E) 6

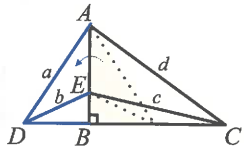
Teorem. *ABC dik üçgeninde D ve E dik kenarlar üzerinde herhangi iki nokta ise* $|AC|^2+|DE|^2=|AD|^2+|CE|^2$.

Yani yandaki gibi bir şekilde;



$a^2+c^2=b^2+d^2$.

Kanıt: ABC, EBD, ABD, EBC üçgenlerinde Pisagor Teoremi uygulanıp sonuçlar ortak çözülürse istenen elde edilir ama bunu yapmaya hiç niyetimiz yok. Bakın ne yapacağız?

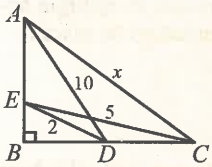


ADB üçgenini $[AB]$ kenarı üzerinden sola doğru katlarsak, biraz önce gördüğümüz teoreme uygun bir şekil elde ederiz.

$$|AC|^2+|DE|^2=|AD|^2+|CE|^2$$

Çaprazların kareleri toplamı birbirlerine eşittir deyince bu teorem de kanıtlanmış olur.

11.



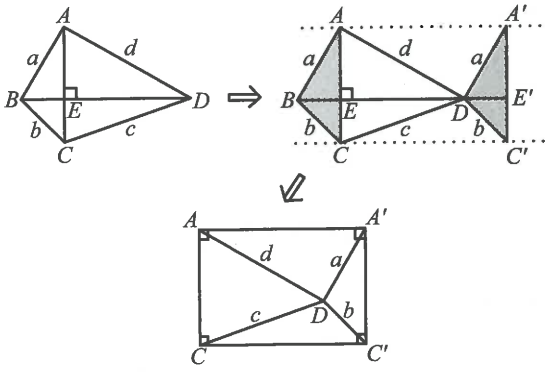
x kaçtır?

11

Şimdi de bu teoremin sonucu olan çok önemli bir teorem vereceğiz.

Teorem. *Bir dikdörtgenin içinde alınan herhangi bir noktanın dikdörtgenin zıt köşelerine olan uzaklıklarının kareleri toplamı birbirlerine eşittir.*

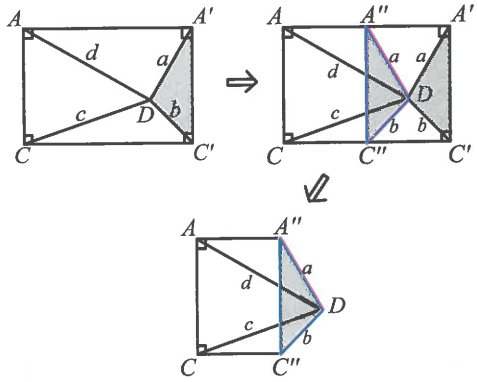
Kanıt: Yine görsel bir kanıt yapacağız, okur cebirsel kanıtını mutlaka kendisi yapmalıdır.



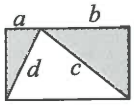
Üst şekildeki gibi ABC üçgenini BD uzunluğu kadar sağa yani B ile D noktası çakışana dek kaydırırsak da aynı kural yine karşımıza çıkar.

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Peki nokta dışarıda alınsa da olur muydu? Bakalım... Elde ettiğimiz son dikdörtgende katlama yapacağız.

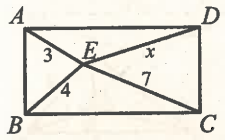


Üst şekilde taralı olan üçgeni sola doğru katlarsak da aynı sonuca ulaşırız. Yani, hâla $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Şimdi de noktanın dikdörtgen üzerinde alındığında da eşitliğin bozulmadığını kanıtlayalım. Sanırım en kolayı bu olacak.



Yandaki dikdörtgenin kısa kenarlarının eşit olduğuna dikkat edilerek taranan üçgenlerde Pisagor Teoremi uygulanırsa $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ eşitliğinin bozulmamaya kararlı olduğunu görürüz.

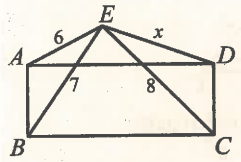
12.



ABCD dikdörtgense $x = ?$

$\sqrt{42}$

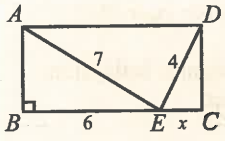
13.



ABCD dikdörtgense $x = ?$

$\sqrt{51}$

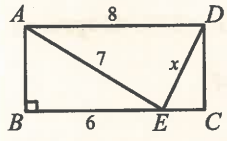
14.



ABCD dikdörtgense $x = ?$

$\sqrt{3}$

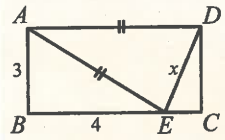
15.



ABCD dikdörtgense $x = ?$

$\sqrt{17}$

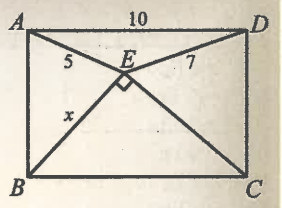
16.



ABCD dikdörtgense $x = ?$

$\sqrt{10}$

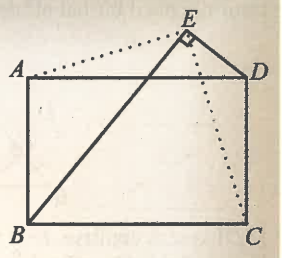
17.
$ABCD$ bir dikdörtgen
E iç bölgede bir nokta
$BE \perp EC$
$|AE| = 5$ br
$|ED| = 7$ br
$|DA| = 10$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 6 B) $\sqrt{38}$ C) 7 D) $\sqrt{62}$ E) 8

18.
$ABCD$ bir dikdörtgen
E dış bölgede bir nokta
$BE \perp ED$
$|AE|^2 + |EC|^2 = 89$ br^2
Çevre$(ABCD) = 26$ br

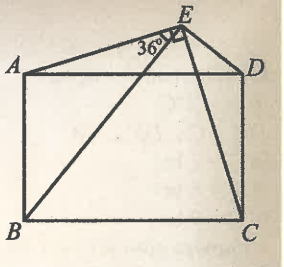
olduğuna göre
$|ABCD|$ kaç br^2 dir?



A) 20 B) 26 C) 40 D) 52 E) 80

19.
$ABCD$ bir dikdörtgen
E dış bölgede bir nokta
$AE \perp EC$
$m(AEB) = 36°$

olduğuna göre
$m(DEC)$ kaç derecedir?

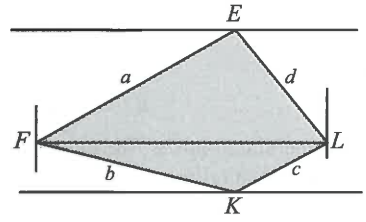


A) 18 B) 30 C) 36 D) 45 E) 54

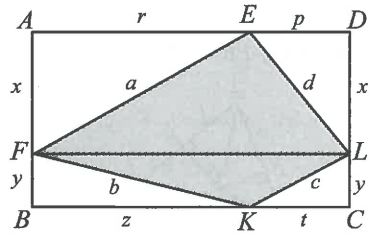
Verdiğimiz tüm bu teoremlerin tersi de doğrudur. Bir tanesini kanıtlarsak, hepsi kanıtlanmış olur zaten.

Teorem. *Karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirine eşit olan dörtgenler, dikgendir.*

Kanıt 1: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ eşitliğini sağlayan dörtgenimiz $EFKL$ olsun.



Üst sol şekildeki gibi E ve K köşelerinden FL köşegenine paraleller çizelim. F ve L köşelerinden bu doğrulara dikler çıkarsak, alt şekildeki gibi $ABCD$ dikdörtgenini elde ederiz.



Nokta ve uzunlukları üst şekildeki gibi isimlendirip, başlayalım:

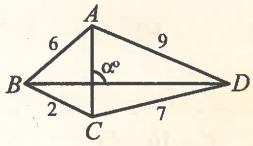
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$
$$x^2 + r^2 + y^2 + t^2 = y^2 + z^2 + x^2 + p^2$$
$$r^2 + t^2 = z^2 + p^2$$
$$r^2 - p^2 = z^2 - t^2$$
$$(r-p)(r+p) = (z-t)(z+t)$$

Şekle göre $r + p = z + t$ olduğundan sadeleştirme yapılırsa

$$r - p = z - t$$

elde edilir. Şimdi, hem $r + p = z + t$, hem de $r - p = z - t$ olduğundan, eşitlikler taraf tarafa toplanır veya çıkartılırsa, $r = z$ ve $p = t$ olduğu görülür. $ABKE$ ve $EKCD$ birer dikdörtgen olduğundan $EFKL$ dörtgeninin dikgen olduğu kanıtlanmış olur.

20.



α kaçtır?

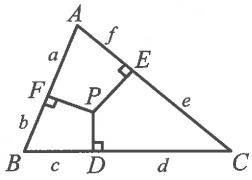
90

Dik üçgenlerle alakalı son bir teoremimiz daha var. Onu da verip konumuza nokta koyalım.

Carnot Teoremi. *Bir üçgenin iç bölgesinde alınan isteksel bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin üçgenin kenarlarını ayırdığı parçaların birer atlayarak kareleri toplamı eşittir.*

Yani şekle göre;

$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2.$



Kanıt 1. Rastgele alınan nokta P olsun. P noktasını üçgenin köşelerine birleştirelim.

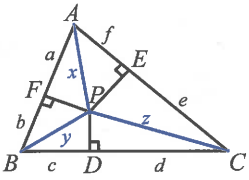
$$a^2 + |PD|^2 = f^2 + |PF|^2$$
$$c^2 + |PE|^2 = b^2 + |PD|^2$$
$$e^2 + |PF|^2 = d^2 + |PE|^2$$

Taraf tarafa toplama ve sonrasında sadeleştirmeler yapılırsa;

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

bulunur.

Kanıt 2. $|PA| = x$ br, $|PB| = y$ br ve $|PC| = z$ br olsun.



Sırasıyla PAB, PBC ve PCA üçgenlerinde yükseklik teoremini uygulayacağız.

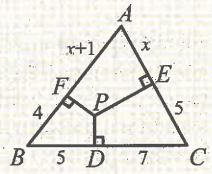
$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$
$$y^2 - z^2 = c^2 - d^2$$
$$z^2 - x^2 = e^2 - f^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa sol taraf 0 çıkacağından

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$PD \perp BC$, $PE \perp CA$, $PF \perp AB$
$|FB| = 4$ br
$|BD| = |CE| = 5$ br
$|DC| = 7$ br
$|EA| = x$ br
$|AF| = x + 1$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

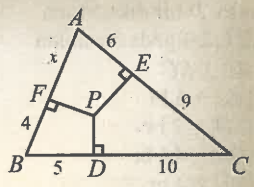
Çözüm: Carnot Teoremi'ne göre

$$(x+1)^2 + 5^2 + 5^2 = x^2 + 4^2 + 7^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + 25 + 25 = x^2 + 16 + 49$$
$$2x + 51 = 65$$

eşitliğinden $x = 7$ olarak bulunur.

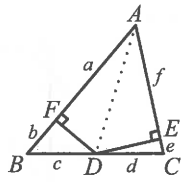
Doğru cevap: D.

21.
ABC bir üçgen
$PD \perp BC$, $PE \perp CA$, $PF \perp AB$
$|FB| = 4$ br
$|BD| = 5$ br
$|DC| = 10$ br
$|CE| = 9$ br
$|EA| = 6$ br
$|AF| = x$ br
ise x'ten küçük en büyük doğal sayı kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 7

Şimdi de P noktası üçgenin üstünde olursa Carnot Teoremi'nin nasıl bir hal aldığına bakacağız.



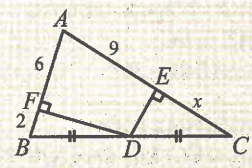
$[AD]$ keseni çizilirse AFD ve AED dik üçgenlerinin ortak hipotenüse sahip oldukları görülür.

$$|AF|^2 + |FD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2$$
$$a^2 + (c^2 - b^2) = f^2 + (d^2 - e^2)$$
$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2.$$

Görüldüğü üzere formülümüzde bir değişiklik olmadı. Hala birer atlayarak kareler toplamını birbirlerine eşitliyoruz.

Not: Carnot teoremi tüm çokgenler için geçerlidir!

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |DC|$
$DE \perp CA$, $DF \perp AB$
$|BF| = 2$ br
$|FA| = 6$ br
$|AE| = 9$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

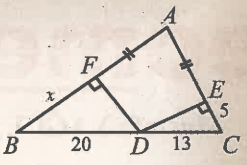
Çözüm: Carnot Teoremi'ni sorumuza uygularsak $|BD| = |DC|$ olduğundan $|BD|^2$ ve $|DC|^2$ değerleri sadeleşecektir. O halde

$$x^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2$$

eşitliğinden $x^2 = 49$ yani $x = 7$ bulunur.

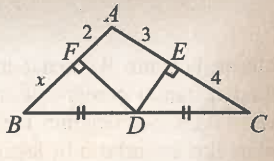
Doğru cevap: E.

22.
ABC bir üçgen
$DF \perp AB$ ve $DE \perp AC$
$|AF| = |AE|$
$|EC| = 5$ birim
$|CD| = 13$ birim
$|DB| = 20$ birim
olduğuna göre $|FB| = x$ kaç birimdir?



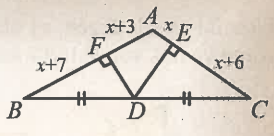
A) 18 **B)** 16 C) 13 D) 12 E) 10

23.
ABC bir üçgen
$DF \perp AB$ ve $DE \perp AC$
$|BD| = |DC|$
$|AF| = 2$ birim
$|AE| = 3$ birim
$|CE| = 4$ birim
olduğuna göre $|BF| = x$ kaç birimdir?



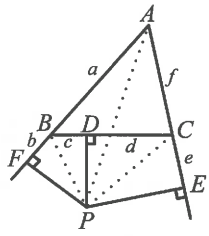
A) 2 B) 3 C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 5

24.
ABC bir üçgen
$DF \perp AB$ ve $DE \perp AC$
$|BD| = |DC|$
$|AE| = x$ birim
$|AF| = x + 3$ birim
$|EC| = x + 6$ birim
$|BF| = x + 7$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Son olarak P noktasının üçgenin iç bölgesinde değil de dış bölgesinde alınması durumunda Carnot Teoremi'nin nasıl uygulanacağını anlatacağız.



P noktasını yan şekildeki gibi alıp, üçgenin kenarlarına (veya uzantılarına) dikmeler indirelim. Uzunluklar da şekildeki gibi olsun. Elde edilen

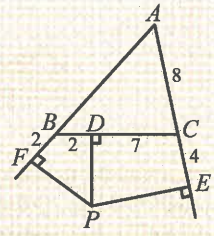
$$(a+b)^2 + |PF|^2 = |PE|^2 + (e+f)^2$$
$$c^2 + |PD|^2 = |PF|^2 + b^2$$
$$e^2 + |PE|^2 = |PD|^2 + d^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(a+b)^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + (f+e)^2$$

elde edilir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$PD \perp BC$, $PE \perp CA$, $PF \perp AB$
$|FB| = |BD| = 2$ br
$|DC| = 7$ br
$|EC| = 4$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre $|AB|$ kaç br *dir?*



A) 12 B) 13 C) $\sqrt{177}$ D) $\sqrt{185}$ E) 14

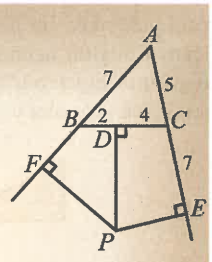
Çözüm: Carnot Teoremi'ne göre

$$|AB|^2 + 2^2 + 4^2 = 2^2 + 7^2 + 12^2$$
$$|AB|^2 + 4 + 16 = 4 + 49 + 144$$
$$|AB|^2 = 177$$

eşitliğinden $|AB| = \sqrt{177}$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

25.
ABC bir üçgen
$PD \perp BC$, $PE \perp CA$, $PF \perp AB$
$|AB| = 7$ br
$|BD| = 2$ br
$|DC| = 4$ br
$|EC| = 7$ br
$|AC| = 5$ br
olduğuna göre $7 \cdot |FB|$ kaç br dir?



A) 32 B) 31 C) 30 **D)** 29 E) 27

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

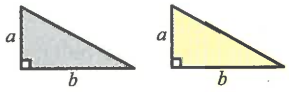
Eş Dik Üçgenler

Pisagor Teoremi ve ardından Yükseklik Teoremi'yle birlikte artık geometride bazı uzunlukları hesaplayabiliyor olduk. Şimdilik borumuz sadece dik üçgenlerde ötse de, ilerde yeni yeni teoremler öğrendikçe her üçgende her türlü uzunluğu hesaplayabiliyor olacağız. Bunun en önemli ilk adımları bu yazıda atılacak, bu yüzden bu yazıya azami özen istiyoruz.

Daha önce tanımsız eşlik bağıntısından bahsetmiş ve üçgenlerde eşliği tanımlamıştık. Kaldığımız yerden devam ediyoruz.



Yukardaki iki üçgene –her ne kadar öyle görünseler de– şu halleriyle eş diyemeyiz. Mutlaka ve mutlaka üçüncü bir bilgiye ihtiyacımız var. Bu bilgi, iki üçgenin üçüncü kenarlarının eş olması da olabilir, boyu a br ve b br olan kenarların belirttiği açıların eşliği de... Ama dik üçgenlerde karşılıklı iki kenarın eşliği, üçgenlerin eşliğine yeter!



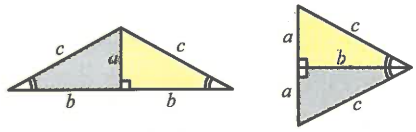
Yani yukardaki iki dik üçgen eştir. Çünkü burada diklik, üçüncü bilgidir aslında... İki üçgene de Pisagor teoremi uygulansa hipotenüsleri aynı çıkacaktır ve K-K-K eşliği gereğince üçgenler eş olacaktır.



Karşılıklı birer açısı ve kenarı eş olan dik üçgenler de eştir. Zira üçgenler dik olduğundan, karşılıklı birer açısının eş verilmesi aslında karşılıklı üç açısının da eş olması anlamına gelir. E birer kenarları da eş verilmişse A-K-A eşliği gereğince bu iki dik üçgen eştir.

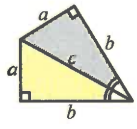
Şimdi, eş dik üçgenlerin marifetlerinden bazılarını göstereceğiz. Geometride önemli birçok şeklin temelinde eş dik üçgenler vardır. Bu yüzden dik üçgenlerde eşliğin (hatta genel olarak iki üçgenin eşliğinin) bilinmesi bir çok şeklin özelliğinin çıkarılmasına ve anlaşılmasına yardımcı olur.

Örneğin, iki eş dik üçgen, eş olan dik kenarları üzerinden zıt yönlü birbirlerine yapıştırılırsa;



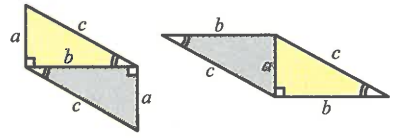
oluşan üçgenin iki kenar uzunluğu birbirine eşit olacağından, tanım gereği oluşan üçgen ikizkenardır. Bu sayede ikizkenar üçgenin taban açılarının eşliği görülmüş olur. İkiz kenarların birleştiği köşeye 'tepe' dersek, tepeden inen yüksekliğin hem iç açıortay hem de kenarortay olduğu da anlaşılmış olur.

Eğer iki eş dik üçgen, hipotenüsleri üzerinden zıt yönlü birbirlerine yapıştırılırsa;



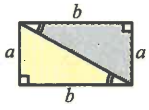
oluşan dörtgen, tanım gereği bir deltoittir. Deltoitte köşegenlerin birinin açıortay olduğunu anlaşılmış olur.

Eğer iki eş dik üçgen, eş olan dik kenarları üzerinden zıt yönlü ve ters yönde birbirlerine yapıştırılırsa;



oluşan dörtgen, tanım gereği bir paralelkenardır. Bu sayede paralelkenarlarda karşılıklı açıların eşliği anlaşılmış olur. Ayrıca, eğer eş dik üçgenler ikizkenar üçgen olsalardı, bu işlem sonucunda eşkenar dörtgen çıkardı.

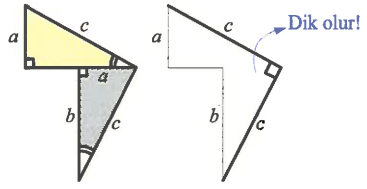
Eğer iki eş dik üçgen, hipotenüsleri üzerinden zıt yönlü ve ters yönde birbirlerine yapıştırılırsa;



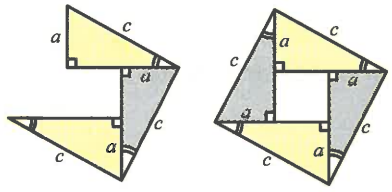
oluşan dörtgen tanım gereği bir dikdörtgendir. Bu sayede dikdörtgenin karşılıklı kenarlarının eş olduğunu ve köşegenin dikdörtgeni iki eş üçgene ayırdığını görürüz.

Örnekleri arttırmak mümkün ama biz bir an önce ağzımızdaki baklayı çıkartmak istiyoruz.

İki eş dik üçgeni aşağıdaki gibi birbirlerine yapıştıralım.

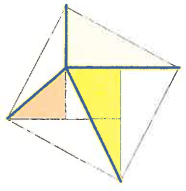


Burada görülmesi ve mutlaka bilinmesi gereken şey, hipotenüslerin dik kesiştiğidir. Şu durumda bu eş dik üçgenlerden dört tanesi aynı pozisyonda yapıştırılırsa;



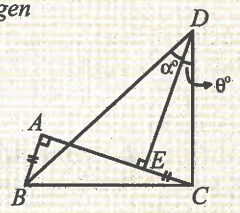
hipotenüsler eşit boyda olduğundan oluşan dikdörtgen tam tamına bir karedir. Hatta ortada oluşan küçük boşluk da bir karedir. Bu yüzden, bundan sonra bir karenin bir kenarı üzerine karenin içine doğru bir dik üçgen yapıştırılırsa, siz de derhal diğer dik kenarlarına benzer şekilde dik üçgenler yapıştırın. Bu dört dik üçgenin eş olacağını unutmayın!

Böyle sorularda genelde ortadaki küçük karenin herhangi bir köşesinin, büyük karenin herhangi bir köşesine uzaklığı sorulur.



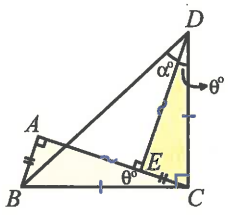
Bu uzunlukların her biri üst şekilde taranmış dik üçgenlerden uygun olanında Pisagor teoremi uygulanarak bulunur.

Örnek. *ABC ve DEC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
DE ⊥ AC
|AB| = |EC|
|AC| = |DE|
m(CDE) = θ°
m(EDB) = α°
olduğuna göre α'nın θ
cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) 45 – θ B) 90 – 2θ C) 30 + θ D) θ E) 2θ

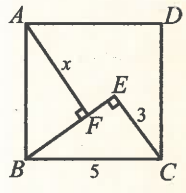
Çözüm: Aşağıdaki şekilde taranmış *CAB* ve *DEC* üçgenlerine odaklanıyoruz. İkisi de dik üçgen olup dik kenarları karşılıklı olarak birbirlerine eşit boyda olduklarından bu üçgenler K.A.K. eşliği gereğince eştir.



Bu eşlikten hipotenüslerinin de eş oldukları çıkar. Ayrıca *CDE* açısının ölçüsü θ° olduğundan *BCA* açısının da ölçüsü θ° dir, buradan da *BCD* açısının dik olduğunu anlarız. O halde *BCD* bir ikizkenar dik üçgendir. Bu yüzden *m(CDB)* = 45° olmalıdır. O halde *m(EDB)* = α = 45 – θ bulunur.

Doğru cevap: A.

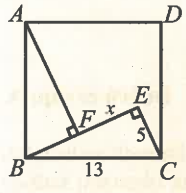
1.



ABCD bir kare ise *x* = ?

4

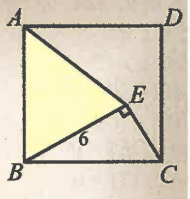
2.



ABCD bir kare ise *x* = ?

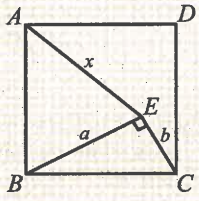
7

3.
ABCD bir kare
BEC bir dik üçgen
$|BE| \perp |EC|$
$|BE| = 6$ br
olduğuna göre taralı *ABE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



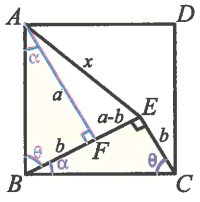
A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

Soru Tipi. *ABCD bir kare*
BEC dik üçgen
$|BE| = a$ br
$|EC| = b$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x^2 ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2+(a-b)^2$ B) $a^2+(a+b)^2$ C) $b^2+(a-b)^2$
D) $b^2+(a+b)^2$ E) $a^2-(a+b)^2$

Çözümü: *A*'dan *BE*'ye inilen dikme ayağı *F* olsun. *AFB* ile *BEC* dik üçgenlerinin hem iç açıları eş hem de hipotenüsleri eş olduğundan, bu üçgenler eştir.



$|EC| = b$ br ise $|BF| = b$ br dir. $|BE| = a$ br ise $|AF| = a$ br dir. Şimdi oluşan *AFE* dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

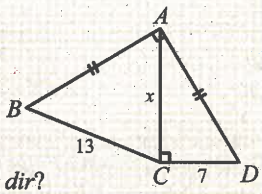
$$x^2 = a^2 + (a-b)^2$$

elde edilir.

Doğru cevap: A.

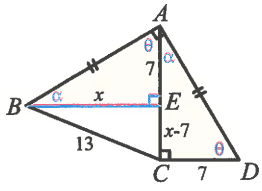
Dikkat ettiyseniz yukardaki çözümde karenin sadece kenar uzunluklarının eşit ve açılarının dik olmasını kullandık. Dolayısıyla bu sorular çoğu aynı özellikleri taşıyan ikizkenar dik üçgenlerde de sorulur. Tekniğimiz değişmez.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$
$AC \perp CD$
$|DA| = |AB|$
$|BC| = 13$ br
$|CD| = 7$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 7 C) 8 D) 12 E) 13

Çözümü: *B*'den *AC*'ye inilen dikme ayağı *E* olsun. *BEA* ile *ACD* üçgenlerinin hem tüm iç açı ölçüleri eş hem de hipotenüsleri eş olduğundan, bu üçgenler eştir.



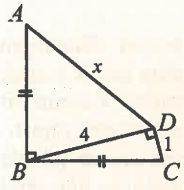
O halde $|AC| = x$ br diye $|BE| = x$ br olmalıdır. Diğer yandan $|CD| = 7$ br diye $|AE| = 7$ br olmalıdır. Buradan $|EC| = x - 7$ br bulunur. *BEC* dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$x^2 + (x-7)^2 = 13^2$$

eşitliğinden $x = 12$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

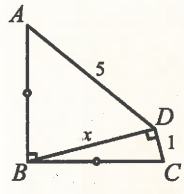
4.



x kaçtır?

5

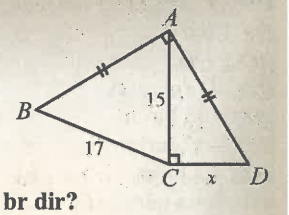
5.



x kaçtır?

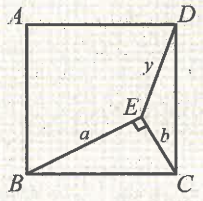
4

6.
ABCD bir dörtgen
$DA \perp AB$
$AC \perp CD$
$|DA| = |AB|$
$|BC| = 17$ br
$|AC| = 15$ br
olduğuna göre $|CD| = x$ kaç br dir?



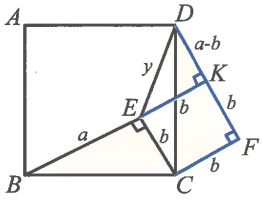
A) 5 **B)** 7 C) 8 D) 12 E) 13

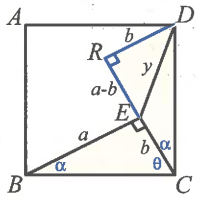
Soru Tipi. *ABCD bir kare*
BEC dik üçgen
$|BE| = a$ br
$|EC| = b$ br
$|ED| = y$ br
olduğuna göre y^2 ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2 + (a-b)^2$ B) $a^2 + (a+b)^2$ C) $b^2 + (a-b)^2$
D) $b^2 + (a+b)^2$ E) $a^2 - (a+b)^2$

Çözümü: İki farklı çözüm sunacağız.





İsterseniz sol şekildeki gibi, *BEC*'ye eş olan *DFC* dik üçgenini çizin. *BE*'nin *DF*'yi kestiği nokta *K* olsun. *CFKE* bir kare olur. *DKE* dik üçgeninde Pisagor teoreminden de

$$y^2 = b^2 + (a-b)^2$$

elde edilir.

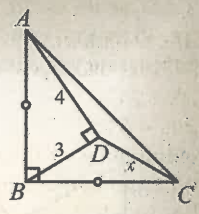
İsterseniz de sağ şekildeki gibi *CE*'yi uzatarak *D*'den ona bir dik indirin. Dikme ayağına *R* deyin. *DRC* ile *CEB* üçgenleri aynı sebepten dolayı eş olurlar. *DRE* dik üçgeninde Pisagor teoreminden de

$$y^2 = b^2 + (a-b)^2$$

elde edilir.

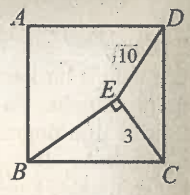
Doğru cevap: C.

7.
ABC bir dik üçgen
$|AB| = |BC|$
$AB \perp BC$, $BD \perp DA$
$|BD| = 3$ br
$|DA| = 4$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



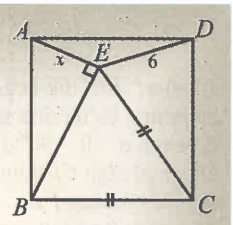
A) 3 **B)** $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 4

8.
ABCD bir kare
CEB bir dik üçgen
$CE \perp EB$
$|CE| = 3$ br
$|ED| = \sqrt{10}$ br
olduğuna göre karenin alanı kaç birimkaredir?



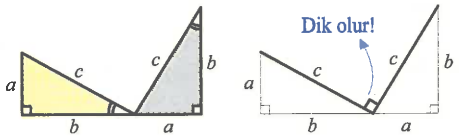
A) 13 B) 19 C) 21 D) 23 **E)** 25

9.
ABCD bir kare
$BE \perp EA$
$|BC| = |CE|$
$|ED| = 6$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

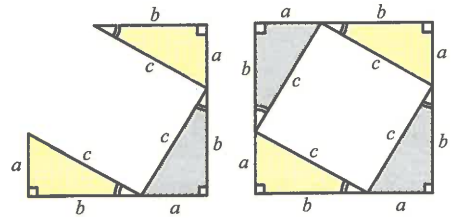


A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) $\sqrt{13}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 3

Şimdiyse iki eş dik üçgeni başka köşelerinden tutturacağız. İlk başta verdiğimiz iki eş dik üçgeni aşağıdaki gibi birbirlerine yapıştıralım.

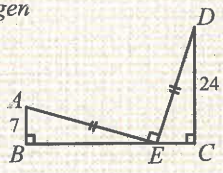


Burada görülmesi ve mutlaka bilinmesi gereken şey, hipotenüslerin dik kesiştiğidir. Şu durumda bu eş dik üçgenlerden dört tanesi aynı pozisyonda yapıştırılırsa;



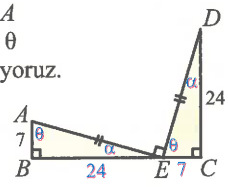
hipotenüsler eşit boyda olduğundan oluşan dikdörtgen tam tamına bir karedir. Hatta ortada oluşan küçük boşluk da bir karedir. Yani şekil, aslında bir karenin kenarları üzerine dışa doğru yapıştırılmış dört eş dik üçgen görünümündedir. Bu yüzden, bundan sonra bir karenin bir kenarı üzerine karenin dışına doğru bir dik üçgen yapıştırılırsa, siz de derhal diğer dik kenarlarına benzer şekilde dik üçgenler yapıştırın. Bu dört dik üçgenin eş olacağını unutmayın!

Örnek. *ABE ve ECD birer dik üçgen*
B, E, C noktaları doğrudaş
AB ⊥ BC, BC ⊥ CD, AE ⊥ ED
|AE| = |ED|
|AB| = 7 br, |CD| = 24 br
olduğuna göre |BC| kaç br dir?



A) 25 B) 27 C) 29 D) 30 E) 31

Çözüm: *ABE* dik üçgeninde *E* ve *A* açılarının ölçülerine sırasıyla α ve θ diyelim. α + θ = 90° olduğunu biliyoruz. Diğer yandan *CEB* bir doğru açı olduğundan *DEC* açısının ölçüsü de θ olmak zorundadır. Buradan *ECD* dik üçgeninde iç açıların ölçüleri toplamı gereği *D* açısının ölçüsü de α olmak zorundadır. Şu durumda *ABE* ve *ECD* üçgenlerinde iç açılar karşılıklı olarak eş olup *|AE| = |ED|* olduğundan *ABE* ile *ECD* üçgenleri A.K.A. Eşliği gereğince eştirler. O halde



$$|BE| = |DC| = 24 \text{ br ve } |EC| = |AB| = 7 \text{ br}$$

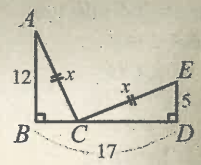
olmalıdır. Buradan

$$|BC| = |BE| + |EC| = 24 \text{ br} + 7 \text{ br} = 31 \text{ br}$$

olarak bulunur.

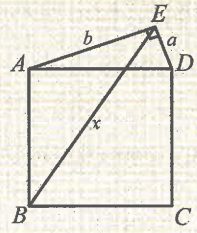
Doğru cevap: E.

10.
AB ⊥ BD
BD ⊥ DE
B, C, D doğrusal
|AB| = 12 birim
|BD| = 17 birim
|DE| = 5 birim
olduğuna göre |AC| = |CE| = x kaçtır?



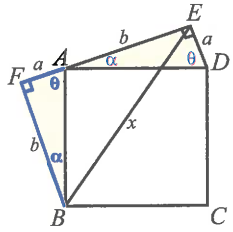
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Soru Tipi. *ABCD bir kare*
DEA dik üçgen
|DE| = a br
|EA| = b br
|EB = x br
olduğuna göre x^2 ifadesinin
a ve b cinsinden eşiti
aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2 + (a-b)^2$ B) $a^2 + (a+b)^2$ C) $b^2 + (a-b)^2$
D) $b^2 + (a+b)^2$ E) $a^2 - (a+b)^2$

Çözümü: *EA* doğrusunu *A* yönünde uzatıp *B*'den ona dik indirelim. Dikme ayağı *F* olsun.



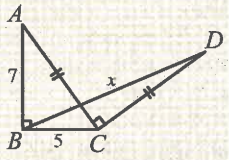
AED ile *BFA* üçgenleri eş olurlar. *EFB* dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$x^2 = b^2 + (a+b)^2$$

bulunur.

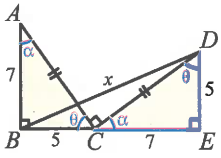
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC ve ACD birer dik üçgen*
AB ⊥ BC
AC ⊥ CD
|AC| = |CD|
|AB| = 7 br
|BC| = 5 br
olduğuna göre |BD| = x kaç br dir?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

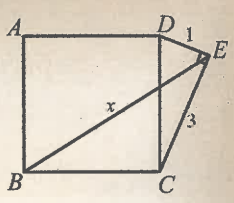
Çözüm: *ACD* ikizkenar üçgenini gözünüzle kareye tamamlarsanız, *ABC* dik üçgeninin karenin dışına doğru yapıştırıldığını görürsünüz.



O halde hemen komşu kenar üzerine de karenin dışına doğru eş bir dik üçgen yapıştıralım. *ABC* ile *CED* üçgenleri eş olduğundan *|CE| = 7* br ve *|ED| = 5* br olur. *DEB* dik üçgeninde dik kenar uzunluklarının 5 br ve 12 br olduğu fark edilirse Pisagor teoremine gerek kalmadan *|BD| = 13* br deriz, olur biter.

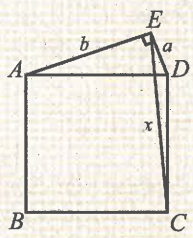
Doğru cevap: D.

11.
ABCD bir kare
CED bir dik üçgen
CE ⊥ ED
|CE| = 3 br
|ED| = 1 br
|EB| = x br
olduğuna göre *x* kaçtır?



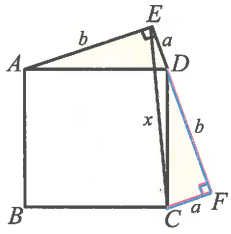
A) 4 **B) 5** C) 6 D) 7 E) 8

Soru Tipi. *ABCD bir kare*
DEA dik üçgen
|DE| = a br
|EA| = b br
|EC| = x br
olduğuna göre x^2 ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2 + (a-b)^2$ B) $a^2 + (a+b)^2$ C) $b^2 + (a-b)^2$
D) $b^2 + (a+b)^2$ E) $a^2 - (a+b)^2$

Çözümü: *ED* doğrusunu *D* yönünde uzatıp *C*'den ona dik indirelim. Dikme ayağı *F* olsun.



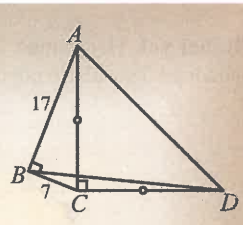
AED ile *DFC* üçgenleri eş olurlar. *EFC* dik üçgeninde Pisagor teoreminden $x^2 = a^2 + (a+b)^2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Uyarı: Son 4 soru tipinin sonucunda bulduklarımızı şöyle toparlayabiliriz:

Evvela x^2 ifadesi her zaman iki kare toplamı çıkar. Dahası, bu iki kare ifadenin biri, eğer *E* noktası içerdeyse dik üçgenin dik kenarlarının farkıdır, eğer *E* dışarıdaysa toplamıdır. Diğeri de her zaman, uzunluğu *x* olan doğru parçasına en yakın olan doğru parçasının boyudur.

12.
ABCD bir dörtgen
AB ⊥ BC
AC ⊥ CD
|AC| = |CD|
|AB| = 17 br
|BC| = 7 br

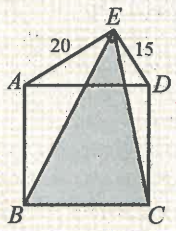


olduğuna göre *ABD* üçgeninin çevresi kaç br dir?

A) 51 B) 54 C) 63 D) 67 E) 68

Örnek. *ABCD bir kare*
DEA bir dik üçgen
DE ⊥ EA
|ED| = 15 br
|EA| = 20 br

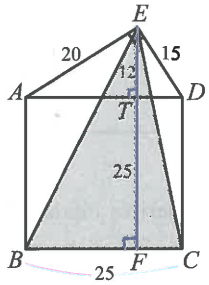
olduğuna göre EBC üçgensel bölgesinin alanı kaç birimkaredir?



A) $\frac{925}{2}$ B) $\frac{935}{2}$ C) $\frac{945}{2}$ D) $\frac{955}{2}$ E) $\frac{965}{2}$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. *DEA* dik üçgeninde Pisagor teoreminden *|DA|*'nın yani karenin bir kenarının 25 br uzunlukta olduğunu biliyoruz. O halde *|BC| = 25* br olduğundan sadece *E*'nin *BC*'ye uzaklığını bulmamız yetecek.



E'den *BC*'ye indirilen dikme *[BC]*'yi *F*'de, *[AD]*'yi *T*'de kessin. *|TF| = 25* br olduğu da aşikar. O halde bize *|ET|* lazım. *EAD* dik üçgeninin alanından faydalanarak

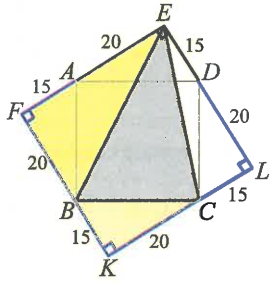
$$15 \cdot 20 = 25 \cdot |ET|$$

eşitliğinden *|ET| = 12* br dolayısıyla *|EF| = 37* br bulunur. Şu durumda;

$$\text{Alan}(EBC) = \frac{37 \cdot 25}{2} = \frac{925}{2} \text{ br}^2$$

bulunur.

İkinci yol. Her zaman *|ET|* değeri tam sayı çıkmaz. Bu yüzden bu soruların çözümünde, bu yolu öneririz.

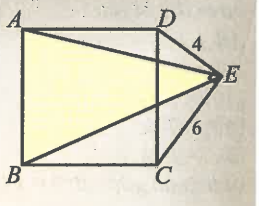


Daha önce yaptığımız gibi, karenin kenarlarına eş dik üçgenleri yapıştıralım. Oluşan büyük karenin alanından *EFB*, *BKC* ve *CLE* dik üçgenlerinin alanını çıkartırsak *EBC* üçgeninin alanına kavuşuruz.

$$\text{Alan}(EBC) = 35^2 - \frac{20 \cdot 35}{2} - \frac{15 \cdot 20}{2} - \frac{15 \cdot 35}{2} = \frac{925}{2}.$$

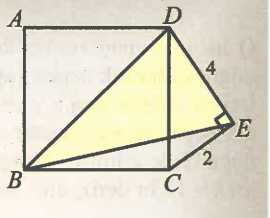
Doğru cevap: A.

13.
ABCD bir kare
CED bir dik üçgen
|CE| = 6 br
|ED| = 4 br
olduğuna göre *ABE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br²dir?



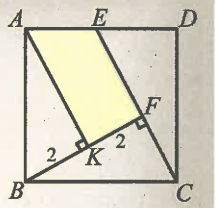
A) 36 **B) 38** C) 40 D) 42 E) 44

14.
ABCD bir kare
CED bir dik üçgen
|CE| = 2 br
|ED| = 4 br
olduğuna göre *DBE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br²dir?



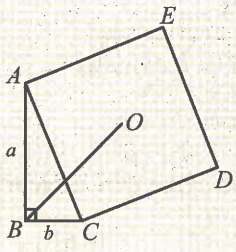
A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

15.
ABCD bir kare
BF ⊥ CE
AK ⊥ BF
|BK| = |KF| = 2 br
olduğuna göre *AKFE* dörtgensel bölgesinin alanı kaç br²dir?



A) 5 B) 6 **C) 7** D) 8 E) 9

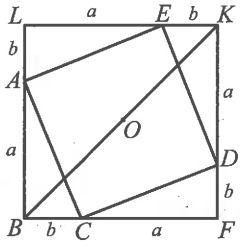
Soru Tipi. *ABC bir dik üçgen*
ACDE bir kare
O karenin merkezi
AB ⊥ BC
|AB| = a br
|BC| = b br
olduğuna göre
|BO| kaç br *dir?*



(Auckland Mat.Olmp'98)

A) $\frac{1}{2}(a+b)$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$
D) $a+b$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

Çözümü: Karenin diğer köşelerine de hemen eş dik üçgenlerimizi çizelim.



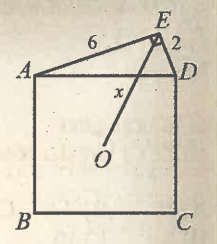
Bu sayede *BFKL* karesi oluşturulursa, O noktasının aynı zamanda bu karenin de merkezi olduğu görülür. Şu durumda *|BO|* değeri, *|BK|*'nin yarısıdır.

$$|BK| = (a+b)\sqrt{2} \text{ br}$$

olduğundan $|BO| = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ br dir.

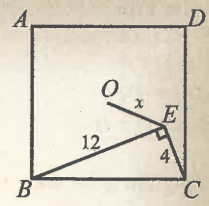
Doğru cevap: B.

16.
DEA bir dik üçgen
ABCD bir kare
O karenin merkezi
DE ⊥ EA
|DE| = 2 br
|EA| = 6 br
|EO| = x br
olduğuna göre *x* kaçtır?



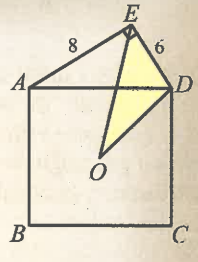
A) $2\sqrt{5}$ B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{10}$ E) $8\sqrt{2}$

17.
CEB bir dik üçgen
ABCD bir kare
O karenin merkezi
CE ⊥ EB
|CE| = 4 br
|BE| = 12 br
|EO| = x br
olduğuna göre *x* kaçtır?



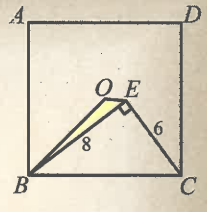
A) 4 B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) $6\sqrt{2}$

18.
DEA bir dik üçgen
ABCD bir kare
O karenin merkezi
DE ⊥ EA
|DE| = 6 br
|EA| = 8 br
olduğuna göre taralı *DEO* üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?



A) 21 B) 24 C) 27 D) 28 E) 35

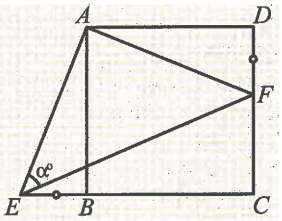
19.
CEB bir dik üçgen
ABCD bir kare
O karenin merkezi
CE ⊥ EB
|CE| = 6 br
|EB| = 8 br
olduğuna göre taralı *OBE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?



A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

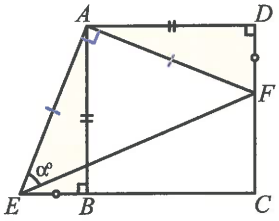
Soru Tipi. *ABCD bir kare*
E, B, C doğrudaş
F ∈ [CD]
|EB| = |DF|
m(AEF) = α°

olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

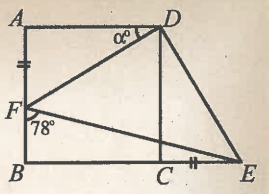
Çözümü: Bu sefer, eş dik üçgenleri biz yapıştırmayacağız. Soruda yapıştırılmış halde verilmiş zaten. Nerden mi çıktı bu dik üçgenlerin eş oldukları?



|DF| = |EB| eşitliği soruda verilmiş, *|AD| = |AB|* eşitliğini de biz gördük. Bu yüzden *ADF* ile *ABE* dik üçgenleri K-A-K gereğince eştir. O halde hipotenüsleri de eşit boyda olması gerektiğinden *FAE* bir ikizkenar dik üçgendir. Bu yüzden α = 45 olmalıdır.

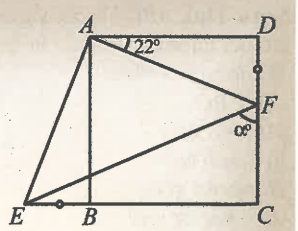
Doğru cevap: D.

20.
ABCD bir kare
B, C, E doğrudaş
|AF| = |CE|
m(EFB) = 78°
m(ADF) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



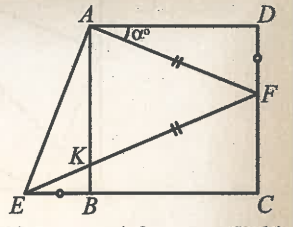
A) 12 B) 18 C) 30 **D) 33** E) 39

21.
ABCD bir kare
E, B, C doğrudaş
|EB| = |DF|
m(DAF) = 22°
m(EFC) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 57 B) 60 C) 62 D) 66 **E) 67**

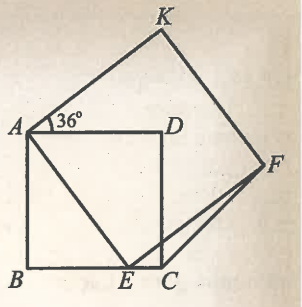
22.
ABCD bir kare
E, B, C doğrudaş
|EB| = |DF|
AB ∩ EF = {K}
|AF| = |FK|
m(DAF) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 20 **C) 22,5** D) 25 E) 30

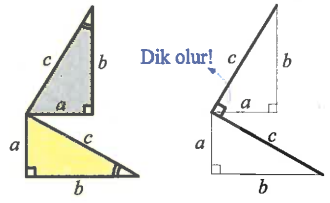
23.
ABCD ve *AEFK* birer kare
E ∈ [BC]
m(KAD) = 36°

olduğuna göre
m(EFC) kaç derecedir?



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Son olarak, bir-iki yapıştırma daha göstereceğiz. İki eş dik üçgeni dik kenarları birbirine paralel olacak şekilde;

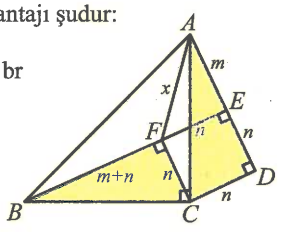


yukardaki gibi tek bir köşelerinden birbirlerine tutturulurlarsa, dik üçgenlerin hipotenüsleri yine dik kesişir. Aslına bakarsanız, bu şekil, dik kesişen hipotenüsleri kafanızdan kareye tamamlarsanız, bir karenin iki kenarı üzerine biri içeri doğru diğeri dışarı doğru yapıştırılmış iki eş dik üçgen şekli olduğunu anlarsınız.

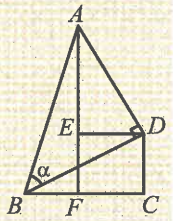
Bu tarz bir yapıştırmanın avantajı şudur:

ABC dik üçgeninde $|FC| = n$ br ve $|FB| = m + n$ br denirse;

$|FA| = x = \sqrt{m^2 + n^2}$ br olur ki bu sayede şeklin formülü daha sade olur.

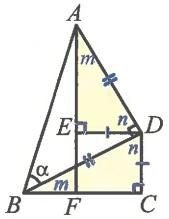


Örnek. *ABCD bir dörtgen*
CDEF bir kare
B, F, C ve A, E, F doğrudaş
$AF \perp BC$
$BD \perp DA$
olduğuna göre
$m(ABD) = \alpha$ *kaç derecedir?*



A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

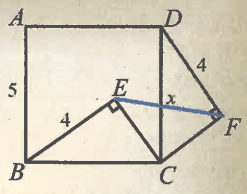
Çözüm: *DBC* dik üçgeninin *B* ve *D* açılarının ölçülerine sırasıyla *m* ve *n* diyelim.



$m + n = 90°$ olduğundan *BDE* açısının ölçüsü *m* olacak ve bundan dolayı da *BDA* açısı dik olduğundan *EDA* açısının ölçüsü *n* olacaktır. Bu da $m(DAE) = m$ demek olur. *BCD* ve *AED* üçgenlerinin üçer iç açısı da karşılıklı olarak birbirlerine eşit ve $|CD| = |ED|$ olduğundan bu üçgenler A.K.A. eşliği gereğince eştirler. O halde hipotenüsleri de eş olmalıdır ki bu yüzden *BDA* ikizkenar dik üçgen bulunur. Yani $m(ABD) = 45°$ olmalıdır.

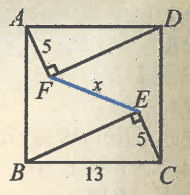
Doğru cevap: C.

24.
ABCD bir kare
CEB ve *CFD* birer dik üçgen
$CE \perp EB$, $CF \perp FD$
$|AB| = 5$ br
$|BE| = |FD| = 4$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



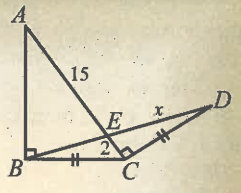
A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) 4 **D)** $3\sqrt{2}$ E) 5

25.
ABCD bir kare
CEB ve *AFD* birer dik üçgen
$CE \perp EB$, $AF \perp FD$
$|BC| = 13$ br
$|CE| = |AF| = 5$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



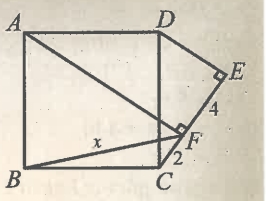
A) 8 **B)** $7\sqrt{2}$ C) 7 D) $6\sqrt{2}$ E) 6

26.
$AB \perp BC$
$AC \perp CD$
$|BC| = |CD|$
$|AE| = 15$ br
$|EC| = 2$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



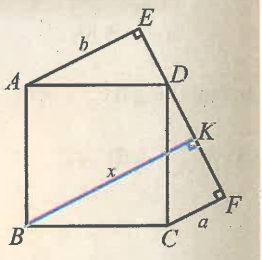
A) $4\sqrt{17}$ B) 16 C) $4\sqrt{13}$ D) 15 E) 13

27.
$ABCD$ bir kare
$DE \perp EC$
$AF \perp EC$
$|CF| = 2$ br
$|FE| = 4$ br
$|BF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) 8 **D)** $6\sqrt{2}$ E) 9

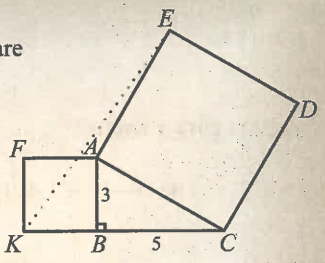
28.
$ABCD$ bir kare
$D \in [FE]$
$CF \perp FE$, $BK \perp FE$, $FE \perp EA$
$|CF| = a$ br
$|AE| = b$ br
$|BK| = x$ br
olduğuna göre x'in a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $2b-a$ B) $3a-b$ **C)** $a+b$ D) $3b-a$ E) $2a+b$

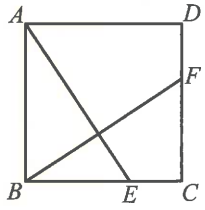
29.
ABC bir dik üçgen
$ACDE$ ve $AFKB$ birer kare
K, B, C doğrudaş
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 5$ br

olduğuna göre $|EK|$ kaç birimdir?

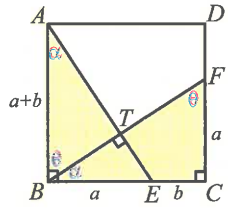


A) 8 B) 9 **C)** 10 D) 11 E) 12

Teorem. *$ABCD$ bir kare*
$E \in [BC]$, $F \in [CD]$
Eğer $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|CF|}{|FD|}$ *ise*
hem $|AE| = |BF|$
hem de $AE \perp BF$ olur.

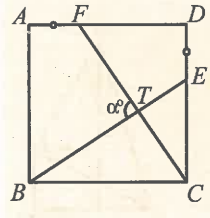


Kanıt: $|BE| = a$ br ve $|EC| = b$ br dersek, $|CF| = a$ br ve $|FD| = b$ br, karenin bir kenar uzunluğu da $a + b$ br olur.



Bu durumda, üst şekilden de görüleceği üzere ABE ile BCF dik üçgenlerinde dik kenarların boyları aynı olduğundan, bu üçgenler eştir. Bu da $|AE| = |BF|$ olmasına yeter. Diğer yandan $m(EAB) = \alpha$ dersek, eşlik gereğince $m(FBC) = \alpha$ olacağından $AE \perp BF$ de kanıtlanmış olur.

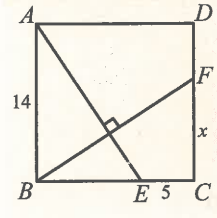
30.



$ABCD$ kareyse α kaçtır?

90

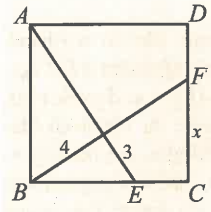
31.



$ABCD$ kareyse x kaçtır?

9

32.



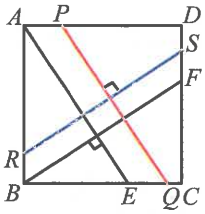
$ABCD$ kare ve $|AE| = |BF|$ ise x kaçtır?

5

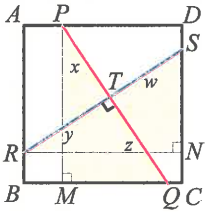
Bu teoremin oldukça güzel sonuçları var:

Sonuç 1. *Kare içinde birbirine dik iki kesen varsa, bu kesenlerin boyları eşittir.*

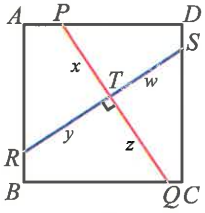
Hemen nedenini açıklayalım:



Dik kesişen kesenler, yukarıdaki gibi $[PQ]$ ve $[RS]$ kesenleri olsun. Eğer $[PQ]$'yu RS'ye olan dikliği bozulmayacak şekilde paralel olarak kaydırırsak boyu değişmez. Onu kaydıra kaydıra $[AE]$ konumuna getirelim. $[RS]$'yi de aşağı doğru kaydıra kaydıra $[BF]$ konumuna getirelim. Onun da boyu değişmez. E biz bir önceki teoremde dik kesişen bu $[AE]$ ve $[BF]$ kesenlerinin boylarının eşit olduğunu kanıtlamıştık. O halde sonuç doğruymuş!

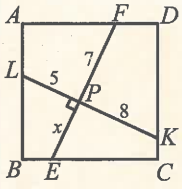


Dileyen, yukardaki PMQ ve RNS dik üçgenlerinin eşliğini kullanarak da kanıtlayabilir. Ayrıca bu sonucu, isteyen şöyle de akılda tutabilir:



Yukardaki ABCD karesinde $PQ \perp RS$ ise $x + z = y + w$.

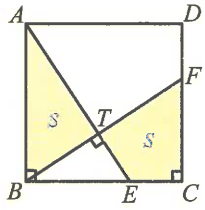
33.



ABCD kareyse x kaçtır?

6

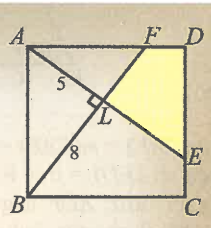
Sonuç 2. Alan(ABT) = Alan($TECF$).



ABE ile *BCF* üçgenlerinin eş olduğunu kanıtlamıştık. O halde bu üçgenlerin alanları da birbirlerine eşittir. İki üçgende *BTE* üçgensel bölgesi ortak olduğundan, arta kalan *ABT* ve *TECF* bölgeleri de eşit alanlıdır.

34.

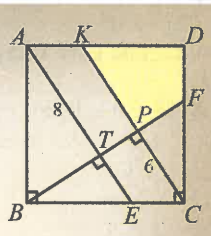
ABCD bir kare
$AE \perp BF$
$AE \cap BF = \{L\}$
$|AL| = 5$ br
$|BL| = 8$ br
olduğuna göre *FLED* dörtgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?



A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 45

35.

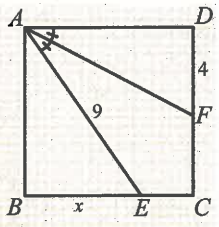
ABCD bir kare
$AE \perp BF$, $CK \perp BF$
$AE \cap BF = \{T\}$
$CK \cap BF = \{P\}$
$|AT| = 8$ br
$|CP| = 6$ br
olduğuna göre *PFDK* dörtgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?



A) 20 **B) 24** C) 36 D) 40 E) 48

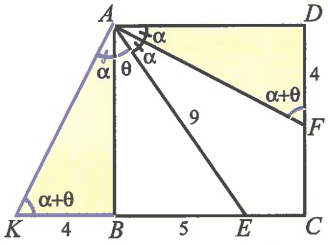
Örnek. *ABCD bir kare*
$m(DAF) = m(FAE)$
$|DF| = 4$ br
$|AE| = 9$ br
$|BE| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

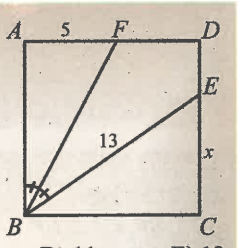
Çözüm: Aşağıdaki şekilden takip edelim.



$m(DAF) = m(FAE) = \alpha$ ve $m(EAB) = \theta$ olsun. Bu durumda $m(AFD) = \alpha + \theta$ olacağı açıktır. Asıl hareketi şimdi yapıyoruz: ADF üçgenini yukardaki şekilde olduğu gibi ABK üçgeninin bulunduğu yere kopyalayalım. ADF ile ABK üçgenleri eş olduklarından $|KB|$ de $|DF|$ gibi 4 br olur. İşin güzel yanı EAK açısının da AKE açısının da $\alpha + \theta$ ölçülü olması yani EAK üçgeninin ikizkenar bulunmasıdır. $|EA| = |EK|$ olmalı diye $|BE| = x = 5$ bulunur.

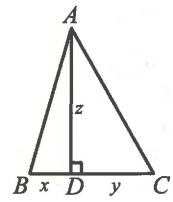
Doğru cevap: B.

36.
ABCD bir kare
$m(ABF) = m(FBE)$
$|AF| = 5$ br
$|BE| = 13$ br
$|CE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

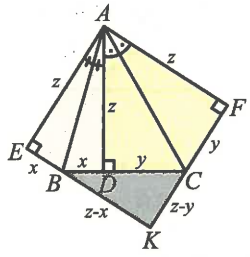


A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Teorem. *ABC bir üçgen*
$m(A) = 45°$
$AD \perp BC$
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
$|AD| = z$ br
ise $z^2 = xy + yz + zx$.



Kanıt: *ADB* ve *ADC* dik üçgenlerini hipotenüsleri üzerinden katlayalım.



AEB ile *ADB* ve *AFC* ile *ADC* üçgenlerinin eşliğinden $|AE| = |AF| = z$ br, $|EB| = x$ br, $|CF| = y$ br ve bunun yanında $m(FAE) = 90°$ olur. $EB \cap FC = \{K\}$ dersek $AEKF$ dörtgeninin bir kare olduğunu görmeliyiz. BKC dik üçgeninde Pisagor teoremi yazarsak, olacak gibi.

$$(z-x)^2 + (z-y)^2 = (x+y)^2$$
$$z^2 - 2zx + x^2 + z^2 - 2zy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$2z^2 - 2zx - 2zy = 2xy$$
$$z^2 - zx - zy = xy$$

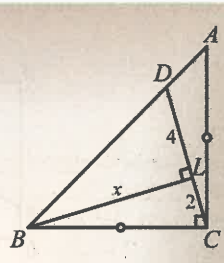
olduğundan

$$z^2 = xy + yz + zx$$

eşitliği kanıtlanmıştır.

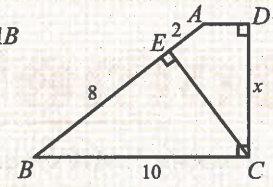
Bu teoremin karşıtı da doğrudur. Yani $z^2 = xy + yz + zx$ eşitliği sağlanıyorsa $m(A) = 45°$'dir.

37.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$BL \perp CD$
$|CL| = 2$ br
$|LD| = 4$ br
$|BL| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



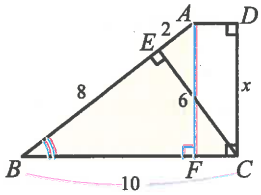
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

Örnek. *ABCD bir yamuk*
$BC \perp CD$, $CD \perp DA$, $CE \perp AB$
$|AE| = 2$ br
$|EB| = 8$ br
$|BC| = 10$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

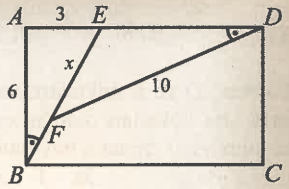
Çözüm: A'dan BC'ye inilen dikme ayağı F olsun.



CEB ile AFB dik üçgenlerinin hem B açıları eş hem de hipotenüsleri eş diye bu üçgenler eştir. O halde $x = 6$.

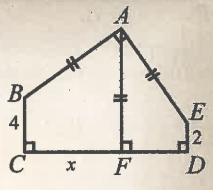
Doğru cevap: C.

38.
ABCD bir dikdörtgen
$m(ABE) = m(EDF)$
$|AE| = 3$ br
$|AB| = 6$ br
$|FD| = 10$ br
$|BE| = |ED|$
$|EF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 **D) 5** E) 6

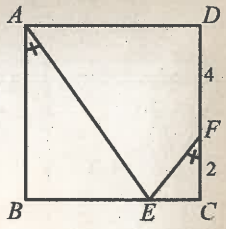
39.
ABCDE bir beşgen
$BC \perp CD$, $CD \perp DE$
$EA \perp AB$, $AF \perp CD$
$|AB| = |AF| = |AE|$
$|BC| = 4$ br
$|ED| = 2$ br
$|CF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 **D) 8** E) 10

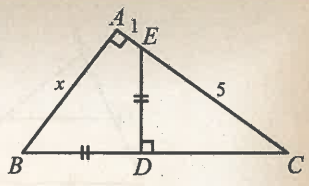
40.
ABCD bir kare
$m(BAE) = m(CFE)$
$|CF| = 2$ br
$|FD| = 4$ br

olduğuna göre $|AE| + |EF|$ toplamı kaç br dir?



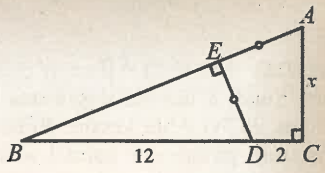
A) 8 B) 9 **C) 10** D) 11 E) 12

41.
ABC bir dik üçgen
$BA \perp AC$ ve $ED \perp BC$
$|BD| = |DE|$
$|AE| = 1$ br
$|CE| = 5$ br
$|AB| = x$ br
ise x'in alabileceği en büyük değer kaçtır?



A) 2 B) 2,5 **C) 3** D) 3,5 E) 4

42.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$ ve $AE \perp ED$
$|AE| = |ED|$
$|BD| = 12$ br
$|DC| = 2$ br
$|CA| = x$ br
ise x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?



A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

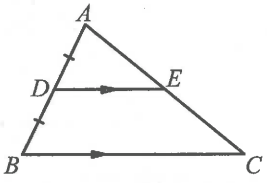
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Orta Taban

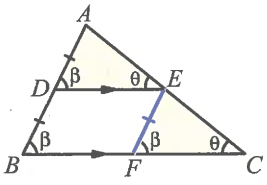
Yazımıza, bir ders boyunca ne yapacağımızı anlatan asıl teoremle başlıyoruz. Kulak kesilin lütfen!

Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından üçgenin ikinci kenarına paralel olacak şekilde geçen doğru, üçgenin üçüncü kenarının orta noktasından geçer.*



Yani üstteki şekle göre; $[DE] \,//\, [BC]$ *ve* $|AD| = |DB|$ *ise* $|AE| = |EC|$ *olur* diyor.

Kanıt: $DE \,//\, BC$ olduğundan yöndeş açıların eşliği gereğince ADE ile ABC ve DEA ile BCA açıları eş olurlar.

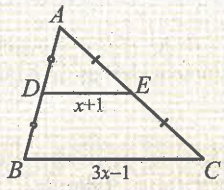


$m(ADE) = m(ABC) = \beta$ ve $m(DEA) = m(BCA) = \theta$ diyelim. Şimdi E'den AB doğrusuna bir paralel çizelim. Bu doğru, BC'yi F'de kessin. $BFED$ dörtgeninin karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olduğundan yani bir paralelkenar olduğundan daha önce kanıtladığımız üzere karşılıklı kenarları eş olur. O halde $|AD| = |DB| = |EF|$ eşitliğinden bahsedilebilir. Diğer yandan $EF \,//\, AB$ olduğundan EFC açısının ölçüsü de β olur. Bu da ADE ile EFC üçgenlerinin K.A.A.eşliği gereğince eş olduklarını işaret eder. Bu eşlik aradığımız $|AE| = |EC|$ eşitliğine yeter de artar bile.

Yukarıdaki $[DE]$ doğru parçası gibi, bir üçgenin herhangi iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçalarına **orta taban** denir.

Orta taban şekilden de görüleceği üzere daima tabana paraleldir. Diğer yandan ADE ile EFC üçgenlerinin eşliği $|DE| = |BF| = |FC|$ eşitliğini doğuracağından orta tabanın boyunun, tabanın boyunun yarısı olduğunu anlarız.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = |DB|$
$|AE| = |EC|$
$|DE| = x + 1$ br
$|BC| = 3x - 1$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

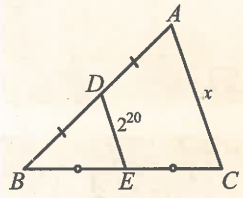
Çözüm: D ve E noktaları, üzerinde bulundukları kenarların orta noktaları olduğu için $[DE]$ orta tabandır. Orta tabanın boyu, tabanın boyunun yarısı olduğundan

$$3x - 1 = 2(x + 1)$$

eşitliği çözülürse $x = 3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

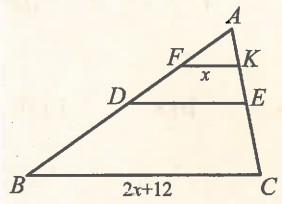
1.



x kaçtır?

2^{21}

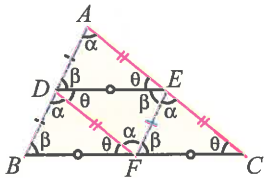
2.



$[DE]$; ABC üçgeninde,
$[FK]$; ADE üçgeninde
orta taban ise x kaçtır?

6

Bir üçgenin üç tane orta tabanı vardır.

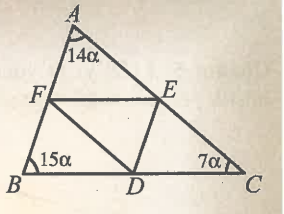


Bu orta tabanların belirttiği üçgene asıl üçgenin **orta üçgeni** denir.

Orta üçgenin kenarlarının asıl üçgene paralel olduğuna ve kenarlarının asıl üçgenin kenarlarının yarısı kadar olduğuna dikkat ediniz.

Bunun yanında *ADE*, *DBF*, *EFC* ve *FED* üçgenlerinin eş olması da kayda değer bir durumdur.

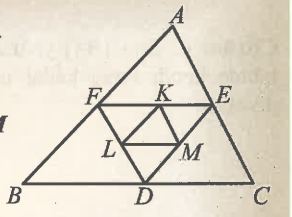
3.
ABC bir üçgen
DEF orta üçgen
$m(A) = 14\alpha$
$m(B) = 15\alpha$
$m(C) = 7\alpha$
olduğuna göre
***m*(*FDE*) kaç derecedir?**



A) 60 B) 65 **C) 70** D) 75 E) 80

4.
ABC, *DEF*, *KLM* birer üçgen
D, *E*, *F*, *K*, *L*, *M* orta noktalar
Çevre(*ABC*) = 32 br

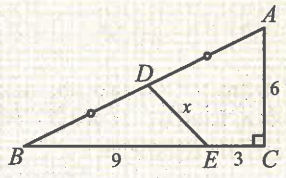
olduğuna göre *DEF* ve *KLM* üçgenlerinin çevreleri toplamı kaç br dir?



A) 12 B) 16 C) 20 **D) 24** E) 32

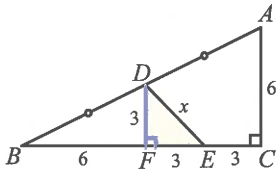
Şu ana kadar çözdüğümüz sorularda orta taban halihazırda çizilmiş durumdaydı. Bazen orta tabanın çizilmesi bizden beklenir. Bunun için de gözümüzün hemen bir orta nokta araması gerekir. Orta noktadan diğer iki kenardan birine paralel çizersek, soru nerdeyse çözülmüş olur.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BC \perp CA$
$|AD| = |DB|$
$|BE| = 9$ br
$|EC| = 3$ br
$|CA| = 6$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

Çözüm: Ne zaman orta nokta görürsek, aklımıza ilk olarak 'orta taban' gelmelidir. Bu sebeple hemen *D*'den *BC*'ye dik indirelim. Dikme ayağı *F* olsun.



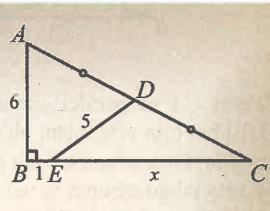
D orta nokta olup *DF* // *AC* olduğundan [*DF*] orta tabandır. O halde hem $|DF| = 3$ br olmalı hem de $|BF| = |FC|$ olmalıdır. Buradan $|BF| = 6$ br ve $|FE| = 3$ br çıktığından, *DFE* üçgeninde Pisagor teoremi gereğince

$$x^2 = 3^2 + 3^2$$

eşitliğinden $x = 3\sqrt{2}$ bulunur.

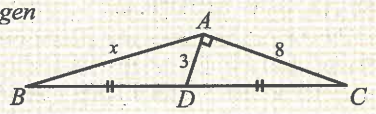
Doğru cevap: D.

5.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
$|AD| = |DC|$
$|AB| = 6$ br
$|BE| = 1$ br
$|ED| = 5$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ kaç br dir?



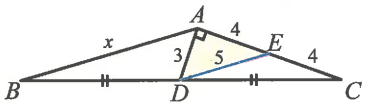
A) 15 B) 13 C) 11 **D) 9** E) 7

Örnek. *ABC bir üçgen*
$CA \perp AD$
$|BD| = |DC|$
$|DA| = 3$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre $|BA| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 11 B) 10 C) 9 D) 6 E) 5

Çözüm 1: Sorudaki orta nokta bize yine ilk olarak orta tabanı hatırlattı. D'den BA'ya paralel olarak geçen doğru $[AC]$'yi ortalayacaktır.

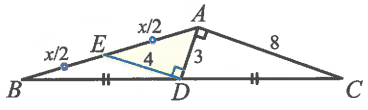


Bu yüzden $|AE| = |EC| = 4$ br olur. DAE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DE| = 5$ br olur. $[DE]$ doğru parçası ABC üçgeninde orta taban olduğundan $[AB]$'nin boyu $[DE]$'nin boyunun 2 katıdır. Yani $|BA| = 10$ br olmalıdır.

Doğru cevap: B.

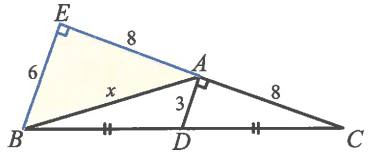
Bu bölümün tashihini yapan Mehmet Güleşen hocam, 'çok önemli bu soru kalıbına bir tek bu çözüm yakışmış mı yahu' diyerek çözümlerini sıraladı. Ne diyeyim ben, elleri dert görmesin!

Çözüm 2: D noktasından sağa doğru orta taban çizebileceğimiz gibi, sola doğru da çizebiliriz.



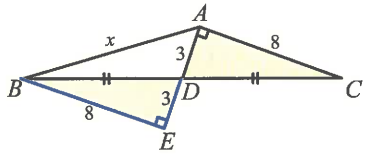
D'den CA'ya paralel çizilen doğru AB'yi E'de kessin. [DE] bal gibi orta taban oldu. O zaman, $|BE| = |EA| = x/2$ br oldu. Orta taban, tabana paralel olacağından $AD \perp DE$ ve orta taban tabanın yarısı olacağından $|DE| = 4$ br olur. ADE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $x/2 = 5$ yani $x = 10$ bulunur.

Çözüm 3: $[CA]$'yı A yönünde kendi boyu kadar uzatırsak (vardığımız noktaya E diyelim), $[DA]$ kenarı $[CB]$ ve $[CE]$ kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğinden orta taban olur.



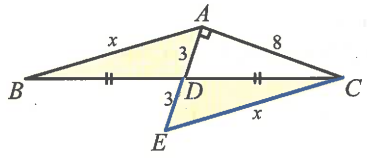
O halde $BE \perp EC$ ve $|EB| = 6$ br olur. AEB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $x = 10$ bulunur.

Çözüm 4: Bu sefer $[AD]$'yi D yönünde kendi boyu kadar uzatacağız. Vardığımız nokta yine E olsun.



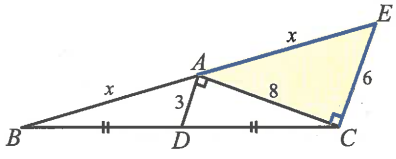
ADC ile EDB üçgenlerine odaklanırsanız, D açıları eş olup bu açının yan kenarları da eştir. O halde bu üçgenler eştir. Bu yüzden $BE \perp EA$ ve $|BE| = 8$ br diyoruz. Geriye sadece BEA dik üçgeninde Pisagor teoremi yazmak kaldı. Yazanlar $6^2 + 8^2 = x^2$ eşitliğinden x'i 10 bulur.

Çözüm 5: $[AD]$'yi D yönünde kendi boyu kadar uzatmıştık ya, sola değil sağa gitsek de olur.



Bu sefer ADB ile CDE üçgenlerine odaklanırsanız, D açıları eş olup bu açının yan kenarları da eş diye, bu üçgenlerin eş olduğunu anlarsınız. Bu yüzden $|DE| = 3$ br ve $|EC| = 8$ br olur. Geriye sadece CAE dik üçgeninde Pisagor teoremi yazmak kaldı. x tabii ki yine 10 çıkacak.

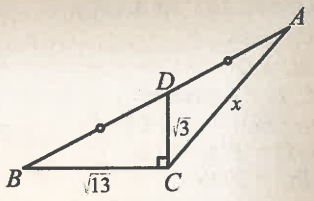
Çözüm 6: Sıra $[BA]$'yı uzatmaya geldi. $[BA]$'yı A yönünde kendi boyu kadar uzatıp, vardığımız noktaya E diyelim.



$[BC]$ ve $[BE]$'nin orta noktalarını birleştirdiği için, bu sefer $[DA]$ orta taban oldu. O zaman $AC \perp CE$ ve $|CE| = 6$ br oldu. Son olarak ACE dik üçgeninde Pisagor teoreminden de $x = 10$ bulundu.

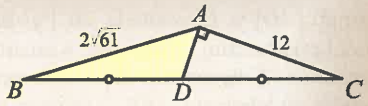
Mehmet hocam, kusura bakmazsan, diğer 14 çözümünü buraya koyamayacağım. Gel sen diğer çözümleri öğrencilere alıştırma olarak bırakalım ☺

6.
ABC bir üçgen
$BC \perp CD$
$|AD| = |DB|$
$|BC| = \sqrt{13}$ br
$|CD| = \sqrt{3}$ br
$|CA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



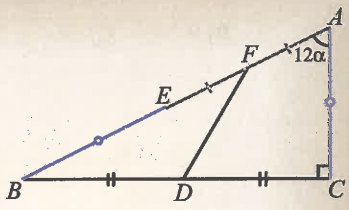
A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

7.
ABC bir üçgen
$CA \perp AD$
$|BD| = |DC|$
$|CA| = 12$ br
$|AB| = 2\sqrt{61}$ br
olduğuna göre Alan(ABD) kaç br^2 dir?



A) 30 B) 36 C) 42 D) 48 E) 60

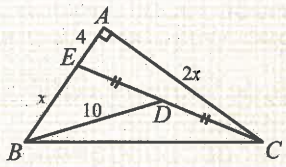
8.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|CA| = |BE|$
$|BD| = |DC|$
$|EF| = |FA|$
$m(A) = 12\alpha$
olduğuna göre
$m(DFB)$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) 3α B) 4α C) 5α **D) 6α** E) 7α

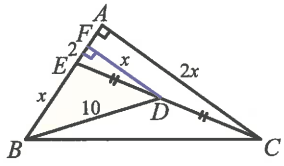
[Mehmet GÜLEŞEN]

Örnek. ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|ED| = |DC|$
$|AE| = 4$ br
$|BD| = 10$ br
$|AC| = 2\cdot|EB| = 2x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: $|ED| = |DC|$ olması aklımıza orta tabanı getiriyor. Bu amaçla D'den AB'ye dik indireceğiz. Bu dikmenin ayağına F diyelim.



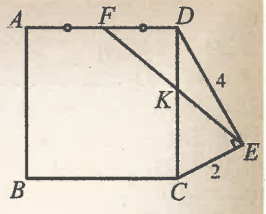
Bu durumda, CAE üçgeninde $[FD]$ orta taban olduğundan hem $|EF| = |FA| = 2$ br hem de $|FD| = x$ br olur. Şimdi DFB dik üçgeninde Pisagor teoremiyle sonuca gideceğiz.

$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$$
$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$
$$(x+8)(x-6) = 0$$

denkleminden $x = 6$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

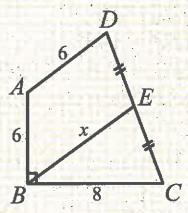
9.
$ABCD$ bir kare
CED bir dik üçgen
$CE \perp ED$
$|CE| = 2$ br
$|ED| = 4$ br
$|AF| = |FD|$
olduğuna göre
$|EF|$ kaç br dir?



A) 5 B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$ **D) $\sqrt{29}$** E) $\sqrt{37}$

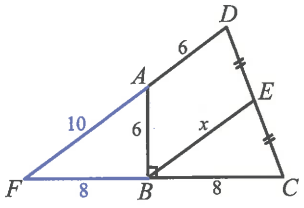
Bundan sonraki sorularımız da 'Meğer bu çizilmiş doğru parçası orta tabanmış da haberim yokmuş!' soruları...

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|AB| \perp |BC|$
$|AD| // |BE|$
$|CE| = |ED|$
$|DA| = |AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre $|BE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $|DE| = |EC|$ eşitliği aklımıza orta tabanı getiriyor. Bu amaçla $[DA]$'yı A yönünde $[BC]$'yi de B yönünde uzatıp kesişmelerini sağlayalım. Kesişim noktasına da F diyelim.



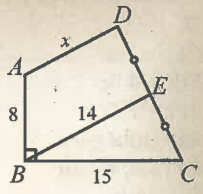
Bu durumda $|DE| = |EC|$ ve $BE // DF$ verilerinden DFC üçgeninde $[BE]$'nin orta taban olduğunu anlarız. O halde $|FB| = |BC| = 8$ br dir. ABF dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AF| = 10$ br olur. Sonuçta

$|FD| = 10$ br $+ 6$ br $= 16$ br

bulunduğundan $|BE| = 8$ br olmalıdır.

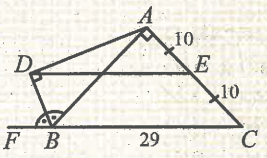
Doğru cevap: C.

10.
ABCD bir dörtgen
$AB \perp BC$, $AD // BE$
$|CE| = |ED|$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 15$ br
$|BE| = 14$ br
olduğuna göre
$|DA| = x$ **kaç br dir?**



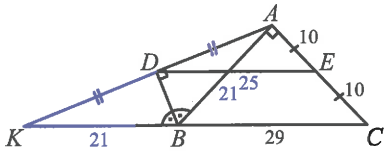
A) 12 **B)** 11 C) 10 D) 9 E) 8

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$AD \perp DB$
C, B, F doğrudaş
$m(FBD) = m(ABD)$
$|AE| = |EC| = 10$ br
$|BC| = 29$ br
olduğuna göre $|DE|$ *kaç* br *dir?*



A) 20 B) 22,5 C) 24,5 D) 25 E) 26

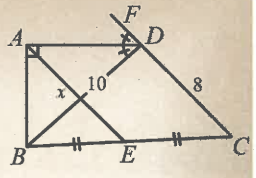
Çözüm: Önce CAB dik üçgeninde uzunluğu eksik olan kenarın uzunluğunu yazalım. Bu üçgen meşhur 20-21-29 dik üçgeni olduğundan $|AB| = 21$ br dir.



Şimdi $[AD]$'yi D yönünde $[BC]$'yi de B yönünde uzatarak kesişmelerini sağlayalım. Kesişim noktasına da K diyelim. ABK üçgeninde $[BD]$ hem açıortay hem de yükseklik olduğundan ABK ikizkenar olup $[BD]$ aynı zamanda da kenarortay olmalıdır. Hem de $|KB| = 21$ br dir. O halde $[DE]$ doğru parçası AKC üçgeninde orta tabandır. $|KC| = 21$ br $+ 29$ br $= 50$ br olduğundan $|DE| = 25$ br olarak bulunur.

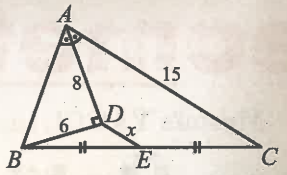
Doğru cevap: D.

11.
ABCD bir dörtgen
$DA \perp AB$
$|BE| = |EC|$
C, D, F doğrudaş
$m(BDA) = m(FDA)$
$|BD| = 10$ br
$|DC| = 8$ br
olduğuna göre $|AE| = x$ **kaç br dir?**



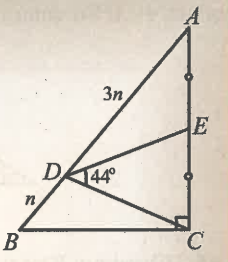
A) 8 **B)** 9 C) 10 D) 11 E) 12

12.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$BD \perp DA$
$|BE| = |EC|$
$|BD| = 6$ br
$|AD| = 8$ br
$|AC| = 15$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir?



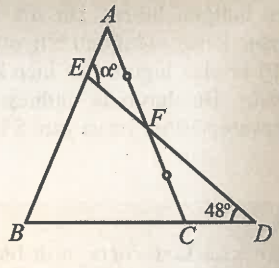
A) $\frac{9}{2}$ B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

13.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|AE| = |EC|$
$|AD| = 3\,|DB| = 3n$ br
$m(CDE) = 44°$
olduğuna göre
$m(BCD)$ kaç derecedir?



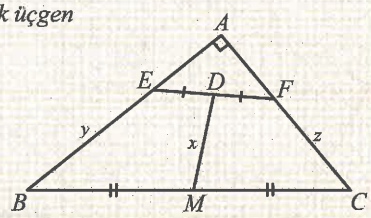
A) 11 **B) 22** C) 24 D) 30 E) 33

14.
ABC ve EBD birer üçgen
$AC \cap DE = \{F\}$
$|AF| = |FC|$
$|BC| = 2\cdot|EF|$
$m(D) = 48°$
$m(DEA) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 102 B) 105 C) 108 **D) 114** E) 120

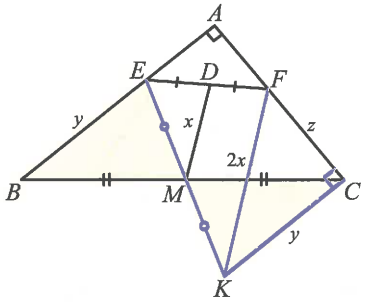
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$|BM| = |MC|$
$|ED| = |DF|$
$|DM| = x$ br
$|EB| = y$ br
$|FC| = z$ br



olduğuna göre x, y ve z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y + z = 2x$ B) $y + z = 3x$ C) $x + z = 2y$
D) $y^2 + z^2 = x^2$ E) $y^2 + z^2 = 4x^2$

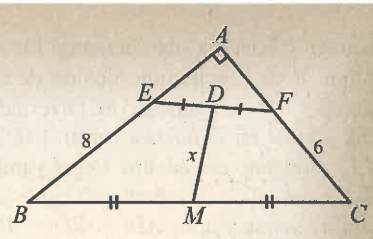
Çözüm: $[EM]$'yi çizip M yönünde kendi boyu kadar uzatalım.



Hem $|BM| = |MC|$ hem de $|EM| = |MK|$ olduğundan EMB ile KMC üçgenleri eştir. O halde $|KC| = y$ br olur. Bu eşlik aynı zamanda $KC \,//\, BE$ olmasını gerektirdiğinden KCA açısı dik olur. Şimdi $[KF]$'yi çizelim. FEK üçgeninde M ve D bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan $[DM]$ bu üçgene ait bir orta tabandır. O halde $|FK| = 2x$ br olur. FCK dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $y^2 + z^2 = 4x^2$ bulunur.

Doğru cevap: E.

15.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BM| = |MC|$
$|ED| = |DF|$
$|EB| = 8$ br
$|FC| = 6$ br
$|DM| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 **B) 5** C) 6 D) 7 E) 8

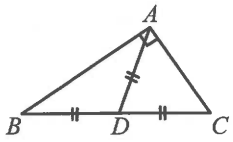
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

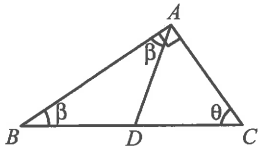
Muhteşem Üçlü

Yeni bir dik üçgen teoremine geldik. Pisagor veya Öklit teoremlerinin uygulanamadığı tüm dik üçgen sorularının hakkından gelen muhteşem bir teorem vereceğiz.

Teorem. *Bir dik üçgende hipotenüse inen kenarortayın boyu, hipotenüsün boyunun yarısıdır.*

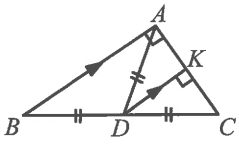


Bu sayede kenarortayın hipotenüsü ayırdığı parçalarla kenarortay eşit boyda olurlar. Bu üç parçanın beklenmedik bir şekilde eşit boyda çıkmaları, teoremin **Muhteşem Üçlü** diye ünlenmesine sebep olmuştur. Bunun yanında **Süper Üçlü**, **Üç Silahşör**, **Üçü Bir Arada** diyen de var!



Kanıt: A açısı dik olan herhangi bir ABC dik üçgeni çizelim. B ve C açılarının ölçüleri de sırasıyla β ve θ olsun. $\beta < 90°$ olduğundan $[BC]$ üzerinde $m(BAD) = \beta$ olacak şekilde bir D noktası vardır. $[AD]$'yi çizelim. $|AD| = |BD|$ olduğunu not edelim. Diğer yandan $\beta + \theta = 90°$ olduğundan $m(CAD) = \theta$ olur. O halde $|AD| = |DC|$ de yazılabilir. Sonuç olarak $|AD| = |BD| = |DC|$ bulunduğundan teorem kanıtlanmış olur.

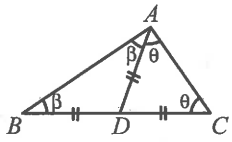
''Orta taban'' kavramını ve özelliklerini bilenler için şöyle bir kanıt daha güzel olacaktır:



$[AC]$ kenarının orta noktası K olsun. D noktası ile K noktası birleştirilirse $[DK]$ orta taban olacağından $DK \,//\, BA$ olur. Bu da $DK \perp AC$ demek olur.

DKC ve DKA dik üçgenlerinin dik kenar uzunluklarının eşit boyda oldukları görülürse Pisagor teoremi gereği hipotenüsleri de eşit boyda olurlar. ADC ikizkenar üçgen bulunduğundan $|AD| = |DC| = |BD|$ olur ki kanıt tamamlanmış demektir.

Peki bu teoremin tersi doğru mudur acaba? Yani bir üçgene ait bir kenarortayın boyu, kenarortayın kestiği kenar boyunun yarısıysa üçgene dik diyebilir miyiz? Cevabımız, evet! Sorunun çözümü de çocuk oyuncağı gibi...



ABC üçgeninin B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla β ve θ olsun. $|AD| = |BD|$ olduğundan $m(BAD) = \beta$, $|AD| = |DC|$ olduğundan $m(CAD) = \theta$ olur ki, üçgenin iç açı ölçüleri toplamından $\beta + \theta = m(A) = 90°$ bulunur.

Örnek. *Hipotenüsünün boyu* 10 br *olan bir dik üçgenin en kısa kenarortayının boyu kaç* br *dir?*

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

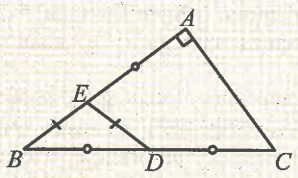
Çözüm: Bir üçgende en kısa kenarortayın en uzun kenara indiğini biliriz. Bir dik üçgende de hipotenüsün en uzun kenar olduğunu biliyoruz. O halde soruda uzunluğu 10 br olan hipotenüse inen kenarortayın boyu sorulmaktadır. Bu durumda muhteşem üçlü teoreminden dolayı cevabın 10'un yarısı yani 5 br olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: A.

1.
En kısa kenarortayının boyu 6 br olan bir dik üçgenin hipotenüsünün boyu kaç br dir?

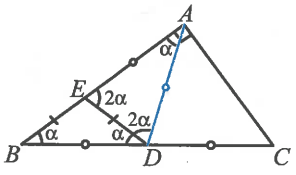
A) 3 B) 6 C) 9 **D)** 12 E) 18

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$|EB| = |ED|$
$|BD| = |DC| = |AE|$
olduğuna göre
$m(C)$ *kaç derecedir?*



A) 36 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

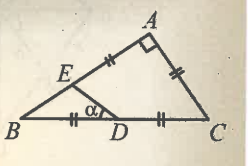
Çözüm: Dik üçgende hipotenüsün orta noktası verilmişse, bu soruda muhteşem üçlü kullanılmayacak da nerde kullanılacak, değil mi? Hemen $[AD]$'yi çizelim.



EBD, AED, BDA ve ADC üçgenlerinin hepsinin birden ikizkenar olduğuna dikkat ediniz. $m(B) = \alpha$ olsun. Şu durumda $m(BDE) = \alpha$ ve $m(DAB) = \alpha$ olur. Diğer yandan $m(AED) = m(EDA) = 2\alpha$ olacağından, iç açı ölçülerinin toplamı gereği $m(B) = 36°$ bulunur. O halde sorulan $m(C)$ değeri de 54° olmalıdır.

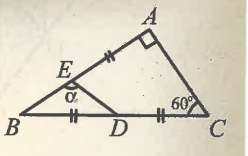
Doğru cevap: C.

2.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC| = |CA| = |AE|$
$m(EDB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



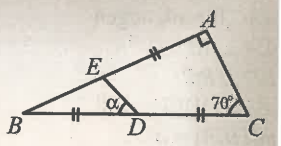
A) 20 B) 30 C) 35 **D)** 45 E) 60

3.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC| = |AE|$
$m(C) = 60°$
$m(DEB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



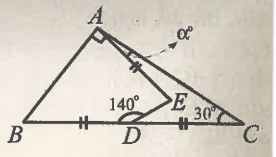
A) 150 B) 135 C) 120 **D)** 105 E) 90

4.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC| = |AE|$
$m(BCA) = 70°$
$m(BDE) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



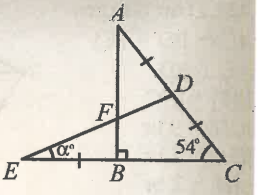
A) 20 B) 30 C) 35 D) 45 **E)** 60

5.
ABC dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC| = |AE|$
$m(BCA) = 30°$
$m(BDE) = 140°$
$m(CAE) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



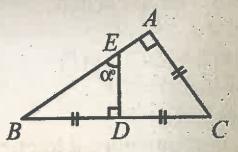
A) 5 **B)** 10 C) 12 D) 15 E) 20

6.
ABC ve *DEC* birer üçgen
$AB \perp EC$
$|AD| = |DC| = |EB|$
$m(ECA) = 54°$
$m(CED) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



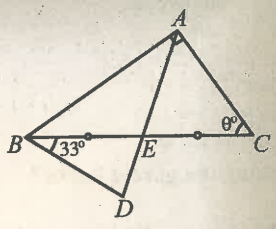
A) 27 B) 28 C) 30 D) 32 E) 36

7.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$ED \perp BC$
$|BD| = |DC| = |CA|$
$m(DEB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



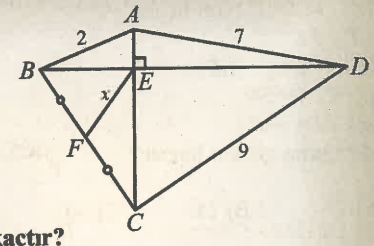
A) 80 B) 75 C) 65 **D) 60** E) 45

8.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \cap BC = \{E\}$
$|BE| = |EC|$
$m(EBD) = 33°$
$m(C) = \theta°$
$|CE| + |ED| = |AB|$
olduğuna göre θ kaçtır?



A) 38 B) 42 C) 45 D) 48 **E) 52**

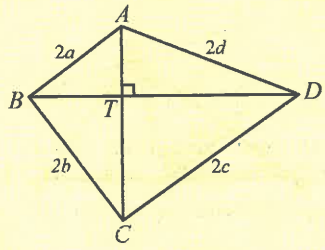
9.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$AC \perp BD$
$|BF| = |FC|$
$|CD| = 9$ br
$|DA| = 7$ br
$|AB| = 2$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



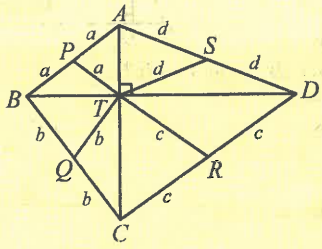
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Yeniden Dikgen Dörtgen. Muhteşem üçlüye dair bu yazımıza, onun güzel bir kullanımıyla devam ediyoruz:

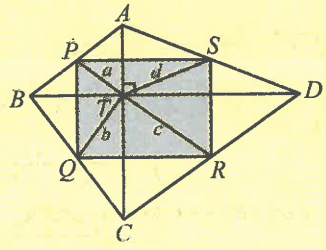
Daha önce ''dik üçgen'' notlarında köşegenleri dik kesişen dörtgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamının birbirlerine eşit olduğunu bulmuş ve şekli katlaya katlaya bir dikdörtgenin iç bölgesinde alınan rastgele bir noktanın dikdörtgenin karşılıklı köşelerine olan uzaklıklarının kareleri toplamının birbirlerine eşit olduğu sonucuna varmıştık. Şimdiyse aynı teoreme muhteşem üçlü kullanarak çok zarif bir kanıt göstereceğiz:



Dikgen dörtgenimiz $ABCD$, köşegenlerinin kesişim noktası da T olsun. Uzunluklar şekilde gösterildiği gibi olursa elimizde $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ eşitliği var demektir. Şimdi T'den dörtgenin kenar orta noktalarına birer doğru parçası çizelim.



ATB, BTC, CTD ve DTA üçgenleri birer dik üçgen olduğundan muhteşem üçlü gereğince uzunluklar üst şekildeki gibi olur. Şimdi önemli noktaya geldik:

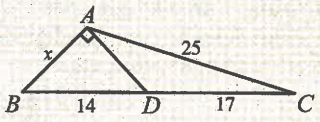


ABD üçgeninde $[PS]$, BCA üçgeninde $[QP]$, CDB üçgeninde $[RQ]$ ve DAC üçgeninde $[RS]$ birer orta taban oldukların, hepsi ilgili tabanlarına paraleldir ve bu yüzden $PQRS$ bir dikdörtgendir. Fark ettiyseniz, T de onun iç bölgesinde herhangi bir nokta oldu ve bu yüzden

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

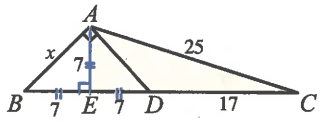
eşitliği hala geçerlidir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$BA \perp AD$
$|BD| = 14$ br
$|DC| = 17$ br
$|CA| = 25$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 7 B) 8 C) $7\sqrt{2}$ D) 10 E) 14

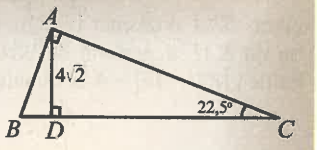
Çözüm: $[AE]$ kenarortayı çizilirse muhteşem üçlü teoremi gereği $|AE| = |BE| = |ED| = 7$ br olur.



AEC üçgeninin kenar uzunlukları 7-24-25 olduğundan AEC açısı diktir. Bu yüzden AEB de dik üçgendir. Bu üçgende Pisagor Teoremi uygulanırsa $|AB| = 7\sqrt{2}$ br bulunur.

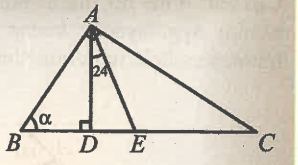
Doğru cevap: C.

10.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$m(BCA) = 22{,}5°$
$|AD| = 4\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



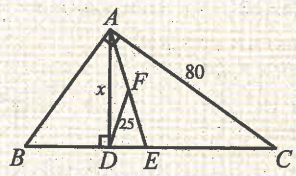
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

11.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|BE| = |EC|$
$m(EAD) = 24°$
olduğuna göre $m(ABC) = \alpha$ kaç derecedir?



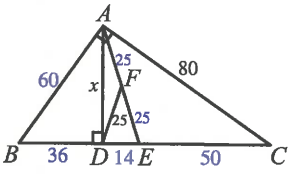
A) 48 B) 54 C) 57 D) 66 E) 67

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BA \perp AC$
$AD \perp BC$
$|AF| = |FE|$
$|BE| = |EC|$
$|DF| = 25$ br
$|AC| = 80$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 30 B) 36 C) 40 D) 44 E) 48

Çözüm: ADE dik üçgen diye muhteşem üçlü teoremi gereği $|AF| = |FE| = 25$ br olur.



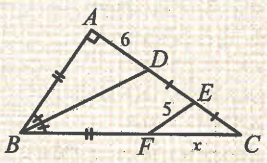
ABC dik üçgen olduğundan yine muhteşem üçlü teoremi gereği $|AE| = |BE| = |EC| = 50$ br olur. ABC üçgeninde Pisagor teoreminden $|AB| = 60$ br bulunur. Şimdi ABC üçgeninde iki türlü alan yazıp x'i bulacağız:

$$60 \cdot 80 = 100 \cdot x$$

eşitliğinden $x = 48$ bulunur.

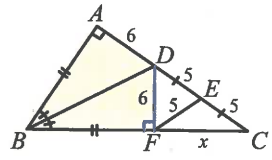
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$[BD]$ *iç açıortay*
$|BA| = |BF|$
$|DE| = |EC|$
$|AD| = 6$ br, $|FE| = 5$ br
olduğuna göre $|FC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

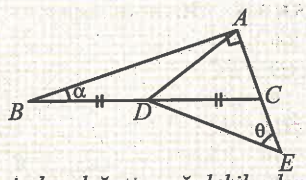
Çözüm: ABD ile FBD üçgenlerinin $[BD]$ kenarları ortak olup $|BA| = |BF|$ ve $m(ABD) = m(FBD)$ olduğundan K.A.K. tanımı gereği bu üçgenler eştir.



Şu durumda üçgenlerin A ve F açıları da ortak olan B açılarının gördükleri kenarlar da eş olmak zorundadır. Yani hem DAB açısı dik diye DFB açısı da diktir hem de $|AD| = 6$ br diye $|FD| = 6$ br dir. Diğer yandan DFC bir dik üçgen bulunduğundan muhteşem üçlü teoremi gereği $|DE| = |EC| = 5$ br olur. DFC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|FC| = 8$ br olduğunu bulmak da işin en kolay kısmıdır.

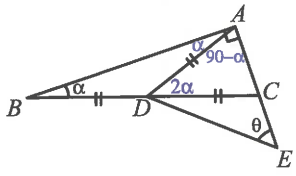
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
A, C, E doğrudaş
$|BD| = |DC|$
$|ED| = |EA|$
$m(ABC) = \alpha$
$m(AED) = \theta$
olduğuna göre θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) α B) $\frac{3\alpha}{2}$ C) 2α D) $\frac{5\alpha}{2}$ E) 3α

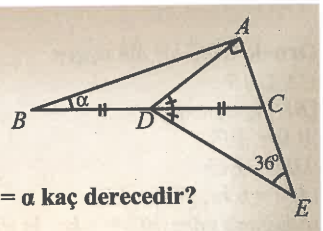
Çözüm: *CAB* dik üçgen olduğundan $|AD| = |BD| = |DC|$ olur.



$m(DBA) = \alpha$ verildiğinden, $m(BAD) = \alpha$ dolayısıyla da $m(EAD) = 90° - \alpha$ olur. Diğer yandan *DEA* ikizkenar olduğundan $m(ADE) = 90° - \alpha$ olur. *ADE* üçgeninde iç açıların ölçüleri toplanırsa $\theta = 2\alpha$ bulunur.

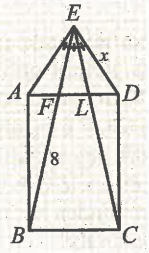
Doğru cevap: C.

12.
ABC bir dik üçgen
A, C, E doğrudaş
$|BD| = |DC|$
$m(ADC) = m(CDE)$
$m(DEA) = 36°$
olduğuna göre $m(ABC) = \alpha$ **kaç derecedir?**



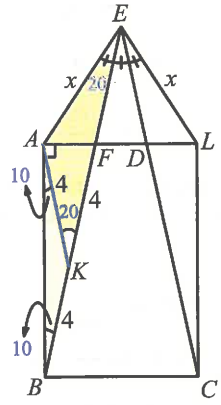
A) 16 **B)** 18 C) 20 D) 22 E) 24

Örnek. *ABCD dikdörtgen*
ADE eşkenar üçgen
$m(AEB) = m(BEC) = m(CED)$
$EB \cap AD = \{F\}$
$EC \cap AD = \{L\}$
$|BF| = 8$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) $3\sqrt{3}$

Çözüm: *FAB* dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygulayabilecek kadar veri olmadığından aklımıza Muhteşem Üçlü teoremini getireceğiz.



Bu amaçla *A*'dan *[BF]*'ye kenarortay indireceğiz. Bu kenarortayın ayağına *K* diyelim.

$$|BK| = |KF| = |KA| = 4 \text{ br}$$

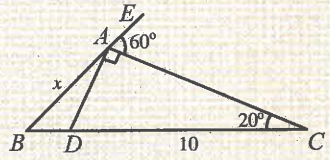
olacağını biliyoruz. Diğer yandan eşkenar üçgenin bir iç açısının 60° ölçüde olduğunu bildiğimizden $m(BEA) = 20°$ olur. *BEA* üçgeninde iç açıların ölçüleri toplanırsa

$$m(ABE) = 10°$$

çıkar. *BKA* ikizkenar olduğundan $m(AKE) = 20°$ olur ki bu da *KAE* üçgeninin de ikizkenar olduğunu anlatır. O halde $|AK| = |AE| = 4$ br olmalıdır.

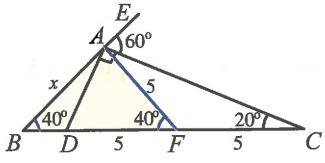
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC* bir üçgen
$CA \perp AD$
B, A, E doğrudaş
$m(BCA) = 20°$
$m(EAC) = 60°$
$|DC| = 10$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4,5 **B)** 5 C) 5,5 D) 6 E) 6,5

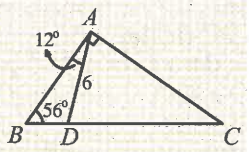
Çözüm: Yine bir dik üçgen sorusu ve yine Pisagor teoremini uygulayacak kadar verimiz yok. O halde yine muhteşem üçlü teoremine başvurmalıyız.



CAD dik üçgeninde *A*'dan inen kenarortay çizilirse $|AF| = |DF| = |FC| = 5$ br olur. Diğer yandan $m(EBC) = 40°$ ve $m(BFA) = 40°$ olduğundan *ABF* üçgeni de ikizkenar olarak bulunur. Bu yüzden $|AB| = |AF| = 5$ br olmalıdır.

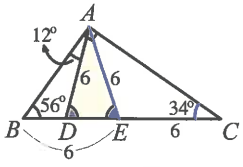
Doğru cevap: B.

Örnek. ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$m(ABC) = 56°$
$m(DAB) = 12°$
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre $|BC|$ *kaç* br *dir?*



A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

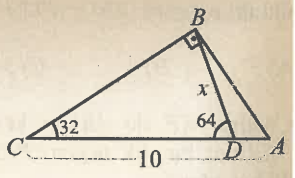
Çözüm: Ne zaman ki bir dik üçgen sorusunda uzunluk verildiği veya sorulduğu zaman verilen bilgiler Pisagor teoremini uygulamaya yetmiyor, o zaman aklımıza muhteşem üçlü teoremi gelmelidir. Burada da durum öyle olduğundan CAB dik üçgeninde A'dan inen kenarortayı çizeceğiz.



$m(BCA) = 34°$ olduğundan $m(AEB) = 68°$ olmalıdır. Diğer yandan ADC açısının ölçüsü de 68° olduğundan ADE ikizkenar olarak bulunur. Bu yüzden $|AD| = |AE| = 6$ br dir. Muhteşem üçlüden dolayı da $|AE| = |BE| = |EC|$ olduğundan $|BC| = 12$ br olarak bulunur.

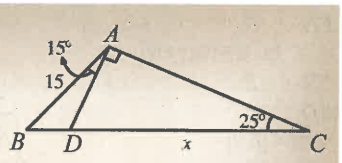
Doğru cevap: B.

13.
ABC üçgeninde
$m(ABC) = 90°$
$m(BCA) = 32°$
$m(BDC) = 64°$
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre
$|BD| = x$ **kaç br dir?**



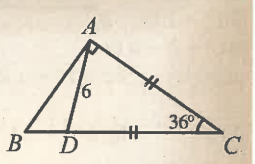
A) 4 B) 4,5 **C)** 5 D) 5,5 E) 6

14.
ABC bir üçgen
$CA \perp AD$
$m(BCA) = 25°$
$m(DAB) = 15°$
$|AB| = 15$ br
olduğuna göre $|DC| = x$ **kaç br dir?**



A) 15 B) 20 C) 25 **D)** 30 E) 45

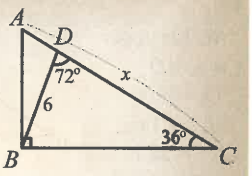
15.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$m(BCA) = 36°$
$|CA| = |CD|$
$|AD| = 6$ br



olduğuna göre $|BC|$ **kaç br dir?**

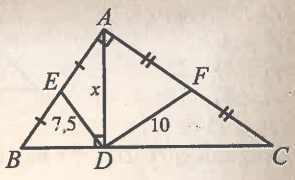
A) 10 **B)** 12 C) 14 D) 16 E) 18

16.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(BCA) = 36°$
$m(CDB) = 72°$
$|BD| = 6$ br
olduğuna göre
$|AC| = x$ **kaç br dir?**



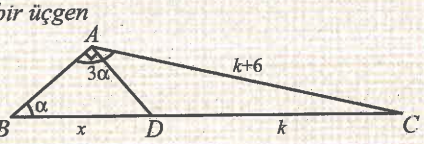
A) 18 B) 15 **C)** 12 D) 9 E) 6

17.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AE| = |EB|$
$|AF| = |FC|$
$|DE| = 7{,}5$ br
$|DF| = 10$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



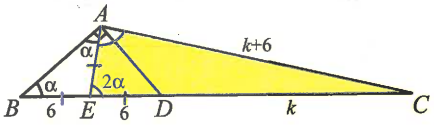
A) 8 B) 10 **C)** 12 D) 14 E) 16

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(CAB) = 3\alpha$
$m(ABC) = \alpha$
$BA \perp AD$
$|DC| = k$ br
$|AC| = k + 6$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) 6 C) 12 D) $k-3$ E) $k-6$

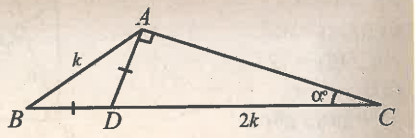
Çözüm: DAB dik üçgeninde $[AE]$ kenarortayını çizelim. Muhteşem üçlü teoremi gereği $|EA| = |EB| = |ED|$ olur.



O halde EAB açısının ölçüsü de α'dır. Hatta bu yüzden $m(AEC) = 2\alpha$ olur. Soruda CAB açısının ölçüsü 3α olarak verildiğinden CAE açısının ölçüsü 2α olmalıdır ki bu da CAE üçgeninin ikizkenar olması anlamını taşır. Şu durumda $|ED| = 6$ br dir. Sonuçta $|BD| = 12$ br olur.

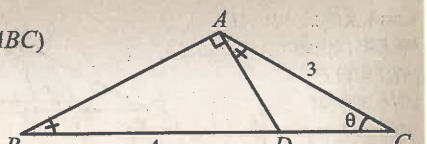
Doğru cevap: C.

18.
ABC bir üçgen
$CA \perp AD$
$|BD| = |DA|$
$|AB| = k$ br
$|DC| = 2k$ br
$m(BCA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



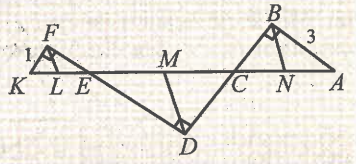
A) 15 **B)** 18 C) 20 D) 22,5 E) 24

19.
ABC bir üçgen
$m(CAD) = m(ABC)$
$D \in [BC]$
$DA \perp AB$
$|AC| = 3$ br
$|BD| = 4$ br
$m(BCA) = \theta$
olduğuna göre tan θ kaçtır?



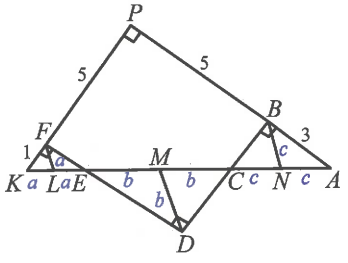
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Örnek. Yandaki şekilde
$AB \perp BD$, $BD \perp DF$, $DF \perp FK$
$|KL| = |LE|$
$|EM| = |MC|$
$|CN| = |NA|$
$|KF| = 1$br
$|DF| = |BD| = 5$ br
$|AB| = 3$ br
olduğuna göre $|BN| + |FL| + |MD|$ kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

Çözüm: KF ile AB'nin kesiştiği noktaya P diyelim. PKA'nın bir dik üçgen, $PFDB$'nin bir kare olacağına dikkat ediniz.



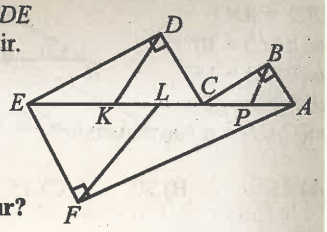
$|FL| = a$ br, $|DM| = b$ br ve $|BN| = c$ br dersek; muhteşem üçlüden dolayı $|KL| = |LE| = a$ br, $|EM| = |MC| = b$ br ve $|CN| = |NA| = c$ br olur. PKA üçgeninde Pisagor teoreminden $|KA| = 2a + 2b + 2c = 10$ bulunduğundan;

$$|FL| + |DM| + |BN| = a + b + c = 5$$

olarak bulunur.

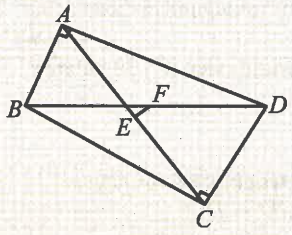
Doğru cevap: C.

20.
Yandaki şekilde ABC, CDE ve EFA birer dik üçgendir.
$|EK| = |KC|$
$|CP| = |PA|$
$|EL| = |LA|$
olduğuna göre
$\dfrac{|FL|}{|BP|+|DK|}$ **oranı kaçtır?**



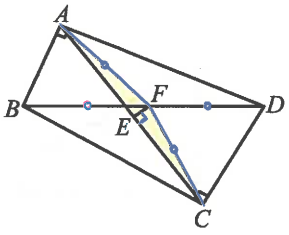
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$
$BC \perp CD$
$[AC]$ *ve* $[BD]$ *köşegen*
$|AE| = |EC|$
$|BF| = |FD|$
olduğuna göre
$m(FEC)$ *kaç derecedir?*



A) 60 B) 75 C) 80 D) 90 E) 120

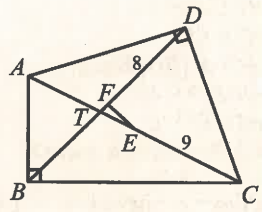
Çözüm: F noktası iki dik üçgenin de hipotenüsünün orta noktası olduğundan aklımıza hemen muhteşem üçlü geliyor. Bu sebeple F noktasını hem A'ya hem de C'ye birleştirelim.



$|FA| = |FB| = |FC| = |FD|$ olduğundan FAC üçgeninin ikizkenar olduğunu fark etmeliyiz.
Diğer yandan $|AE| = |EC|$ verildiğinden FEA ile FEC üçgenleri K.K.K. eşliği gereğince eş olduğundan $FE \perp AC$ olmalıdır. Yani sorulan $m(FEC)$ değeri 90° olur.

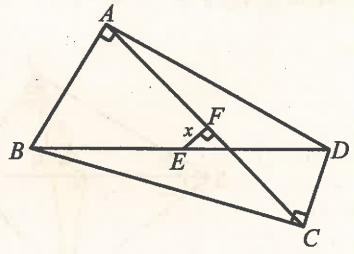
Doğru cevap: D.

21.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$AC \cap BD = \{T\}$
$|AE| = |EC| = 9$ br
$|BF| = |FD| = 8$ br
olduğuna göre
$|FE|$ kaç br dir?



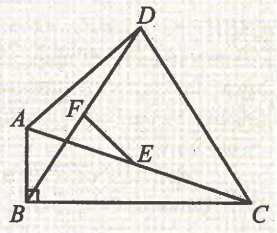
$\sqrt{17}$

22.
$ABCD$ bir dörtgen
$BC \perp CD$
$DA \perp AB$
$EF \perp AC$
$|AC| = 80$ br
$|BE| = |ED| = 41$ br
olduğuna göre
$|EF| = x$ kaç br dir?



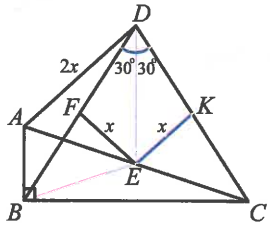
9

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
BCD bir eşkenar üçgen
$AB \perp BC$
$|AE| = |EC|$
$|BF| = |FD|$
olduğuna göre
$\dfrac{|AD|}{|EF|}$ *oranı kaçtır?*



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3

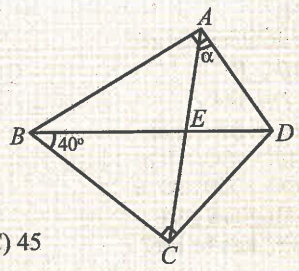
Çözüm: ABC dik üçgeninde E noktası hipotenüsün orta noktası olduğundan, $[BE]$ çizilirse muhteşem üçlü gereği $|BE| = |EC|$ olur. $[DE]$ çizilirse; üçer kenarı da eş olduğundan DEB ile DEC üçgenleri eş olur.



DEB üçgeninde E'den inen kenarortayın boyu x br olduğundan DEC üçgeninde de E'den inen kenarortayın boyu $|EK| = x$ br olmalıdır. Şu durumda CDA üçgeninde E ve K orta noktalar olduğundan $[EK]$ orta taban olur ki bu yüzden $|AD| = 2x$ br bulunur. Demek ki sorulan oran 2'ymiş.

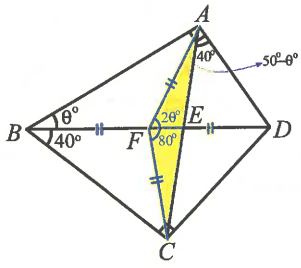
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
DA ⊥ AB
BC ⊥ CD
[AC] ve [BD] köşegen
m(DBC) = 40°
m(DAC) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 40 C) 45
D) 50 E) 55

Çözüm: $[BD]$'nin orta noktası F olsun. Muhteşem üçlü teoremi gereği $|FA| = |FB| = |FD| = |FC|$ olur.



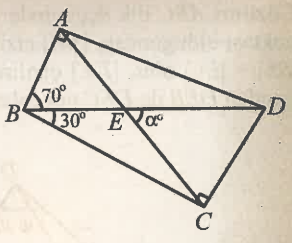
$m(ABD) = \theta°$ dersek, $m(CFA) = 80° + 2\theta°$ olur ki AFC ikizkenar üçgen olduğundan $m(FAC) = 50° - \theta°$ olur. Diğer yandan, AFD üçgeni de tepe açısı $2\theta°$ olan bir ikizkenar üçgen olduğundan $m(FAD) = 90° - \theta°$ olmalıdır. Şu durumda

$$m(DAC) = (90° - \theta°) - (50° - \theta°) = 40°$$

olarak bulunur.

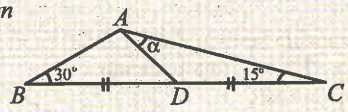
Doğru cevap: B.

23.
ABCD bir dörtgen
DA ⊥ AB
BC ⊥ CD
[AC] ve *[BD]* köşegen
m(ABD) = 70°
m(DBC) = 30°
m(DEC) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



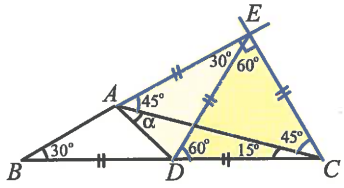
A) 30 B) 40 C) 45 **D) 50** E) 55

Örnek. *ABC bir üçgen*
|BD| = |DC|
m(ABC) = 30°
m(BCA) = 15°
olduğuna göre
m(CAD) = α kaç derecedir?



A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Çözüm: C'den BA'ya indirilen dikme ayağı E olsun. CEB bir dik üçgen olduğundan $[ED]$ çizilirse muhteşem üçlü teoremi gereği $|ED| = |BD| = |DC|$ olur.



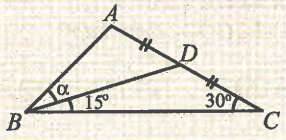
BDE üçgeni ikizkenar olduğundan $m(BED) = 30°$ dir. Bu sebeple $m(EDC) = 60°$ olur. O halde EDC eşkenar üçgendir. $m(ACE) = 45°$ olması gerektiğinden CEA üçgeni de ikizkenar çıkar. $|DE| = |EC| = |EA|$ eşitlikleri DEA üçgeninin de ikizkenar olması anlamına gelir ki tepe açısı $30°$ olduğundan taban açıları $75°$ olmalıdır.

$$\alpha° + 45° = 75°$$

eşitliğinden $\alpha = 30$ bulunur.

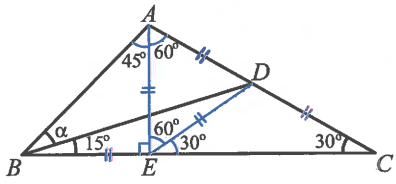
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
|AD| = |DC|
m(BCA) = 30°
m(DBC) = 15°
m(ABD) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

Çözüm: A'dan BC'ye inilen dikme ayağı E olsun.



AEC dik üçgen olduğundan muhteşem üçlü gereği $|AD| = |DC| = |ED|$ olur. $m(CAE) = 60°$ olduğundan AED eşkenar üçgendir. O halde $|AE| = |ED| = |AD|$ olur. $m(DBE) = m(EDB) = 15°$ olduğundan $|BE| = |ED|$ olur. Sonuçta $|BE| = |AE|$ bulunduğundan ABC açısının ölçüsü $45°$ olmalıdır. O halde $m(ABD) = \alpha = 30°$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

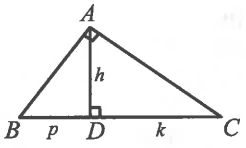
Öklit Teoremi

Dik üçgenlere ait teoremlere devam ediyoruz. Dik üçgenler için Pisagor Teoremi ne kadar önemliyse, o kadar önemli bir başka dik üçgen teoremine geldi sıra: Öklit Teoremi.

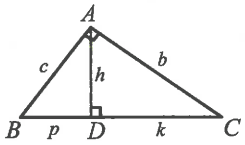
Öklit Teoremi. *Bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikmenin karesi, hipotenüsü ayırdığı parçaların çarpımına eşittir.*

Yani yandaki şekle göre;

$h^2 = p \cdot k$



Kanıt: $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarının boyları her zamanki gibi sırasıyla b br ve c br olsun.



BDA üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

$$h^2 + p^2 = c^2$$

ve BDC üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

$$h^2 + k^2 = b^2$$

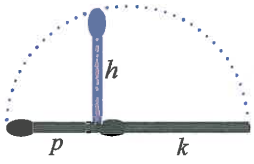
olduğundan bu iki eşitlik toplanırsa

$$2h^2 + p^2 + k^2 = b^2 + c^2$$
$$2h^2 + p^2 + k^2 = (p + k)^2$$
$$2h^2 + p^2 + k^2 = p^2 + k^2 + 2pk$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $2h^2 = 2pk$ yani $h^2 = p \cdot k$ kanıtlanmış olur.

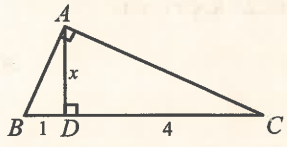
İlerde benzerlik dersinde çok daha kısa ve şık bir kanıtını daha sunacağız.

$h^2 = p \cdot k$ eşitliği $h = \sqrt{pk}$ şeklinde yazılırsa h'nin p ve k'nin geometrik ortası olduğu görülür. İşte bu yüzden verilen iki uzunluğun geometrik ortasının ne kadar olduğunu bulabilmek için azıcık bir çember bilgisiyle Öklit teoremi kullanılır.



Örneğin uzunlukları p br ve k br olan iki kibriti ucuca ekleyelim. İki kibritin boyunu çap kabul eden bir çember çizelim. Bu kibritlerin geometrik ortası kadar uzunluktaki bir kibrit şekildeki maviye boyanmış kibrittir. Hatta bu kibritlerin aritmetik ortası kadar kibrit de yarıçap kadar bir kibrittir.

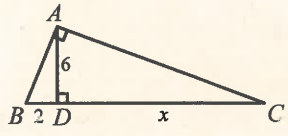
1.



x kaçtır?

2

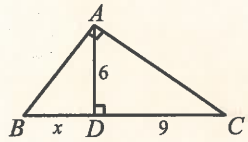
2.



x kaçtır?

18

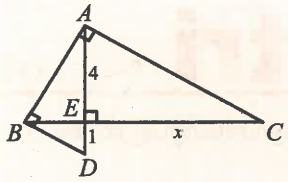
3.



x kaçtır?

4

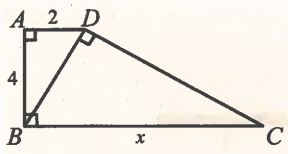
4.



x kaçtır?

8

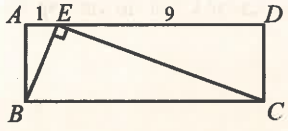
5.



x kaçtır?

10

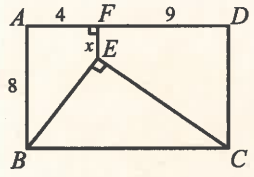
6.



$ABCD$ dikdörtgense Alan($ABCD$) kaç br^2 dir?

30

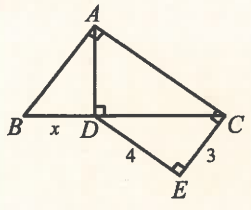
7.



$ABCD$ dikdörtgense x kaçtır?

2

8.

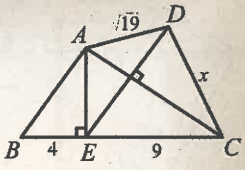


x kaçtır?

45/16

9.

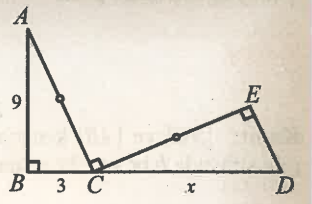
$ABCD$ bir dörtgen
$BA \parallel ED$
$AE \perp BC$
$ED \perp AC$
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 9$ br
$|AD| = \sqrt{19}$ br
olduğuna göre $|DC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 **D)** 8 E) 9

10.

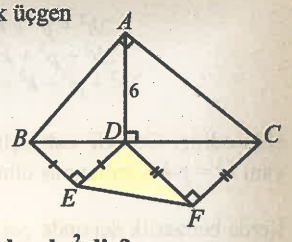
$AB \perp BD$
$AC \perp CE$
$CE \perp ED$
$|AC| = |CE|$
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 3$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) 8 C) 9 **D)** 10 E) 11

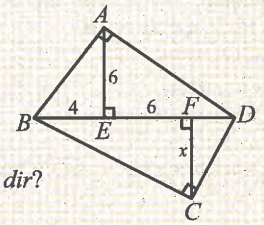
11.

ABC, BED ve DFC birer dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$BE \perp ED$
$DF \perp FC$
$|BE| = |ED|$
$|DF| = |FC|$
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre Alan(DEF) kaç br^2 dir?



A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 36

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$, $BC \perp CD$
$AE \perp BD$, $CF \perp BD$
$|AE| = 6$ br
$|BE| = 4$ br
$|EF| = 6$ br
olduğuna göre $|CF| = x$ *kaç br dir?*



A) $3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{30}$ C) 6 D) $6\sqrt{3}$ E) 8

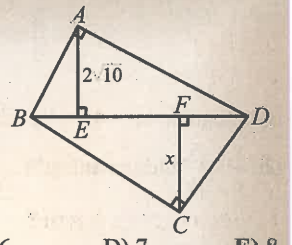
Çözüm: $|FD| = y$ br olsun. ABD dik üçgeninde Öklit teoremi uygulanırsa $6^2 = 4\cdot(6 + y)$ eşitliğinden $y = 3$ bulunur. Şimdi de BCD dik üçgeninde Öklit teoremi uygulanırsa

$$x^2 = (4 + 6)\cdot 3 = 30$$

bulunur ki buradan da $x = \sqrt{30}$ olarak bulunur.

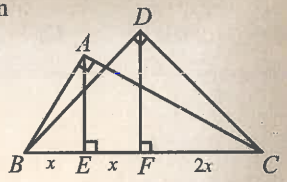
Doğru cevap: B.

12.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$, $BC \perp CD$
$AE \perp BD$, $CF \perp BD$
$6\cdot|BE| = 2\cdot|EF| = 3\cdot|FD|$
$|AE| = 2\sqrt{10}$ br
$|CF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



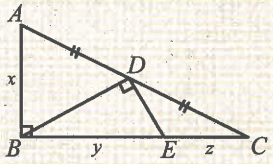
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13.
ABC ve DBC birer dik üçgen
$CA \perp AB$
$CD \perp DB$
$AE \perp BC$
$DF \perp BC$
$|BE| = |EF| = x$ br
$|FC| = 2x$ br
olduğuna göre $\dfrac{\sqrt{3}\cdot|AE|}{|DF|}$ **oranı kaçtır?**



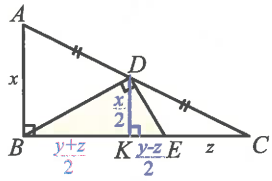
A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$BD \perp DE$
$|AD| = |DC|$
$|AB| = x$ br
$|BE| = y$ br
$|EC| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 + y^2 = z^2$ B) $y^2 + z^2 = x^2$ C) $x^2 + z^2 = y^2$
D) $y = xz$ E) $z = xy$

Çözüm: D'den BC'ye indirilen dikme ayağı K olsun. $|AD| = |DC|$ olduğundan $[DK]$ doğru parçası ABC üçgeninde orta tabandır. Bu yüzden $|DK| = \frac{1}{2}x$ br dir.



$|BC| = y + z$ br olduğundan

$$|BK| = \tfrac{1}{2}(y+z) \text{ br}$$

ve

$$|KE| = \tfrac{1}{2}(y-z) \text{ br}$$

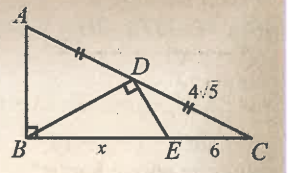
olur. EDB dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{y-z}{2}\right)$$

denklemi çözülürse $x^2 = y^2 - z^2$ yani $y^2 = x^2 + z^2$ bulunur.

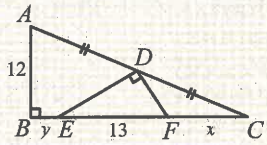
Doğru cevap: C.

14.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$BD \perp DE$
$|AD| = |DC| = 4\sqrt{5}$ br
$|EC| = 6$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



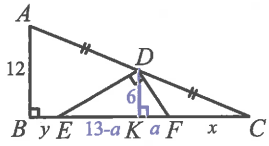
A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
AB ⊥ BC
FD ⊥ DE
|AD| = |DC|
|AB| = 12 br
|EF| = 13 br
olduğuna göre |FC| – |BE| = x – y farkı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Ne zaman orta nokta gördük mü aklımıza ilk olarak ''orta taban'' gelmeliydi. Bunun için *D*'den *BC*'ye dik indireceğiz.



Bu dikmenin ayağına *K* dersek [*DK*] orta taban olur. Bu yüzden |*DK*| = 6 br dir. Diğer yandan |*KF*| = *a* br dersek |*EK*| = 13 – *a* br dir. Öklit teoreminden

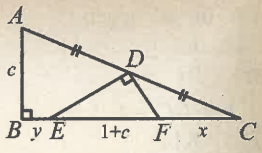
$$6^2 = (13-a)\cdot a$$
$$36 = 13a - a^2$$
$$a^2 - 13a + 36 = 0$$
$$(a-4)\cdot(a-9) = 0$$

denkleminden $a = 4$ veya $a = 9$ olduğu bulunur.

|*BK*| = |*KC*| olduğundan $y + 13 - a = a + x$ yani $x - y = 13 - 2a$ bulunur. O halde $a = 4$ için $x - y = 5$, $a = 9$ için $x - y = -5$ olur.

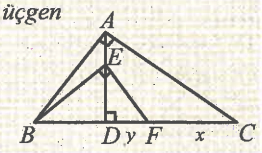
Doğru cevap: B.

15.
ABC bir dik üçgen
AB ⊥ BC, FD ⊥ DE
|AD| = |DC|
|AB| = c br
|EF| = 1 + c br
|FC| – |BE| = x – y = 11
olduğuna göre *c* kaçtır?



A) 11 B) 12 C) 22 **D) 60** E) 61

Örnek. *ABC ve EBF birer dik üçgen*
CA ⊥ AB, FE ⊥ EB
|DE| = 2·|EA|
|FC| = x br
|DF| = y br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

Çözüm: |*BD*| = *z* br ve |*AE*| = *h* br olsun. |*DE*| = 2*h* br olur. Şimdi her iki dik üçgende de Öklit teoremini uygulayacağız.

$$4h^2 = z\cdot y$$
$$9h^2 = z\cdot(x+y)$$

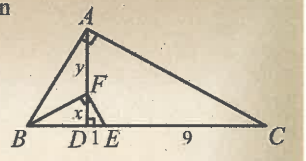
z'den kurtulursak soru çözülmüş olacak. Bunun için de taraf tarafa bölme yapacağız.

$$\frac{4}{9} = \frac{y}{x+y}$$

olduğundan $4x + 4y = 9y$ yani $4x = 5y$ bulunur. Buradan da $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$ olduğu anlaşılır.

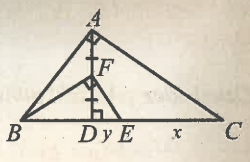
Doğru cevap: A.

16.
ABC ve *FBE* birer dik üçgen
CA ⊥ AB, EF ⊥ FB,
AD ⊥ BC
|DE| = 1 br
|EC| = 9 br
|FD| = x br
|AF| = y br
olduğuna göre $\frac{y}{x}$ **oranı kaçtır ?**



A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 3 **D)** $\sqrt{10}-1$ E) $\sqrt{10}$

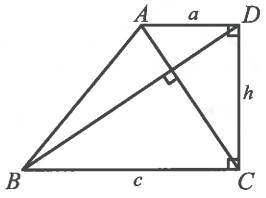
17.
ABC ve FBE birer dik üçgen
$CA \perp AB, EF \perp FB, AD \perp BC$
$|AF| = |FD|$
$|EC| = x$ br
$|DE| = y$ br



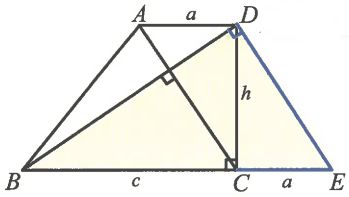
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Teorem. *ABCD bir yamuk*
$BC \perp CD$
$CD \perp DA$
$AC \perp BD$
$|AD| = a$ br
$|BC| = c$ br
$|CD| = h$ br
ise $h^2 = ac$.



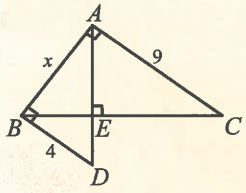
Kanıt: D'den AC'ye paralel çizilen doğru BC'yi E'de kessin.



$ACED$ bir paralelkenar olduğundan $|CE| = a$ br olur. Şimdi EDB dik üçgeninde bir Öklit teoremi bizi sonuca ulaştıracak:

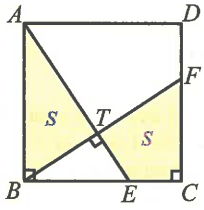
$$h^2 = ac.$$

18.



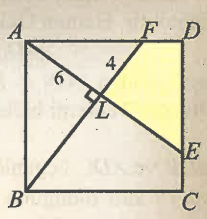
x kaçtır?

Daha önce 'Dik Üçgenlerin Eşliği' başlıklı yazımızda



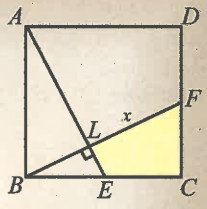
yukardaki gibi bir şekilde ABE ile BCF üçgenleri eş olduğundan, alanlarının da birbirlerine eşit olacağını ve iki bölgede de TBE bölgesi ortak olduğundan, arta kalan ABT ve $TECF$ bölgelerinin de eşit alanlı olduğunu söylemiştik. Bu tarz sorularda da Öklit teoremi gerekebilir.

19.
$ABCD$ bir kare
$AE \perp BF$
$AE \cap BF = \{L\}$
$|AL| = 6$ br
$|LF| = 4$ br
olduğuna göre
$|FLED|$ kaç br^2 dir?



A) 12 B) 18 C) 24 **D) 27** E) 54

20.
$ABCD$ bir kare
$AE \perp BF$
$AE \cap BF = \{L\}$
Alan$(LECF) = 16$ br^2
$|AL| = 4\,|LE|$
$|LF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

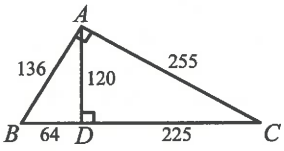


A) 12 B) 10 C) 8 **D) 6** E) 4

Örnek. *Bir dik üçgenin dik kenarlarının hipotenüs üzerine dik izdüşümleri 64 br ve 225 br olduğuna göre üçgenin çevresi kaç br dir?*

A) 391 B) 550 C) 670 D) 675 E) 680

Çözüm: Üçgenimiz A açısı dik olan bir ABC üçgeni olsun. A'ya ait yükseklik ayağı da D olsun. Bu durumda $[AB]$'nin hipotenüs üzerine dik izdüşümü $[BD]$, $[AC]$ kenarının hipotenüs üzerine dik izdüşümü de $[DC]$ olur.



O halde verilen bilgiler $|BD| = 64$ br ve $|DC| = 225$ br demektir. Hemen Öklit teoremi yapalım:

$$|AD|^2 = 64 \cdot 225 = 8^2 \cdot 15^2$$

eşitliğinden $|AD| = 8 \cdot 15 = 120$ bulunur. Geri kalanını Pisagor Teoremi halleder.

ADB ve ADC üçgenlerinin sırasıyla 8-15-17 üçgeninin 8 ve 15 katı olduğunu anlarsak, $|AB| = 17 \cdot 8 = 136$ br ve $|AC| = 17 \cdot 15 = 255$ br olur. Sonuç olarak çevre

$$136 + 255 + 289 = 680$$

birim olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

21.
Bir dik üçgenin dik kenarlarının hipotenüs üzerine dik izdüşümleri 9 br ve 16 br olduğuna göre üçgenin çevresi kaç br dir?

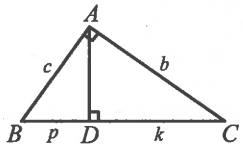
A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 150

Üstteki soruyu çözdük çözmesine de eğer $|BD|$ ve $|DC|$ değerleri uygun verilmese $|AB|$ ve $|AC|$ değerlerini nasıl bulabilirdik acaba? Sıradaki teorem bunun pratiğini sunuyor bize.

Öklit Teoremi'nin Bir Sonucu [Yandan Öklit]. *A açısı dik olan bir ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D olsun.*

Uzunluklar şekildeki gibiyse;

$$b^2 = k \cdot (p + k)$$
$$c^2 = p \cdot (p + k)$$



Kanıt: $|AD| = h$ br olsun. ADC ve ADB dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden $b^2 = h^2 + k^2$ ve $c^2 = h^2 + p^2$ olduğunu biliyoruz. Öklit teoreminden elde edilen $h^2 = p \cdot k$ eşitliği bu eşitliklerde yerlerine yazılırsa

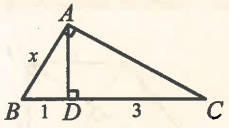
$$b^2 = k \cdot (p + k)$$

ve

$$c^2 = p \cdot (p + k)$$

eşitliklerine ulaşırız.

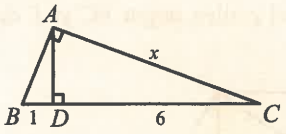
22.



x kaçtır?

2

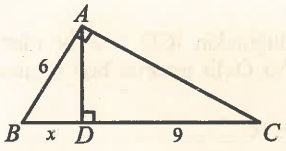
23.



x kaçtır?

$\sqrt{42}$

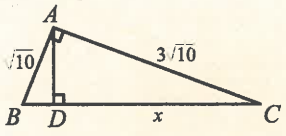
24.



x kaçtır?

3

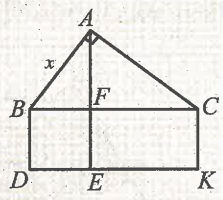
25.



x kaçtır?

9

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BDEF bir kare
FEKC bir dikdörtgen
A, F, E noktaları doğrusal
$|AB| = x$ br
olduğuna göre Alan(*BDKC*) *ifadesinin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $2x$ B) x^2 C) $2x^2$ D) $4x^2$ E) x^3

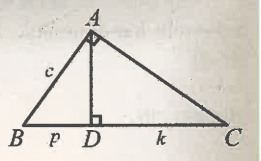
Çözüm: Dikdörtgenin alanının eniyle boyunun çarpımı olduğunu biliyoruz. O halde Alan(*BDKC*) = $|BD|\cdot|BC|$ olmalıdır. $|BD| = |BF|$ olduğundan Alan(*BDKC*) = $|BF|\cdot|BC|$ yazılabilir. Diğer yandan Öklid teoreminin yukardaki sonucuna göre $x^2 = |AB|^2 = |BF|\cdot|BC|$ olmalıdır. Bu durumda

$$\text{Alan}(BDKC) = x^2$$

olarak bulunur.

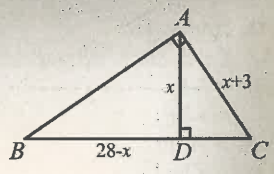
Doğru cevap: B.

26.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$|AB| = c$ birim
$|BD| = p$ birim
$|DC| = k$ birim
$p\cdot k = (4-p)(p+4)$
olduğuna göre *c* kaçtır?



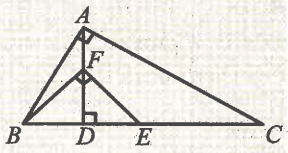
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 16

27.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AD| = x$ br
$|AC| = x+3$ br
$|BD| = 28-x$ br
olduğuna göre *ABC* üçgeninin çevresi kaç br dir?



A) 12 B) 24 C) 30 D) 48 E) 60

Örnek. *ABC ve FBE birer dik üçgen*
$CA \perp AB$
$EF \perp FB$
$|BE| = |EC|$
$|AB| = k\cdot|BF|$
olduğuna göre k kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

Çözüm: Şekle bakan, iki kere Öklit teoremini uygulayacağımızı anlamış olmalıdır.

$$|AB|^2 = |BD|\cdot|BC| = |BD|\cdot 2\cdot|BE|$$

ve

$$|BF|^2 = |BD|\cdot|BE|$$

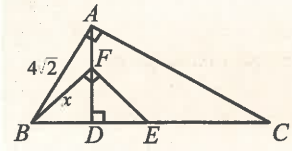
olduğundan

$$|AB|^2 = 2\cdot|BF|^2$$

bulunur. Bu da $|AB| = \sqrt{2}\,|BF|$ demektir. O halde $k = \sqrt{2}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

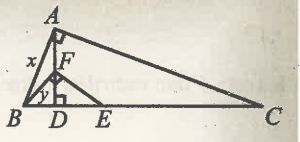
28.



$|BE| = |EC|$ olduğuna göre *x* kaçtır?

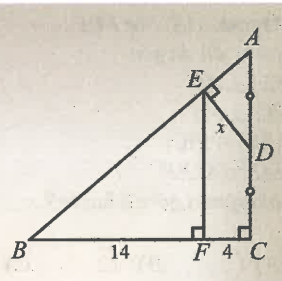
4

29.
ABC ve *FBE* birer dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$BF \perp FE$
$|BC| = 3\cdot|BE|$
$|AB| = x$ br
$|BF| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{3}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{6}$ E) 3

30.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$DE \perp AB$
$EF \perp BC$
$|BF| = 14$ br
$|FC| = 4$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

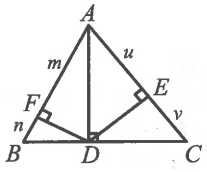


A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 7

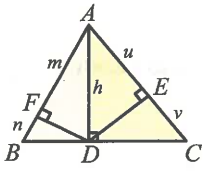
Yandan Öklit Teoremi'nin Bir Sonucu. *Herhangi bir ABC üçgeninin A'ya ait yükseklik ayağından yan kenarlara dikmeler indirilsin.*

Uzunluklar yandaki gibiyse

$m\cdot(m+n) = u\cdot(u+v)$.



Kanıt: A'dan indirilen yüksekliğin boyu h br olsun.



ABD ve ADC üçgenlerinin birer Öklit şekli olduğunu görünüz. ABD üçgeninde yandan Öklit teoreminden

$$h^2 = m\cdot(m+n)$$

bunun yanında ADC üçgeninde yandan Öklit teoreminden de

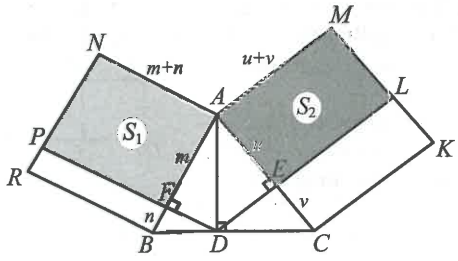
$$h^2 = u\cdot(u+v)$$

olur. Bu iki eşitlik birlikte düşünülürse

$$m\cdot(m+n) = u\cdot(u+v)$$

olması gerektiği görülür.

Bu teoremin geometrik yorumuysa şudur:



ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının üzerine, üst şekildeki gibi, üçgenin dışına doğru sırasıyla $ANRB$ ve $CKMA$ kareleri yerleştirilsin. DF'nin NR'yi kestiği noktaya P, DE'nin KM'yi kestiği noktaya da L diyelim. $ANPF$ ve $ELMA$ dikdörtgenlerinin alanlarına da sırasıyla S_1 ve S_2 olsun. Kolayca görülebileceği üzere

$$S_1 = m\cdot(m+n)$$

ve

$$S_2 = u\cdot(u+v)$$

olur. E az önce

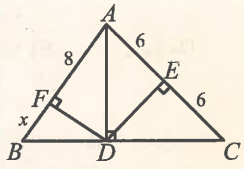
$$m\cdot(m+n) = u\cdot(u+v)$$

olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki eşitliğin anlatmak istediği

$$S_1 = S_2$$

olmasıymış.

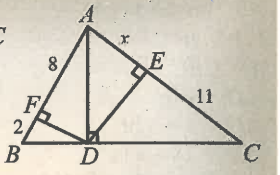
31.



x kaçtır?

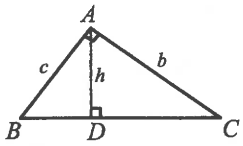
1

32.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$, $DF \perp AB$, $DE \perp AC$
$|BF| = 2$ br
$|FA| = 8$ br
$|CE| = 11$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

Bir Başka Sonuç. Öklit Teoremi hakkında şu ana kadar öğrendiklerimiz h, b, c arasında bir bağıntı vermiyor. Şimdi b ve c belliyken h nasıl bulunur, onu anlatacağız.



Bunun iki yolu vardır. Birincisi, hepimizin bildiği alan hesabından. b ve c belliyse dik üçgenin alanı belli demektir. Aynı zamanda b ve c belliyse hipotenüs uzunluğu da belli demektir. O halde iki farklı tabana göre iki alan formülü yazıp bulduklarımızı eşitlersek amacımıza ulaşmış oluruz.

Alan(ABC) değerinin hem $\frac{b\cdot c}{2}$ hem de $\frac{|BC|\cdot h}{2}$ ile hesaplanabileceğini biliyoruz. Diğer yandan Pisagor Teoremi'nden dolayı $|BC| = \sqrt{b^2+c^2}$ olduğunu da biliyoruz. O halde hemen bu alan formüllerini eşitliyoruz:

$$b\cdot c = |BC|\cdot h$$
$$b\cdot c = \sqrt{b^2+c^2}\cdot h$$
$$b^2\cdot c^2 = (b^2+c^2)\cdot h^2$$

olduğundan

$$h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$$

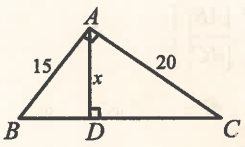
bulunur.

İkinci yol olarak anons ettiğimiz yol, aslında bulduğumuz bu eşitliğin ezberlenesi bir hale getirilmesidir. Şöyle yapıyoruz:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{b^2}{b^2c^2} + \frac{c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}.$$

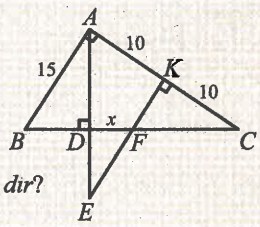
Çok kullanışlı bir formül değildir ama bakarsınız b, c, h arasındaki bağıntıyı sorar, o zaman işlem yapmadan doğru şıkkı işaretlersiniz.

33.



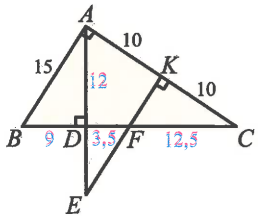
x kaçtır?

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$AE \perp BC$
$EK \perp AC$
$|AB| = 15$ br
$|AK| = |KC| = 10$ br
olduğuna göre $|DF| = x$ kaç br dir?



A) 2,5 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

Çözüm: ABC dik üçgeninde dik açının belirttiği köşeden hipotenüse dik indirildiğinden aklımıza ilk olarak Öklit Teoremi geliyor.



Hipotenüs uzunluğu 25 br olduğundan

$$15\cdot 20 = 25\cdot |AD|$$

eşitliğinden $|AD| = 12$ br, dolayısıyla da $|BD| = 9$ br olarak bulunur.

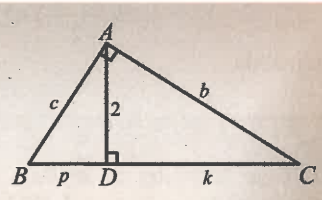
Diğer yandan FK // BA ve $|AK| = |KC|$ olduğundan $[FK]$ doğru parçası ABC dik üçgeninde orta tabandır. Bu yüzden $|BF| = |FC| = 12{,}5$ br olmalıdır. Öyleyse

$$|DF| = 12{,}5 \text{ br} - 9 \text{ br} = 3{,}5 \text{ br}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

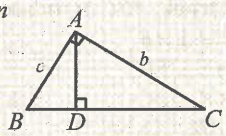
34.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$, $AD \perp BC$
$|AD| = 2$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|BD| = p$ br
$|DC| = k$ br



olup $b\cdot c\cdot p\cdot k = 48$ olduğuna göre Alan(ABC) kaç br^2 dir?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 24

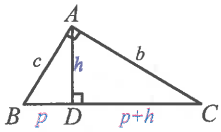
Örnek [Birey]. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB ve AD ⊥ BC
|AD| + |BD| = |DC|
|AC| = b br
|AB| = c br



olduğuna göre $\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}$ *oranı kaçtır?*

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: $|AD| = h$ br, $|BD| = p$ br olsun. $|DC| = p + h$ br olur.



Öklit teoreminden $h^2 = p\cdot(p + h)$ yani $p^2 + ph - h^2 = 0$ eşitliğini biliyoruz. Eşitliğin her iki yanını h^2 ye bölersek

$$(\frac{p}{h})^2 + \frac{p}{h} - 1 = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{p}{h} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

bulunur.

$$\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} = \frac{|BC|^2}{(p+h)^2-p^2}$$

$$= \frac{(2p+h)^2}{2ph+h^2} = \frac{2p+h}{h} = 2\frac{p}{h}+1$$

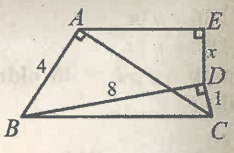
olduğundan cevabımız

$$2(\frac{\sqrt{5}-1}{2})+1 = \sqrt{5}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

35.
BAC ve *BDC* birer dik üçgen
BA ⊥ AC, BD ⊥ DC, AE ⊥ ED
AE // BC
|AB| = 4 br
|BD| = 8 br
|DC| = 1 br
|ED| = x br



olduğuna göre $x\sqrt{65}$ **kaçtır?**

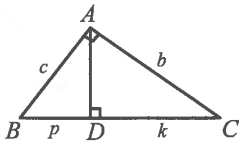
A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

Sıradaki teoremimiz bir Öklit şeklinde yan kenarlar oranının tabanlar oranıyla ilişkisi üzerine.

Teorem. *A açısı dik olan bir ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D olsun.*

Uzunluklar şekildeki gibiyse;

$$\frac{p}{k} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$



Kanıt: Daha önce

$$c^2 = p\cdot(p + k)$$
$$b^2 = k\cdot(p + k)$$

eşitliklerini kanıtlamıştık. Bu eşitlikleri birbirlerine bölersek

$$\frac{p}{k} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

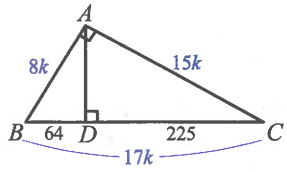
eşitliği kanıtlanmış olur.

Şimdi daha önce çözdüğümüz bir soruyu, bu teoremle çözelim de faydasını görelim.

Örnek. *Bir dik üçgenin dik kenarlarının hipotenüs üzerine dik izdüşümleri* 64 br *ve* 225 br *olduğuna göre üçgenin çevresi kaç* br *dir?*

A) 391 B) 550 C) 670 D) 675 E) 680

Çözüm: Hemen verilere uygun şeklimizi çizelim.



Kanıtladığımız teoreme göre

$$\frac{64}{225} = \frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$$

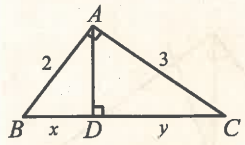
olması gerektiğinden

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{8}{15}$$

olur. Şu durumda $|AB| = 8k$ br dersek $|AC| = 15k$ br ve Pisagor teoreminden $|BC| = 17k$ br, dolayısıyla da Çevre$(ABC) = 40k$ br olur. $|BC| = 289$ br olarak verildiğinden $k = 17$ bulunur, o halde sorulan çevre değeri $40\cdot17 = 680$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

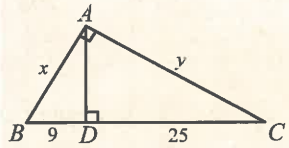
36.



x / y kaçtır?

4/9

37.

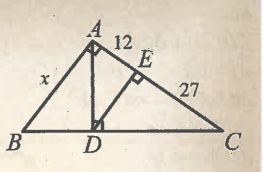


x / y kaçtır?

3/5

38.

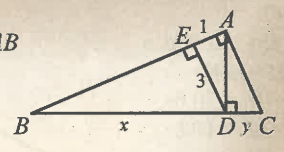
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$, $AD \perp BC$, $DE \perp CA$
$|AE| = 12$ br
$|EC| = 27$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 27 **B)** 26 C) 25 D) 24 E) 23

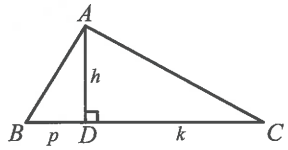
39.

ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$
$|AE| = 1$ br
$|ED| = 3$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
olduğuna göre x / y kaçtır?



A) 3 B) 6 C) 8 **D)** 9 E) 12

Son olarak Öklit Teoremi'nin tersinin doğru olup olmadığını inceleyeceğiz. Yani



üstteki gibi bir şekilde $h^2 = p \cdot k$ eşitliği sağlanıyorsa CAB açısına dik diyebilir miyiz?

Bakalım: ADB ve ADC üçgenleri dik olduğundan

$$|AB| = \sqrt{h^2 + p^2}$$
$$|AC| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

yazabiliriz. Pisagor teoreminin tersinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık. Şu durumda ABC üçgeninin kenar uzunlukları Pisagor Teoremi'ni sağlıyorlarsa CAB açısına dik, değilse cık diyeceğiz!

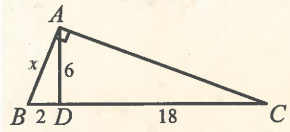
$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$
$$h^2 + p^2 + h^2 + k^2 = (p + k)^2$$
$$2h^2 + p^2 + k^2 = (p + k)^2$$

$h^2 = p \cdot k$ eşitliği verildiğinden yerine yazmakta bir mahsur yoktur.

$$2pk + p^2 + k^2 = (p + k)^2$$

eşitliği de doğru bir eşitlik olduğundan Öklit teoreminin tersinin de doğru olduğunu kanıtlamış oluyoruz.

40.

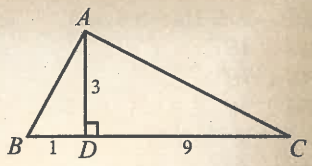


x kaçtır?

$2\sqrt{10}$

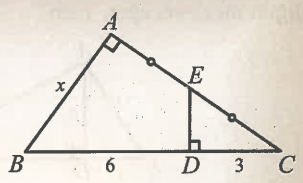
41.

ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|AD| = 3$ birim
$|BD| = 1$ birim
$|DC| = 9$ birim
olduğuna göre
$m(BAC)$ kaç derecedir?



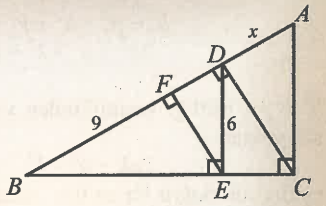
A) 60 B) 75 **C)** 90 D) 105 E) 120

42.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$ED \perp BC$
$|AE| = |EC|$
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 3$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



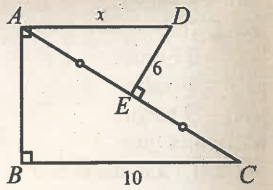
A) 3 **B)** $3\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 6

43.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$CD \perp AB$
$DE \perp BC$
$EF \perp AB$
$|DE| = 6$ br
$|BF| = 9$ br
olduğuna göre $|DA| = x$ kaç br dir?



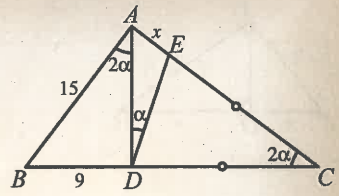
A) 3 B) $3\sqrt{3}$ **C)** 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 5

44.
ABC ve AED birer üçgen
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$DE \perp AC$
$|AE| = |EC|$
$|DE| = 6$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



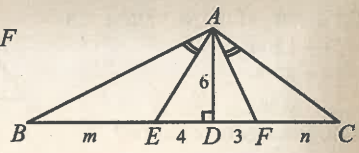
A) 7 B) 7,5 C) 8 D) 8,5 **E)** 9

45.
ABC bir üçgen
$m(ADE) = \alpha$
$m(BAD) = m(C) = 2\alpha$
$|CD| = |CE|$
$|AB| = 15$ br
$|BD| = 9$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



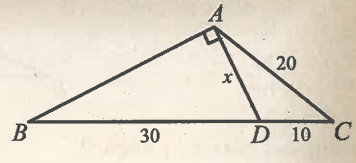
A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 7

46.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$ ve $BA \perp AF$
$m(BAE) = m(CAF)$
$|AD| = 6$ br
$|ED| = 4$ br
$|DF| = 3$ br
$|BE| = m$ br
$|FC| = n$ br
olduğuna göre $m - n$ farkı kaçtır?



A) 1 **B)** 2 C) 3 D) 4 E) 5

47.
ABC bir üçgen
$BA \perp AD$
$|BD| = 30$ br
$|DC| = 10$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 12 **B)** $6\sqrt{5}$ C) 15 D) $12\sqrt{5}$ E) 18

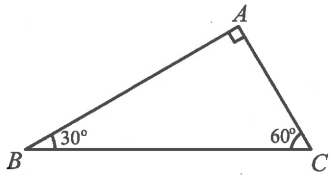
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

30°-60°-90° Üçgeni

Sıra, açılarına göre özel üçgenlere geldi. Önce özel dik üçgenleri sonra da diğer özel üçgenleri inceleyeceğiz. Özel üçgenlerin kenarları arasındaki ilişkileri ezbere bilmek birçok soruda işimizi kolaylaştırır. Her defasında aynı işlemleri yapmaktansa bilinen özellikler hemencecik şekle yerleştirilirse bir de bakmışsınız, soru çözülmüş!

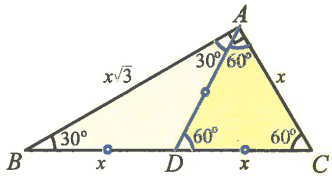
İlk özel dik üçgenimiz: 30°-60°-90° Üçgeni. İç açı ölçülerinden bir tanesi 30° olan üçgenlere 30°-60°-90° üçgeni diyoruz. Neden 30°-60° üçgeni denmiyor, onu merak etmemek de elde değil... Sanki 30°-60°-80° üçgeni var!



30°-60°-90° üçgeninin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi veren teorem şudur:

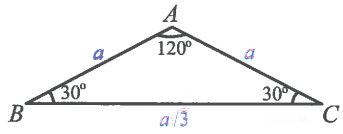
İç açılarından birinin ölçüsü 30° olan bir dik üçgende, 30°'lik açının gördüğü kenarın uzunluğu a br *ise 60°'lik açının gördüğü kenarın uzunluğu* $a\sqrt{3}$ br *ve hipotenüs uzunluğu da 2a* br *dir.*

Bunu şöyle izah edebiliriz: Çıplak bir 30°-60°-90° üçgeni çizelim. Hiçbir kenar uzunluğu belli olmadığından Pisagor teoremini uygulayamıyoruz. Pisagor teoreminin uygulanamadığı dik üçgen sorularda aklımıza evvela ne gelecekti? Tabii ki muhteşem üçlü gelecekti. Bu sebeple A'dan inen kenarortayı çizelim. BC'yi D'de kessin.



ADC bir eşkenar üçgen olur. Buradan $|AC| = x$ br verilirse $|BD| = 2x$ br olur. Diğer yandan Pisagor teoreminden gelen $x^2 + |AB|^2 = (2x)^2$ eşitliği çözülürse $|AB| = x\sqrt{3}$ br bulunur. Böylelikle kanıt tamamlanmış olur.

30°-30°-120° Üçgeni. 30°-60°-90° üçgeninin kenarları arasındaki bağıntıyı ezbere vermek yerine kanıtlayarak vermemizin bize bir hediyesi oldu. Üst şekildeki ABD üçgenine bakarsanız, üç açısı da üç kenarı da belli bir üçgendir. Bunu hemen not edelim:



Taban açıları 30'ar derece olan bir ikizkenar üçgende 120°'lik açının gördüğü kenarın uzunluğu, ikiz kenar uzunluklarının $\sqrt{3}$ *katıdır.*

Örnek. *Aşağıdaki ifadelerden hangisi en kısa kenarının boyu a* br *olan bir 30°-60°-90° üçgeninin çevresini verir?*

A) $a\sqrt{3}+3a$ B) $a\sqrt{3}+2a$ C) $a\sqrt{3}+4a$ D) $2a\sqrt{3}+a$ E) $2a\sqrt{3}+3a$

Çözüm: 30°-60°-90° üçgeninin kenarlarının a br, $a\sqrt{3}$ br ve $2a$ br olduğunu biliyoruz. Böyle bir üçgenin çevresi de $a\sqrt{3}+3a$ br olacaktır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdaki ifadelerden hangisi en kısa kenarının boyu a* br *olan bir 30°-60°-90° üçgeninin sınırladığı bir bölgenin alanını verir?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ C) $\sqrt{3}a^2$ D) a^2 E) $3a^2$

Çözüm: 30°-60°-90° üçgeninin kenarlarının a br, $a\sqrt{3}$ br ve $2a$ br olduğunu biliyoruz. Dik üçgeninin alanının dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısı olduğunu da... O halde böyle bir üçgenin alanı

$$\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

olacaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Çevresi* $2\sqrt{3}+6$ br *olan bir* 30°-60°-90° *üçgeninin sınırladığı bölgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $6\sqrt{3}$

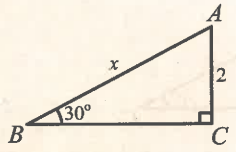
Çözüm: Daha önceki bir çözümlü örnekte en kısa kenarının boyu a br olan bir 30°-60°-90° üçgeninin çevresinin $a\sqrt{3}+3a$ br olacağını bulmuştuk. O halde

$$a\sqrt{3}+3a=2\sqrt{3}+6$$

eşitliğinden $a=2$ bulunur. Buradan da alanı $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ formülünden $2\sqrt{3}$ br^2 çıkacaktır.

Doğru cevap: A.

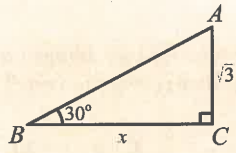
1.



x kaçtır?

4

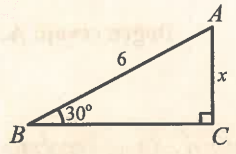
2.



x kaçtır?

3

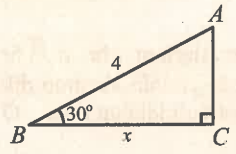
3.



x kaçtır?

3

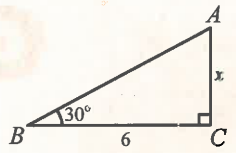
4.



x kaçtır?

$2\sqrt{3}$

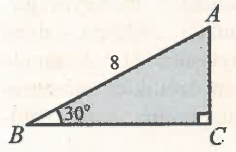
5.



x kaçtır?

$2\sqrt{3}$

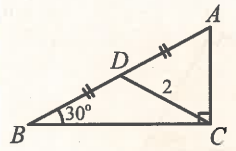
6.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

$8\sqrt{3}$

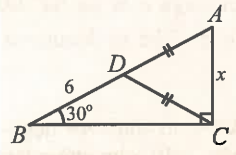
7.



Çevre(ABC) kaç br dir?

$6+2\sqrt{3}$

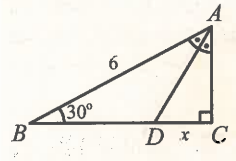
8.



x kaçtır?

6

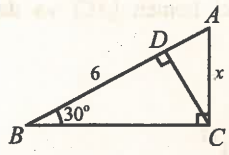
9.



x kaçtır?

$\sqrt{3}$

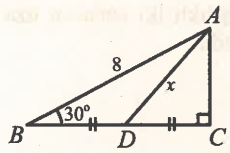
10.



x kaçtır?

4

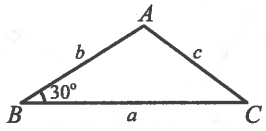
11.



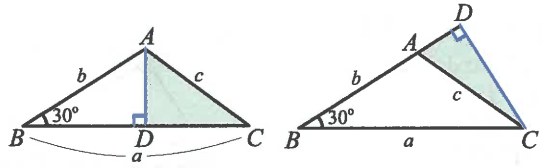
x kaçtır?

$2\sqrt{7}$

Bir Açısının Ölçüsü 30° veya 60° Olan Üçgenler. Bazen soruda verilen üçgen 30°-60°-90° üçgeni değildir ama soru bu üçgenin özellikleri kullanılarak çözülür. Bunun için sadece verilen üçgenin herhangi bir iç açısının ölçüsünün 30° veya 60° olması yeter.



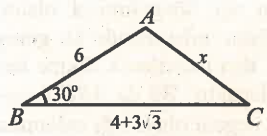
Örneğin yukardaki üçgende a, b ve c değerlerinden herhangi ikisi verilerek üçüncünün değeri veya alabileceği değerler sorulduğunda;



üst şekillerdeki gibi ya A'ya ya da C'ye ait yükseklik çizilir. Yükseklik ayağına D dersek, ABD bir 30°-60°-90° üçgeni olur. Hemen bu üçgenin uzunluğu eksik olan kenarlarının uzunlukları bulunarak, oluşan ADC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

Anlattığımız bu metot, B açısı 60° olsa da uygulanır. Dileyen bu işlemleri a, b, c değerleri için bir kez uygulayıp çıkan sonucu hafızada tutmaya çalışabilir ama böyle gereksiz bir işlemi sakın yapmayın. İlerde kosinüs teoremi başlıklı yazıda bunun kısa bir yolunu öğreneceğiz.

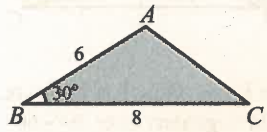
12.



x kaçtır?

5

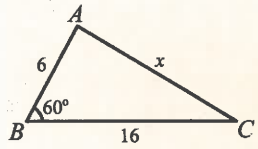
13.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

12

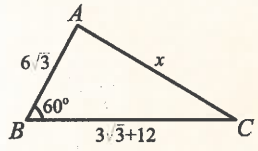
14.



Çevre(ABC) kaç br^2 dir?

36

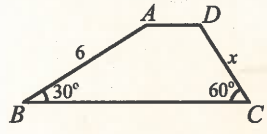
15.



x kaçtır?

15

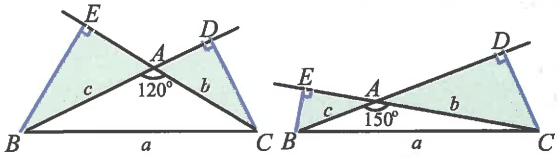
16.



AD // BC ise x kaçtır?

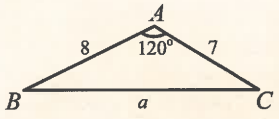
$2\sqrt{3}$

Bir Açısının Ölçüsü 120° veya 150° Olan Üçgenler. Ölçüsü 120° veya 150° olan açı, sözgelimi A olsun. A'nın ölçüsü hangisi olursa olsun, nihayetinde bir geniş açı olduğundan B'den veya C'den indirilecek dikme her halükarda üçgenin dışında kalacaktır. Bu da ABC üçgeninin dışında bir 30°- 60°-90° üçgeni oluşacağı anlamına gelir. O üçgen kullanılarak, soru çözülmüş olur.



Örneğin yukardaki üçgenlerde b ve c değerleri biliniyor, a soruluyor olsun. AEB ve CDA üçgenleri birer 30°- 60°-90° üçgeni olup üç kenarının da uzunlukları bulunabilir. Daha sonra CEB veya CDB dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanarak a bulunur.

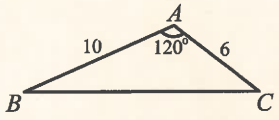
17.



x kaçtır?

13

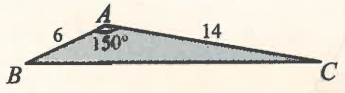
18.



Çevre(ABC) kaç br dir?

30

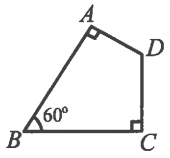
19.



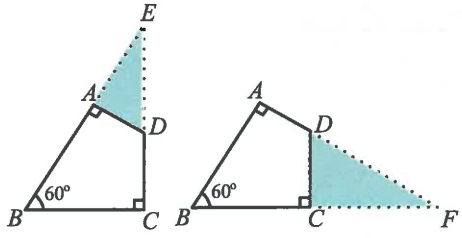
Alan(ABC) kaç br^2 dir?

21

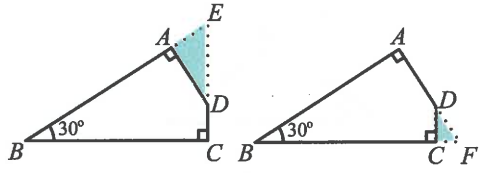
30°-60°-90° Üçgeninden Bir Kesit. Aşağıdaki gibi bir şekille karşılaşınca, çoğu öğrenci hemen $[AC]$ ya da $[BD]$ köşegenini çizer.



Fakat bu çizim, çoğu zaman hiçbir işe yaramaz. Sizin yapmanız gereken, dörtgenin karşılıklı iki kenarını uzatarak kesişmesini sağlamak olmalıdır.

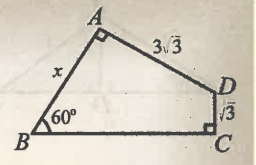


Zira o şekil, yukardaki şekillerden de görüldüğü üzere, bir 30°-60°-90° üçgeninin kesik halidir. Aynı durum bir iç açısının ölçüsü 30° olan bazı dörtgenler de vardır.



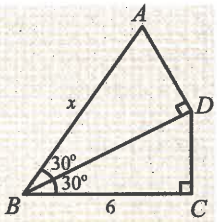
Onlarda da karşılıklı iki kenarı uzatarak kesişmelerini sağlayın, yeter. Gerisini 30°-60°-90° üçgeninin kuralları çözer.

20.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$
$BC \perp CD$
$m(B) = 60°$
$|AD| = 3 \cdot |CD| = 3\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$BC \perp CD$, $BD \perp DA$
$m(ABD) = 30°$
$m(DBC) = 30°$
$|BC| = 6$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) $6\sqrt{3}$ D) 8 E) 12

Çözüm: İlk sorumuz diye iki farklı yoldan çözelim.

Birinci yol. *ABD* ve *DBC* üçgenlerinin birer 30°-60°-90° üçgeni olduğunu görmüşsünüzdür.

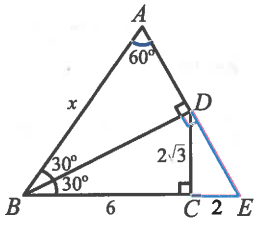
$$|BC| = \sqrt{3}|CD|$$

olduğu bilindiğinden $|CD| = 2\sqrt{3}$ br olur, dolayısıyla da $|BD| = 4\sqrt{3}$ br bulunur. Aynı zamanda

$$|BD| = \sqrt{3}|DA|$$

olduğu da bilindiğinden $|DA| = 4$ br olur, dolayısıyla da $|BA| = 8$ br.

İkinci yol. *AD* ve *BC* kenarlarını şekildeki uzatıp kesiştikleri noktaya *E* diyelim.



ABE üçgeninin eşkenar olduğu bariz sanırım. Ayrıca *DBC* üçgeni bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan

$$|CD| = 2\sqrt{3} \text{ br}$$

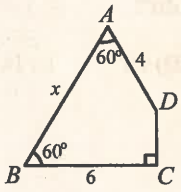
çıkar. *DBE* dik üçgeninde Öklit teoreminden de $|CE| = 2$ br olarak bulunur. Eşkenar bir üçgenin tüm kenar uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan

$$|AB| = |BE| = 6 + 2 = 8$$

olarak bulunur.

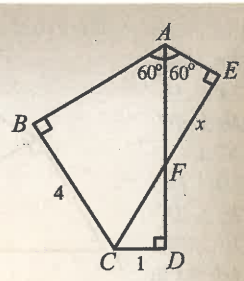
Doğru cevap: D.

21.



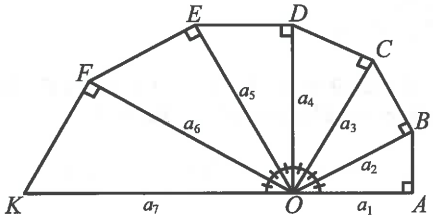
x kaçtır?

22.
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$CE \perp EA$
$m(BAD) = m(EAD) = 60°$
$|BC| = 4$ br
$|CD| = 1$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) 4 E) $3\sqrt{2}$

Çözdüğümüz en son örneğin şekline tekrar bakarsanız, iki tane 30°-60°-90° üçgeninin birbirlerine yapıştırıldığını göreceksiniz. Bazen yapıştırılan üçgenlerin sayısı daha çok olur. Birinden diğerini, diğerinden öbürünü, öbüründen ötekini, ötekinden berikini bulurum derken rakamlar içinde kaybolan çok kimse var. Halbuki bu işin daha disiplinli bir yolu var.



Örneğin, yukarda 6 tane 30°-60°-90° üçgenini birbirine aynı yönlü yapıştırılmış olarak görmektesiniz. Burada a_1 belliyken a_2'yi bulmak için yapılan işlemin aynısının a_2 belliyken a_3'ü bulmak için (veya a_3 belliyken a_4'ü bulmak için) de yapıldığını fark etmelisiniz. O halde a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 değerleri bir geometrik dizi oluşturmaktadır.

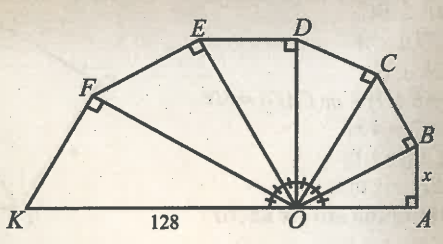
Anlayacağınız, bir terimden bir sonraki terime geçerken hep aynı sayı ile çarpıyoruz. a_1'den a_7'ye doğru ilerlerken bu sayı $\frac{2}{\sqrt{3}}$, a_7'den a_1'e doğru ilerlerken $\frac{\sqrt{3}}{2}$'dir.

$$a_7 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6 \cdot a_1 = \frac{64}{27} \cdot a_1$$

$$a_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \cdot a_7 = \frac{27}{64} \cdot a_7$$

23.

$O \in [KA]$
$OA \perp AB$
$OB \perp BC$
$OC \perp CD$
$OD \perp DE$
$OE \perp EF$
$OF \perp FK$
$|AB| = x$ br
$|KO| = 128$ br

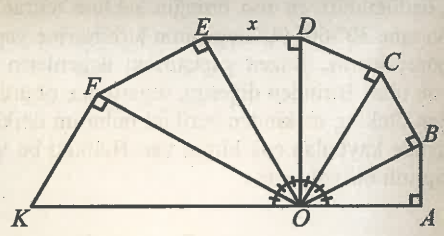


Yukarıdaki şekilde *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* ve *FOK* açıları eş olduğuna göre *x* kaçtır?

A) 54 B) $27\sqrt{3}$ C) 27 **D)** $18\sqrt{3}$ E) 18

24.

$O \in [KA]$
$OA \perp AB$
$OB \perp BC$
$OC \perp CD$
$OD \perp DE$
$OE \perp EF$
$OF \perp FK$
$|ED| = x$ br
$|KO| \cdot |OA| = 48$ br^2

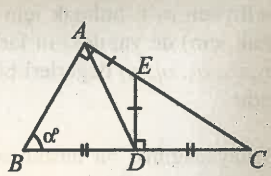


Yukarıdaki şekilde *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* ve *FOK* açıları eş olduğuna göre *x* kaçtır?

A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 6 E) 8

25.

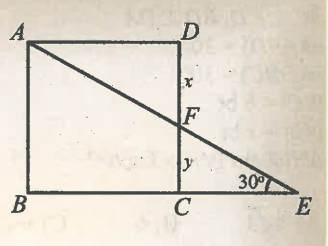
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$ED \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|DE| = |EA|$
$m(ABC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 45 **B)** 60 C) 67,5 D) 75 E) 80

26.

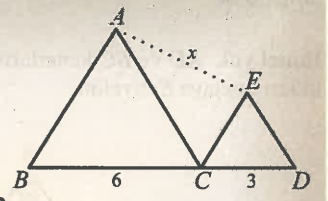
$ABCD$ bir kare
B, C, E doğrudaş
$AE \cap DC = \{F\}$
$m(AEB) = 30°$
$|DF| = x$ br
$|FC| = y$ br
olduğuna göre
***x/y* kaçtır?**



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-1$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

27.

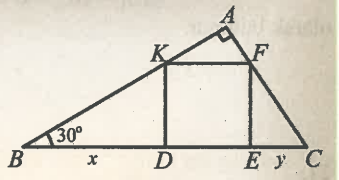
ABC ve ECD birer eşkenar üçgen
B, C, D doğrudaş
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 3$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) 5 **D)** $3\sqrt{3}$ E) 6

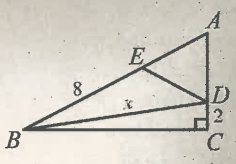
28.

ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$m(B) = 30°$
$DEFK$ bir kare
$|BD| = x$ br
$|EC| = y$ br
$x + y = 8$
olduğuna göre karenin alanı kaç br^2 dir?



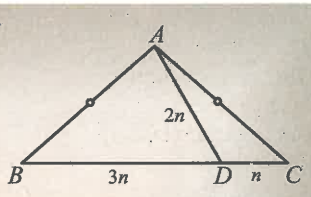
A) 10 **B)** 12 C) 14 D) 16 E) 18

29.
ABC bir dik üçgen
$AC \perp BC$
AED eşkenar üçgen
$|CD| = 2$ br
$|EB| = 8$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?



A) $4\sqrt{7}$ B) 10 C) 12 D) $5\sqrt{7}$ E) 13

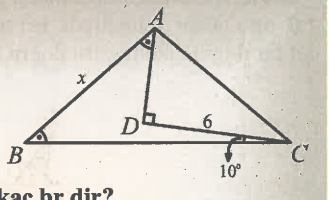
30.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|AB| = |AC|$
$|AD| = 2n$ br
$|BD| = 3n$ br
$|DC| = n$ br



olduğuna göre $m(CAB) - 2 \cdot m(CAD)$ farkı kaç derecedir?

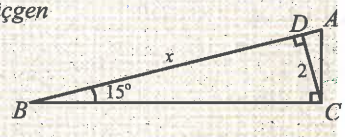
A) 30 B) 45 **C) 60** D) 75 E) 90

31.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$AD \perp DC$
$m(DAB) = m(ABC)$
$m(BCD) = 10°$
$|DC| = 6$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ kaç br dir?



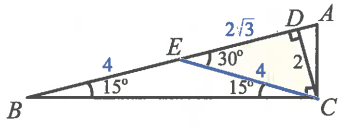
A) 12 B) 10 C) 8 D) $6\sqrt{2}$ **E)** $4\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BC \perp CA$
$CD \perp AB$
$m(ABC) = 15°$
$|CD| = 2$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?



A) $4+2\sqrt{3}$ B) $4-2\sqrt{3}$ C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm: Pisagor teoremini uygulayacak kadar verisi olmayan bir dik üçgen sorusuyla karşı karşıya olduğumuzdan aklımıza muhteşem üçlü teoremi gelmeliydi. Bu sebeple ACB dik üçgeninde $[CE]$ kenarortayını çizelim.



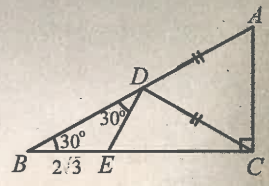
$|CE| = |EB| = |EA|$ olduğundan $m(BCE) = 15°$ dolayısıyla $m(CEA) = 30°$ olur. Görüldüğü üzere ECD üçgeni bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|ED| = 2\sqrt{3}$ br ve $|EC| = |EB| = 4$ br bulunur. O halde

$$|BD| = |BE| + |ED| = 4 + 2\sqrt{3} \text{ br}$$

olmalıdır.

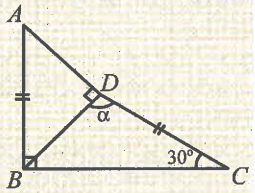
Doğru cevap: A.

32.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|DA| = |DC|$
$m(ABC) = m(EDB) = 30°$
$|BE| = 2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre
$|EC|$ kaç br dir?



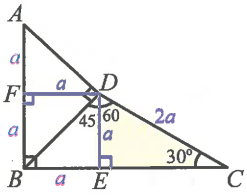
A) 5 B) 6 **C)** $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $6\sqrt{3}$

Örnek. *ADB ve CDB birer üçgen*
AB ⊥ BC
AD ⊥ DB
|AB| = |DC|
m(BCD) = 30°
olduğuna göre
m(CDB) = α kaç derecedir?



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

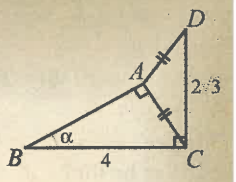
Çözüm: $|AB| = |DC| = 2a$ br olsun. D'den BC ve AB kenarlarına inilen dikme ayakları sırasıyla E ve F olsun.



CDE üçgeni 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|ED| = a$ br dir. $DFBE$ dikdörtgen olduğundan $|FB| = a$ br olur. Aynı zamanda $|AF| = a$ br olduğundan muhteşem üçlü teoremi gereği $|DF| = a$ br olur. O halde $DFBE$ dikdörtgeni bir karedir. Bu yüzden $m(EDB) = 45°$ olduğundan $m(CDB) = 105°$ olarak bulunur.

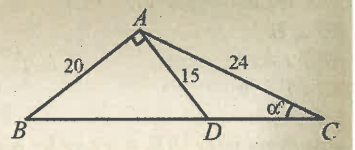
Doğru cevap: B.

33.
ABCD bir konkav dörtgen
CA ⊥ AB
BC ⊥ CD
|AD| = |AC|
$|DC| = 2\sqrt{3}$ br
|BC| = 4 br
olduğuna göre *m(ABC) = α* kaç derecedir?



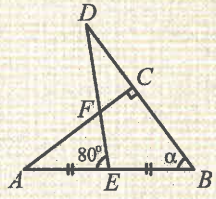
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

34.
ABC bir üçgen
D ∈ [BC]
DA ⊥ AB
|AB| = 20 br
|AD| = 15 br
|AC| = 24 br
m(C) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



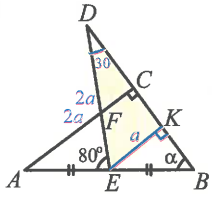
A) 15 B) 20 C) 22,5 **D) 30** E) 36

Örnek. *ABC ve BDE birer üçgen*
AC ⊥ BD
|DE| = |AC|
|AE| = |EB|
m(DEA) = 80°
olduğuna göre
m(DBA) = α kaç derecedir?



A) 75 B) 70 C) 65 D) 60 E) 50

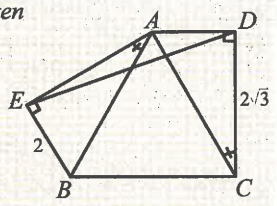
Çözüm: Ne zaman orta nokta görürsek aklımıza ilk olarak orta taban gelmeliydi. Bu amaçla E'den AC'ye paralel bir doğru çizelim. Bu doğru BD'yi K'de kessin.



$[EK]$'nin ABC üçgeninde orta taban olacağına dikkat ediniz. Bu arada $|DE| = |AC| = 2a$ br dersek $|EK| = a$ br olur. EKD üçgeninde hipotenüs bir dik kenar uzunluğunun 2 katı olduğundan bu üçgen 30°-60°-90° üçgenidir. $m(BDE) = 30°$ olduğundan $m(ABD) = 50°$ olmalıdır.

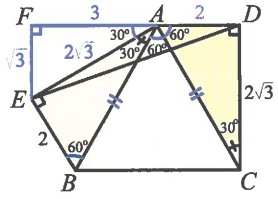
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
CDA ve AEB birer dik üçgen
CD ⊥ DA
AE ⊥ EB
m(ACD) = m(BAE)
|EB| = 2 br
|CD| = 2√3 br
olduğuna göre |ED| kaç br dir?



A) 4 B) $2\sqrt{5}$ C) 5 D) $2\sqrt{7}$ E) 6

Çözüm: *CDA* ve *AEB* üçgenlerinin hem iç açı ölçüleri karşılıklı olarak birbirlerine eşit hem de hipotenüsleri eşit boyda olduğundan bu üçgenler eştir.



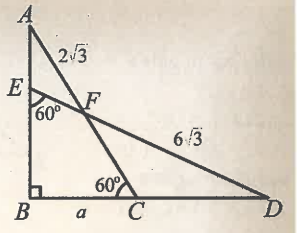
Bu eşlikten dolayı $|DA| = |EB| = 2$ br ve $|AE| = |CD| = 2\sqrt{3}$ br olur. Bu değerler de bu eş üçgenlerin birer 30°-60°-90° üçgeni olduklarını anlatır. *E*'den *DA* doğrusuna inilen dikme ayağı *F* olsun. *AFE* üçgeni de bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|FE| = \sqrt{3}$ br ve $|FA| = 3$ br olur. *DFE* dik üçgeninde uygulanacak bir Pisagor teoremiyle sonuca ulaşılır:

$$|ED|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 28$$

olduğundan $|ED| = 2\sqrt{7}$ br olarak bulunur.

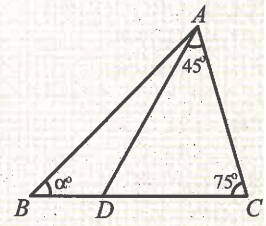
Doğru cevap: D.

35.
ABC ve *EBD*
birer dik üçgen
m(ACB) = m(DEB) = 60°
|AF| = 2√3 br
|FD| = 6√3 br
olduğuna göre
|BC| = a kaç br dir?



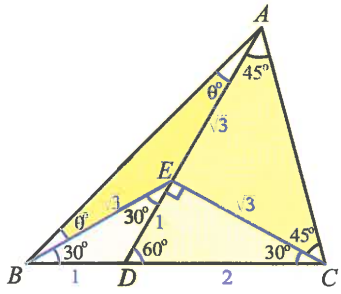
A) 3 **B)** $3+\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
D ∈ [BC]
|BC| = 3·|BD|
m(BCA) = 75°
m(CAD) = 45°
m(ABC) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

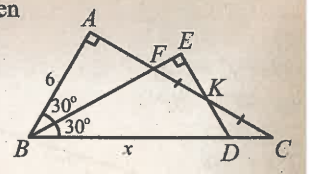
Çözüm: $|BD| = 1$ br dersek, $|DC| = 2$ br olur. *C*'den *AD*'ye indirilen dikme ayağı *E* olsun.



CED üçgeni 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|ED| = 1$ br olur. Bu da *BDE* üçgeninin ikizkenar olduğu anlamına gelir. Hatta bu üçgen 30°-30°-120° üçgeni olduğundan $|BE| = \sqrt{3}$ br olur. Diğer yandan *AEC* de ikizkenar üçgen olduğundan $|AE| = |EC| = \sqrt{3}$ br olur. Sonuçta *ABE* üçgeni de ikizkenar bulunur. $m(ABE) = m(EAB) = \theta°$ dersek, $m(BED) = 30°$ olduğundan $\theta = 15$ olur. O halde $m(ABC) = \theta° + 30° = 45°$ bulunur.

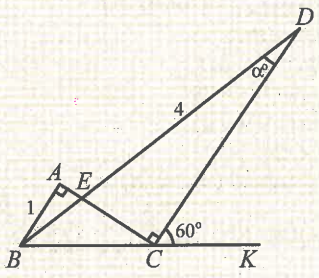
Doğru cevap: C.

36.
ABC ve *EBD* birer dik üçgen
CA ⊥ AB, DE ⊥ EB
|FK| = |KC|
m(ABE) = m(EBC) = 30°
|AB| = 6 br
|BD| = x br
olduğuna göre *x* kaçtır?



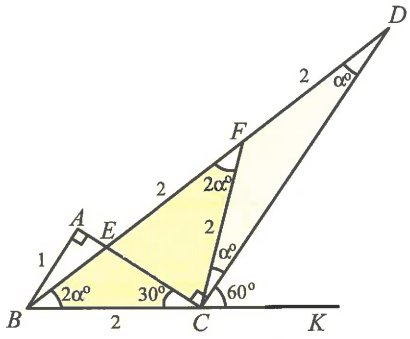
A) 7 **B)** 8 C) 9 **D)** 10 E) 11

Örnek. *ABC dik üçgen*
B, E, D doğrudaş
B, C, K doğrudaş
BA ⊥ AC, AC ⊥ CD
|AB| = 1 br
|ED| = 4 br
m(DCK) = 60°
m(CDA) = α°
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 10 B) 12,5 C) 15 D) 17,5 E) 20

Çözüm: *ECD* dik üçgeninde *CF* kenarortayı çizilirse, muhteşem üçlü gereğince *|CF| = 2* br olur.



Diğer yandan *ABC* üçgeni 30°-60°-90° üçgeni olduğundan *|BC| = 2* br dir. *DFC* ikizkenar üçgen olduğundan *m(CDB) = α°* ise

$$m(CFBA) = m(FBC) = 2\alpha^\circ$$

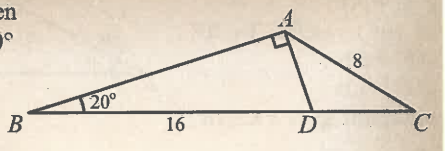
olur. Dış açı teoreminden

$$\alpha + 2\alpha = 60$$

bulunur ki $\alpha = 20$'dir.

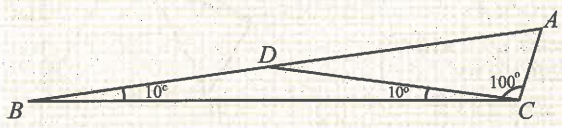
Doğru cevap: E.

37.
ABC bir üçgen
m(ABC) = 20°
D ∈ [BC]
DA ⊥ AB
|AC| = 8 br
|BD| = 16 br
olduğuna göre *C*'nin *AD*'ye uzaklığı kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{3}$ **D) 4** E) $4\sqrt{2}$

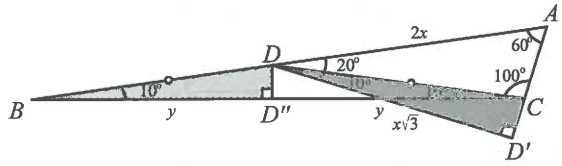
Örnek. *B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla 10° ve 110° olan aşağıdaki ABC üçgeninin [AB] kenarı üzerinde |BD| = |DC| olacak şekilde bir D noktası alınıyor.*



Buna göre $\frac{|BC|}{|AD|}$ *oranı kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: *A* açısının ölçüsünün 60° olduğunu görmüşsünüzdür. Bir 30°-60°-90° üçgeni elde etmek için *D*'den *AC*'ye dik indirelim. Ayağı *D'* olsun.



Bir de *D* noktasından *BC*'ye dik indirelim. Bunun ayağı da *D''* olsun. *CDB* ikizkenar olacağından *|BD''| = |D''C|* olacağını biliyoruz. Şimdi *DBD''* ve *CDD'* üçgenlerine odaklanalım. Her ikisinin de iç açıları karşılıklı olarak eş olup hipotenüsleri de eş olduğundan *DBD''* ile *CDD'* üçgenleri eştir.

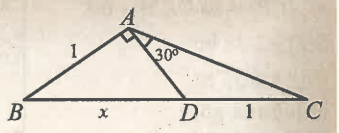
|AD'| = x br denirse *|DD'| = x√3* br ve *|AD| = 2x* br olur. Şu durumda eşlikten dolayı *|BD''| = x√3* br olur. O halde

$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{2x\sqrt{3}}{2x} = \sqrt{3}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

38.
ABC bir üçgen
DA ⊥ AB
m(DAC) = 30°
|AB| = |DC| = 1 br
olduğuna göre
***|BD| = x* kaç birimdir?**



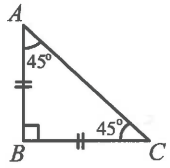
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İkizkenar Dik Üçgen

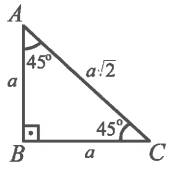
İkizkenar dik üçgen. Dik kenarları eşit uzunlukta olan dik üçgenlere **ikizkenar dik üçgen** denir.



İç açı ölçüleri (45°, 45°, 90°)'dir. Karenin yarısı gibi düşünebilirsiniz.

Teorem. *İkizkenar dik üçgende hipotenüs uzunluğu, dik kenar uzunluklarının $\sqrt{2}$ katıdır.*

Kanıt: Pisagor Teoremi'nden kanıtını kolaylıkla yapabilirsiniz. Yani; 45°'nin karşısındaki kenarın uzunluğuna a br dersek, diğer 45° nin karşısındaki kenar uzunluğu da a br olur.



Hipotenüs uzunluğuna x diyerek Pisagor Teoremi uygulanırsa

$$x^2 = a^2 + a^2$$

eşitliğinden $x = a\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Sonuç 1. *İkiz kenarlarının uzunlukları a br olan bir ikizkenar dik üçgenin çevresi $a\sqrt{2}+2a$ br dir.*

Sonuç 2. *İkiz kenarlarının uzunlukları a br olan bir ikizkenar dik üçgenin alanı $\frac{1}{2}a^2$ br^2 dir.*

Örnek. *Çevresi $4\sqrt{2}+8$ br olan bir ikizkenar dik üçgenin alanı kaç br^2 dir?*

A) 8 B) 16 C) 24 D) 32 E) 48

Çözüm: $a\sqrt{2}+2a=4\sqrt{2}+8$ eşitliğinden $a=4$ olarak bulunur. Şu durumda alan da $\frac{1}{2}(4)^2 = 8$ br^2 çıkar.

Doğru cevap: A.

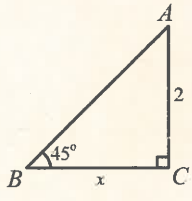
Örnek. *Alanı sayıca çevresine eşit olan ikizkenar dik üçgenin hipotenüs uzunluğu kaç* br *dir?*

A) $4+8\sqrt{2}$ B) $4+4\sqrt{2}$ C) $8+4\sqrt{2}$ D) $2+4\sqrt{2}$ E) $4+2\sqrt{2}$

Çözüm: $\frac{1}{2}a^2 = a\sqrt{2}+2a$ eşitliğinin her iki yanını a'ya bölüp 2 ile çarparsak $a = 2\sqrt{2}+4$ bulunur. O halde hipotenüsün boyu da $a\sqrt{2} = (2\sqrt{2}+4)\sqrt{2} = 8+4\sqrt{2}$ olur.

Doğru cevap: C.

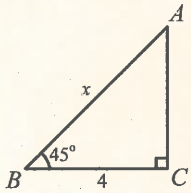
1.



x kaçtır?

2

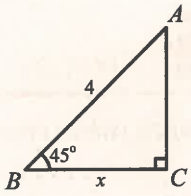
2.



x kaçtır?

$4\sqrt{2}$

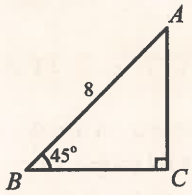
3.



x kaçtır?

$2\sqrt{2}$

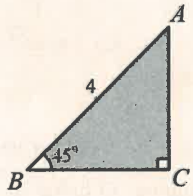
4.



Çevre(ABC) kaç br dir?

$8+8\sqrt{2}$

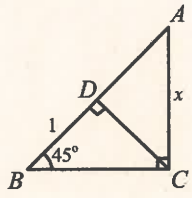
5.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

4

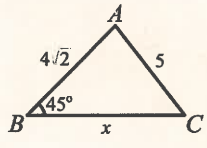
6.



x kaçtır?

$\sqrt{2}$

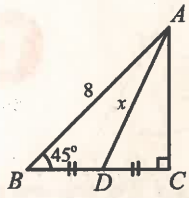
7.



x kaçtır?

7

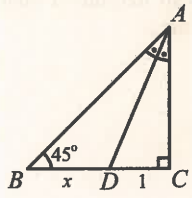
8.



x kaçtır?

$2\sqrt{10}$

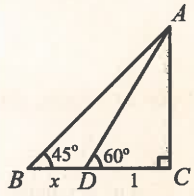
9.



x kaçtır?

$\sqrt{2}$

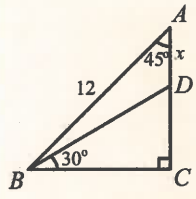
10.



x kaçtır?

$\sqrt{3}-1$

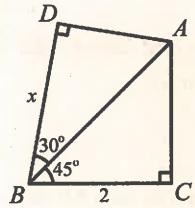
11.



x kaçtır?

$6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

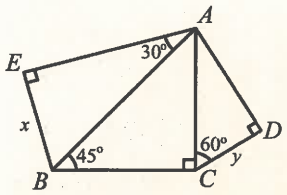
12.



x kaçtır?

$\sqrt{6}$

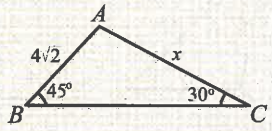
13.



Alan(ABC) = 18 br^2 ise $x + y$ toplamı kaçtır?

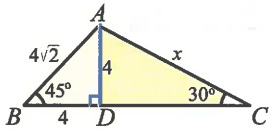
$3\sqrt{2}+3$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 45°$
$m(BCA) = 30°$
$|AB| = 4\sqrt{2}$ br
olduğuna göre
$|AC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 8 D) $8\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

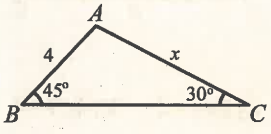
Çözüm: Atalarımız ne demiş, ''Nerde özel bir açı gördün, hemen onun koluna dik indir!'' Bu yüzden A'dan BC'ye dik indireceğiz.



Dikmenin ayağına D dersek ADB ile ADC birer özel dik üçgen olur. ADB ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AD| = 4$ br dir. ADC üçgeni de 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|AC| = x = 8$ dir.

Doğru cevap: C.

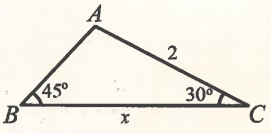
14.



x kaçtır?

$4\sqrt{2}$

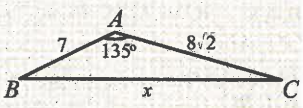
15.



x kaçtır?

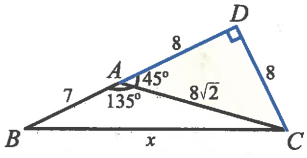
$1+\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(CAB) = 135°$
$|AB| = 7$ br
$|AC| = 8\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

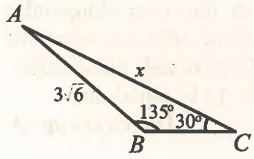
Çözüm: Bu sefer özel açımız geniş açı diye koluna dik indiremeyiz. O zaman biz de bütünleyeninin koluna indiririz. C'den BA'ya indirilen dikme ayağı D olsun.



O zaman CDA Bir ikizkenar dik üçgen olur. Bundan dolayı $|CD| = |DA| = 8$ br olur. Sonuçta da CDB dik üçgeninin 8-15-17 üçgeni olduğu görülür

Doğru cevap: B.

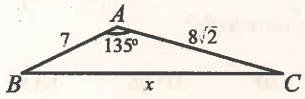
16.



x kaçtır?

$6\sqrt{3}$

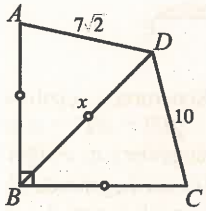
17.



x kaçtır?

17

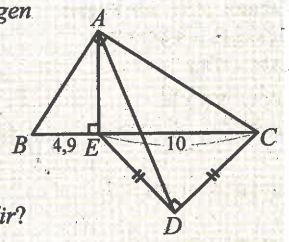
18.



x kaçtır?

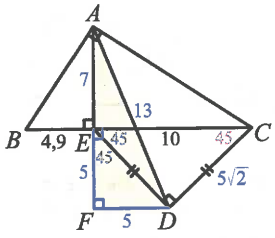
13

Örnek. *ABC ve EDC dik üçgen*
CA ⊥ AB
ED ⊥ DC
AE ⊥ BC
|ED| = |DC|
|BE| = 4,9 br
|EC| = 10 br
olduğuna göre |AD| kaç br dir?



A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

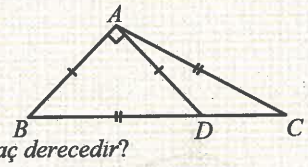
Çözüm: Öklit teoremi hepinizin gözüne batmış olmalı.



$|AE|^2 = (4,9)\cdot 10 = 49$ br^2 olduğundan $|AE| = 7$ br olur. EDC ikizkenar dik üçgen olduğundan $m(CED) = 45°$ ve $|ED| = |DC| = 5\sqrt{2}$ br olur. D'den AE'ye inilen dikme ayağı F olsun. EFD dik üçgeni de ikizkenar olduğundan $|EF| = |FD| = 5$ br dir. Sonuç olarak AFD dik üçgeninin dik kenar uzunlukları 5 br ve 12 br olarak bulunduğundan Pisagor teoremi gereği $|AD| = 13$ br olmalıdır.

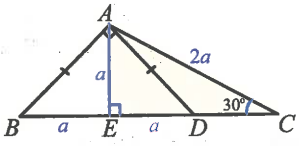
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
BAD ikizkenar dik üçgen
BA ⊥ AD
|BA| = |AD|
|BD| = |AC|
olduğuna göre m(BCA) kaç derecedir?



A) 15 B) 18 C) 30 D) 36 E) 45

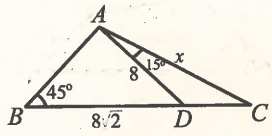
Çözüm: $|BD| = |AC| = 2a$ br olsun.



BAD ikizkenar üçgeninde $[AE]$ kenarortayı çizilirse muhteşem üçlü teoremi gereği $|AE| = |BE| = |ED| = a$ br olur. Aynı zamanda AEB ile AED üçgenlerinin eşliğinden $AE \perp BD$ olur. Bu durumda AEC dik üçgeninde hipotenüs uzunluğunun bir dik kenar uzunluğunun 2 katı olduğu görülürse bunun bir 30°-60°-90° üçgeni olduğu anlaşılır. O halde $m(BCA) = 30°$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

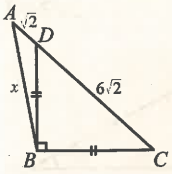
19.



x kaçtır?

$8\sqrt{2}$

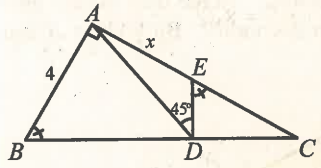
20.



x kaçtır?

$5\sqrt{2}$

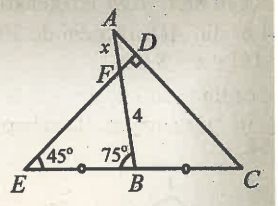
21.



x kaçtır?

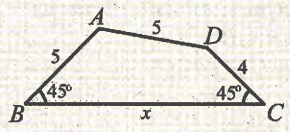
4

22.
ABC bir üçgen
DEC bir dik üçgen
CD ⊥ DE
m(E) = 45°
m(EBA) = 75°
|BF| = 4 br
|FA| = x br
olduğuna göre *x* kaçtır?



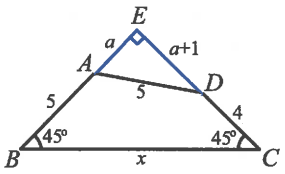
A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{3}-2$ E) $4\sqrt{3}-4$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$m(ABC) = m(BCD) = 45°$
$|BA| = |AD| = 5$ br
$|DC| = 4$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) 9 D) $9\sqrt{2}$ E) 10

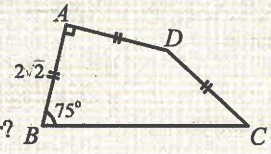
Çözüm: BA ile CD doğrularının kesim noktasına E diyelim. $m(ABC) = m(BCD) = 45°$ eşitliğinden CEB üçgeninin bir ikizkenar dik üçgen olacağını anlarız.



O halde $|AE| = a$ br dersek $|ED| = a + 1$ br olur. DEA dik üçgeninde Pisagor teoreminden $a = 3$ bulunur. Bu durumda CEB ikizkenar dik üçgeninin dik kenar uzunlukları 8 br olarak bulunduğundan $x = 8\sqrt{2}$ olmalıdır.

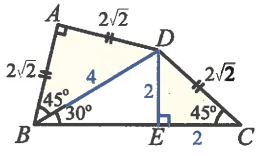
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$BA \perp AD$
$m(ABC) = 75°$
$|BA| = |AD| = |DC| = 2\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|BC|$ *kaç* br *dir?*



A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}+4$
D) $4\sqrt{3}+2$ E) $2\sqrt{3}+2$

Çözüm: BAD üçgeni şöyle bir bakınca ikizkenar dik üçgeni çağrıştırıyor. Bu sebeple derhal $[BD]$'yi çizelim.



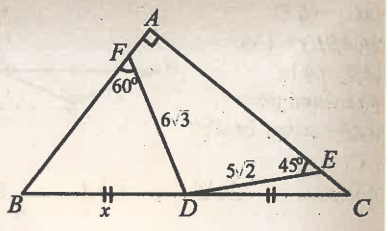
$m(ABD) = 45°$, $m(DBE) = 30°$ ve $|BD| = 4$ br olmalıdır. D'den BC'ye inilen dikme ayağı E olsun. BED dik üçgeni $30°$-$60°$-$90°$ üçgeni olduğundan $|BD| = 4$ br diye $|DE| = 2$ br ve $|BE| = 2\sqrt{3}$ br olur. Şimdi son olarak DEC dik üçgenine odaklanıyoruz. $|DC| = \sqrt{2} \cdot |DE|$ olduğundan bu üçgen de bir ikizkenar dik üçgendir. O halde $|EC| = 2$ br dir. Sonuç olarak

$$|BC| = |BE| + |EC| = 2\sqrt{3} + 2 \text{ br}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

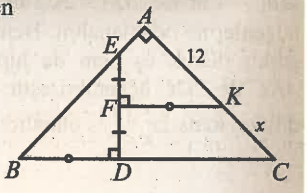
23.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$m(DFB) = 60°$
$m(DEA) = 45°$
$|BE| = 5\sqrt{2}$ br
$|DF| = 6\sqrt{3}$ br
$|BD| = |DC| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

A) 10 **B)** $\sqrt{106}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 11 E) $5\sqrt{5}$

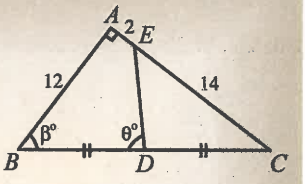
24.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
$CA \perp AB$
$|CA| = |AB|$
$ED \perp BC$
$KF \perp ED$
$|BD| = |FK|$
$|EF| = |FD|$
$|AK| = 12$ br



olduğuna göre $|KC| = x$ kaç br dir?

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) 6 **E)** 8

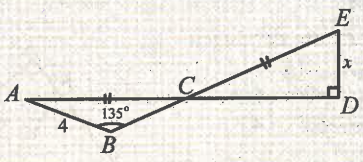
25.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC|$
$|CE| = 14$ br
$|EA| = 2$ br
$|AB| = 12$ br
$m(ABC) = \beta°$
$m(BDE) = \theta°$



olduğuna göre $\beta + \theta$ toplamı kaçtır?

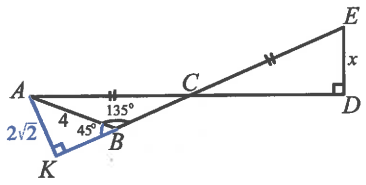
A) 90 B) 105 C) 120 **D)** 135 E) 150

Örnek. $AD \perp DE$
$|AC| = |CE|$
$m(ABE) = 135°$
$|AB| = 4$ br
olduğuna göre
$|ED| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

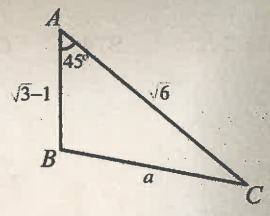
Çözüm: A'dan EB doğrusuna indirilen dikme ayağı K olsun. $m(ABC) = 135°$ olduğundan $m(ABK) = 45°$ olur. Bu yüzden AKB bir ikizkenar dik üçgendir.



$|AB| = 4$ br ise $|AK| = 2\sqrt{2}$ br olur. Şimdi AKC ile EDC üçgenlerine odaklanalım. Hem iç açılarının ölçüleri karşılıklı olarak eş hem de hipotenüsleri eş olduğundan AKC ile EDC üçgenleri eştir. O halde C açılarının gördükleri kenarlar da eş olmalıdır. Yani $|ED| = 2\sqrt{2}$ br dir.

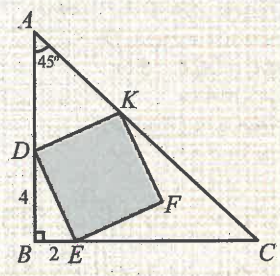
Doğru cevap: D.

26.
ABC bir üçgen
$m(A) = 45°$
$|AB| = \sqrt{3} - 1$ br
$|AC| = \sqrt{6}$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



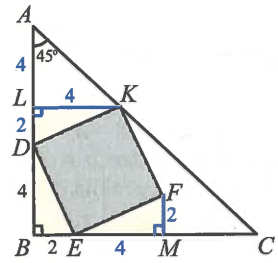
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

Örnek. ABC *bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$m(CAB) = 45°$
$D \in [AB]$
$E \in [BC]$
$DEFK$ *bir kare*
$|DB| = 4$ br
$|BE| = 2$ br
olduğuna göre
$|KC|$ *kaç* br *dir?*



A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

Çözüm: K'den AB'ye inen dikme ayağı L, F'den BC'ye indirilen dikme ayağı da M olsun.



Böyle bir durumda KLD, DBE ve EMF dik üçgenlerinin A.K.A. eşliği gereğince eş olacaklarını fark ediniz. O halde

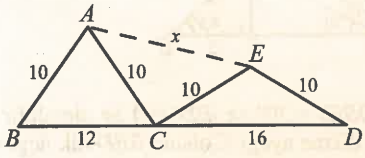
$$|KL| = |DB| = |EM| = 4 \text{ br}$$
$$|LD| = |BE| = |MF| = 2 \text{ br}$$

olacaktır.

ALK bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|LK| = 4$ br diye $|AL| = 4$ br dir. Bu durumda $|AK| = 4\sqrt{2}$ br olur. Diğer yandan $|AB| = 10$ br diye $|AC| = 10\sqrt{2}$ br olacağından $|KC| = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ br olur.

Doğru cevap: C.

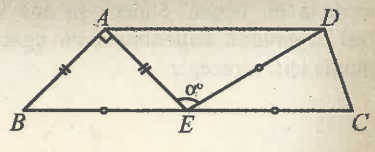
27.



x kaçtır?

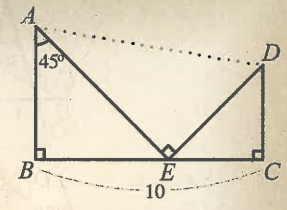
$10\sqrt{2}$

28.
$ABCD$ bir dörtgen
$AD \,//\, BC$
$BA \perp AE$
$|BE| = |EC| = |ED|$
$|BA| = |AE|$
$m(AED) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



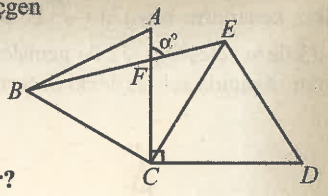
A) 90 **B)** 105 C) 120 D) 135 E) 150

29.
ABE ve ECD birer dik üçgen
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$AE \perp ED$
$m(A) = 45°$
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre $|AD|$ değeri <u>en az</u> kaç br olabilir?



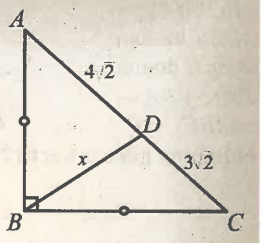
A) 10 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) 13 E) $10\sqrt{2}$

30.
ABC ve ECD eşkenar üçgen
$AC \perp CD$
$|AC| = |CD|$
$[AC] \cap [BE] = \{F\}$
$m(AFE) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



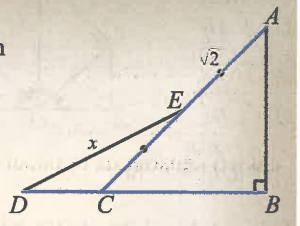
A) 45 B) 60 C) 70 **D)** 75 E) 80

31.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |BC|$
$|AD| = 4\sqrt{2}$ br
$|DC| = 3\sqrt{2}$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



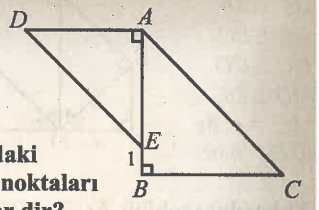
A) 5 B) $2\sqrt{7}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) 7

32.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
$AB \perp BC$
D, C, B doğrudaş
$|AE| = |EC| = \sqrt{2}$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x^2 kaçtır?



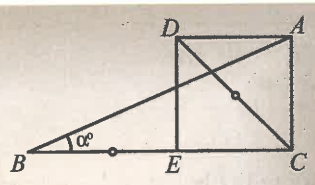
A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ **D)** $10-4\sqrt{2}$ E) $8-4\sqrt{2}$

33.
ABC ve EAD birer ikizkenar dik üçgen
$AB \perp BC$
$EA \perp AD$
$|EB| = 1$ br
C ile D noktaları arasındaki uzaklık 17 br ise D ile B noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



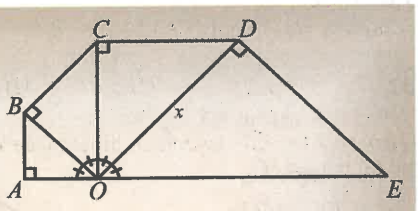
A) $\sqrt{111}$ B) $\sqrt{112}$ **C)** $\sqrt{113}$ D) $\sqrt{114}$ E) $\sqrt{115}$

34.
ABC bir üçgen
$ADEC$ bir kare
B, E, C doğrudaş
$|BE| = |DC|$
$m(ABC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 10 B) 15 C) 22,5 D) 30 E) 37,5

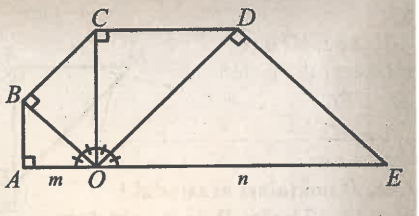
35.
$O \in [AE]$
$OA \perp AB$
$OB \perp BC$
$OC \perp CD$
$OD \perp DE$
$|OD| = x$ br
$|AO| \cdot |OE| = 32$ br^2



Yukarıdaki şekilde *EOD*, *DOC*, *COB* ve *BOA* açıları eş olduğuna göre x kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

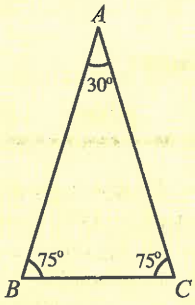
36.
$O \in [AE]$
$OA \perp AB$
$OB \perp BC$
$OC \perp CD$
$OD \perp DE$
$|AO| = m$ br
$|OE| = n$ br



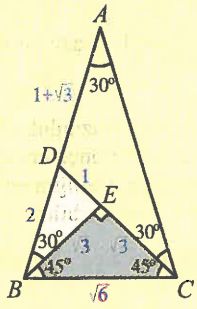
Yukarıdaki şekilde *EOD*, *DOC*, *COB* ve *BOA* açıları eş olduğuna göre m/n oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{8}$

30°-75°-75° Üçgeni. Ezbere bilmek zorunda olmadığınız gereksiz bir üçgen. Sadece şu ana kadar gördüğümüz özel üçgenlerin kullanımına bir egzersiz olarak gördüğümüz için vereceğiz.



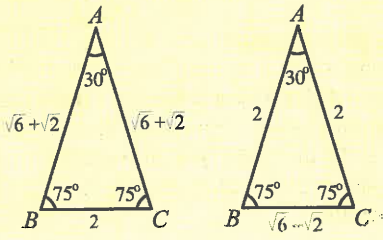
$[AB]$ üzerinde, CAD üçgeni ikizkenar olacak biçimde bir D noktası alıp $[CD]$'yi çizelim. B'den CD'ye indirilen dikme ayağı da E olsun.



BED'nin 30°-60°-90°, BEC'nin de ikizkenar dik üçgen olduğunu görelim. Kenar uzunlukları arasındaki oranı görebilmek için gözümüze en küçük görünen doğru parçasının boyuna yani $|DE|$'ye 1 br diyelim. Şu durumda

$$|DB| = 2 \text{ br}$$
$$|BE| = |EC| = \sqrt{3} \text{ br}$$
$$|BC| = \sqrt{6} \text{ br}$$

olur. Bu da demek oluyor ki tabanın boyu $\sqrt{6}$ br iken ikiz kenarların boyu $3+\sqrt{3}$ br oluyormuş. Bu değerleri $\sqrt{3}$ ile sadeleştirip $\sqrt{2}$ ile genişletirsek daha akılda kalıcı olur. Aşağıda sol şekildeki değerler çıkar.



İsteyen tüm kenar uzunluklarını, yan kenar uzunluklarının eşleniğiyle genişletip 2'ye bölerek sağdaki değerleri de aklında tutabilir.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

15° -75° -90° Üçgeni

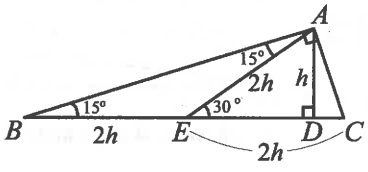
30°-60°-90° ve 45°-45°-90° üçgeninden sonra geldik başka bir özel dik üçgene. 15°-75°-90° üçgenine. Geometride çok kritik bir öneme sahip bu üçgenin tüm özelliklerini ezbere bilmeniz bundan sonra tüm işlerinizi kolaylaştıracaktır. Bilhassa trigonometri dersinde de çok fazla faydasını göreceksiniz, garantisi benim. ☺

15°-75°-90° üçgeni. İç açılarından birinin ölçüsü 15° olan dik üçgene denir.

Birazdan bu üçgenin kenar uzunlukları arasındaki oranları öğreneceğiz ama ondan önce ondan daha meşhur bir özelliğini vereceğiz. Hem özelliğin ne olduğunu hem de neden öyle olduğunu eksiksiz bilmelisiniz. Zira oldukça fazla kullanacağız.

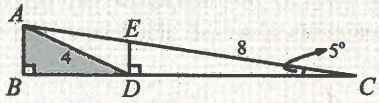
Teorem. *Bir 15°-75°-90° üçgeninde hipotenüsün boyu, hipotenüse inen yüksekliğin boyunun 4 katıdır.*

Kanıt: Üçgenimiz A açısı dik, B açısının ölçüsü de 15° olan ABC üçgeni olsun. A'dan inen yüksekliğe $[AD]$, boyuna da h br diyelim. Amacımız $|BC| = 4h$ br olduğunu göstermek olacak.



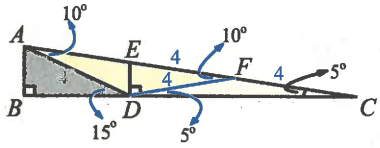
$[BC]$ üzerindeki bir E noktası için $m(BAE) = 15°$ olacak şekilde bir $[AE]$ çizilirse $m(AEC) = 30°$ olacağından AED üçgeni bir 30°-60°-90° üçgeni olur. Bu yüzden $|AE| = |BE| = 2h$ br dir. Diğer yandan $m(EAC) = m(ECA) = 75°$ olduğundan $|EC| = 2h$ br dir. Bu da $|BC| = 4h$ br olduğunun kanıtıdır.

Örnek. *ABC dik üçgen*
$AB \perp BC$
$ED \perp BC$
$m(BCA) = 5°$
$|AD| = 4$ br
$|EC| = 8$ br
olduğuna göre Alan(ABD) *kaç* br^2 *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

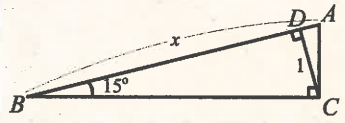
Çözüm: EDC dik üçgeninde hipotenüse kenarortay indirelim.



Muhteşem üçlü teoremi gereği $|DF| = |FE| = |FC| = 4$ br olur. Bu yüzden $m(FDC) = 5°$ ve $m(DFA) = 10°$ olarak bulunur. Diğer yandan ADF üçgeni de ikizkenar olduğundan $m(DAC) = 10°$ ve bundan dolayı $m(ADB) = 15°$ çıkar. ABD bir 15°-75°-90° üçgeni çıktığından hipotenüsüne inilen dikmenin boyu hipotenüsün dörtte biri kadar yani 1 br olmalıdır. Öyleyse alanı da $4 \cdot 1/2 = 2$ br^2 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

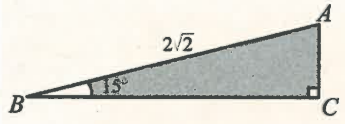
1.



x kaçtır?

4

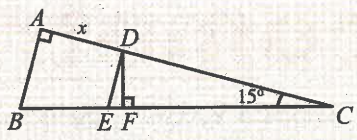
2.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

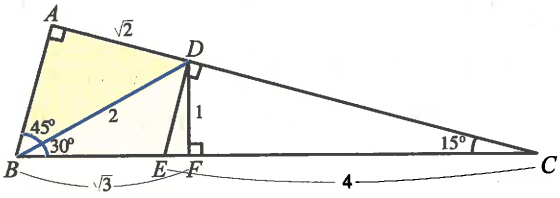
1

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$, $DF \perp BC$
$DE \,//\, AB$
$m(C) = 15°$
$|BF| = \sqrt{3}$ br
$|EC| = 4$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



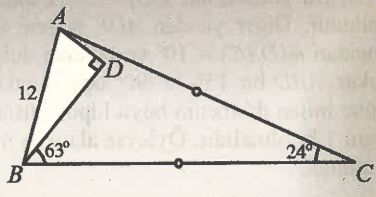
A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 2

Çözüm: $DE \,//\, AB$ verildiğinden CDE açısı da diktir. O halde CDE bir 15°-75°-90° üçgenidir. Bu üçgenin bilinen en temel özelliği hipotenüse indirilen dikmenin boyu hipotenüsün dörtte biri olduğundan $|DF| = 1$ br dir.



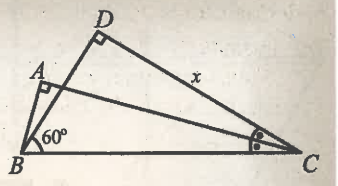
Diğer yandan, $|BF| = \sqrt{3}$ br verildiğinden BFD üçgeni 30°-60°-90° üçgenidir. O halde $|BD| = 2$ br dir. ABD ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AD| = \sqrt{2}$ br olarak bulunur.
Doğru cevap: D.

3.
ABC bir üçgen
$|CA| = |CB|$
$BD \perp DA$
$m(DBC) = 63°$
$m(C) = 24°$
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre
***ADB* üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?**



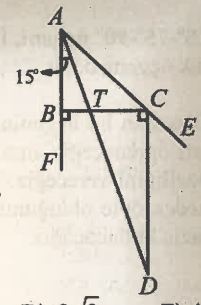
A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

4.
$BA \perp AC$
$BD \perp DC$
$m(DBC) = 60°$
$m(DCA) = m(ACB)$
Alan$(ABC) = 32$ br²
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



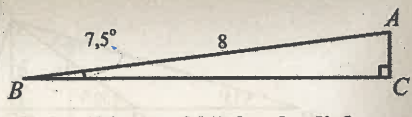
A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 6 D) 8 E) $8\sqrt{3}$

5.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
$AF \perp BC$
$BC \perp CD$
$AD \cap BC = \{T\}$
$m(FAD) = 15°$
olduğuna göre $\frac{|DT|}{|AB|}$ oranı kaçtır?



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 4

6.
ABC bir üçgen
$m(BCA) = 7{,}5°$
$BC \perp CA$
$|AB| = 8$ br
olduğuna göre *C*'nin *AB*'ye uzaklığı kaç br dir?

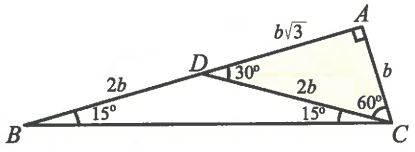


A) $2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

15°-75°-90° Üçgeninde Dik Kenar Uzunluklarının Birbirlerine Oranı. Nasıl ki 30°-60°-90° üçgeninin kenarları arasında $1-\sqrt{3}-2$ diye bir orantı mevcut, şimdiyse 15°-75°-90° üçgeninin kenarları arasında bulunan orantıyı bulacağız. Önce, dik kenarlar arasındaki oranı öğreneceğiz.

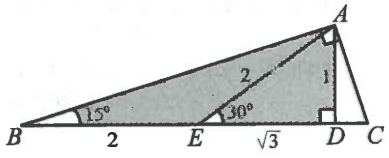
Teorem. *Bir 15°-75°-90° üçgeninde uzun dik kenarın boyu, kısa dik kenarın boyunun $2+\sqrt{3}$ katıdır.*

Kanıt: Üçgenimiz yine A açısı dik, B açısının ölçüsü de 15° olan ABC üçgeni olsun.

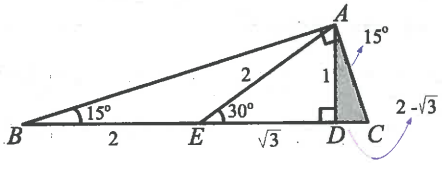


BCA açısını 15° ve 60° olarak bölecek şekilde bir CD doğrusu çizilirse BDC ikizkenar olup, DCA üçgeni de 30°-60°-90° üçgeni olur. $|AC| = b$ br dersek, $|AD| = b\sqrt{3}$ br ve $|DC| = |DB| = 2b$ br olur. Böylelikle uzun dik kenarın boyunun kısa dik kenarın boyunun $2+\sqrt{3}$ katı olduğu kanıtlanmış olur.

Aslında bir önceki teoreme verdiğimiz kanıttaki şekil de bunu kanıtlamaya müsaitti. Taranmış ABD üçgenine odaklanmak yeterdi!



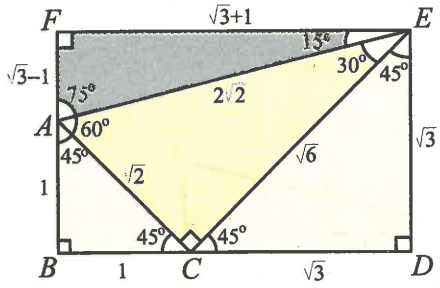
Sonuç. *Eğer 15°-75°-90° üçgeninde uzun dik kenarın boyu kısa dik kenarın boyunun $2+\sqrt{3}$ katıysa, kısa dik kenarın boyu da uzun dik kenarın boyunun $2-\sqrt{3}$ katıdır.*



Aynı şekilde ADC üçgeni de bunu bize söylerdi.

Şu ana kadar 15°-75°-90° üçgeninde dik kenarların birbirine oranını ve hipotenüsün hipotenüse inen yüksekliğe oranını öğrenmiş bulunuyoruz. Ama hala üç kenarın arasındaki orantıyı bulmuş değiliz. Evet, Pisagor teoremiyle bulmak mümkün ama bir Yunan matematikçi olan Ailles'in bulduğu geometrik metodu hiçbir şeye değişmem. Verelim:

Ailles Dikdörtgeni. İkiz kenarları 1 br olan ABC ikizkenar dik üçgeniyle ikiz kenarları $\sqrt{3}$ br olan EDC ikizkenar dik üçgeni alt şekildeki gibi C köşelerinden birbirlerine yapıştırılırlarsa,



ortada hipotenüsü $2\sqrt{2}$ birim olan bir 30°-60°-90° üçgeni oluşur. Dik yamuğu dikdörtgene tamamlayan üçgene de bakılırsa bir 15°-75°-90° üçgeni olduğu görülür. Kenarları arasında sırasıyla

$$(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):(2\sqrt{2})$$

yani

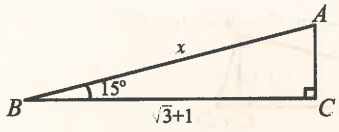
$$(\sqrt{6}-\sqrt{2}):(\sqrt{6}+\sqrt{2}):(4)$$

orantısı mevcuttur.

Sonuç 1. *Hipotenüsü $4a$ br olan bir 15°-75°-90° üçgeninin çevresi $(2\sqrt{6}+4)a$ br dir.*

Sonuç 2. *Hipotenüsü $4a$ br olan bir 15°-75°-90° üçgeninin alanı $2a^2$ br^2 dir.*

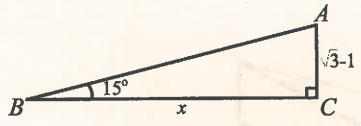
7.



x kaçtır?

$2\sqrt{2}$

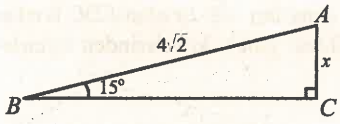
8.



x kaçtır?

$\sqrt{3}+1$

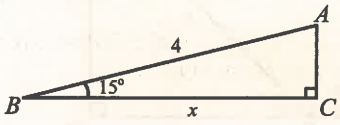
9.



x kaçtır?

$2\sqrt{3}-2$

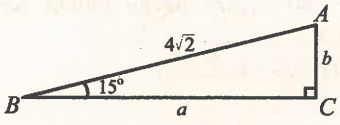
10.



x kaçtır?

$\sqrt{6}+\sqrt{2}$

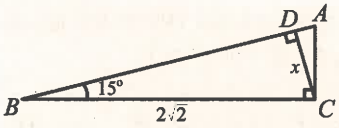
11.



$a + b$ kaçtır?

$4\sqrt{3}$

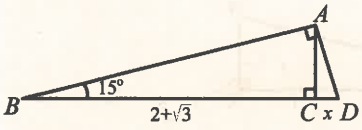
12.



x kaçtır?

$\sqrt{3}-1$

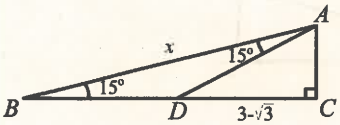
13.



x kaçtır?

$2-\sqrt{3}$

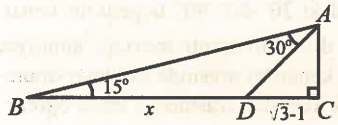
14.



x kaçtır?

$2\sqrt{2}$

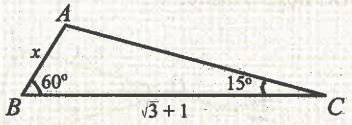
15.



x kaçtır?

2

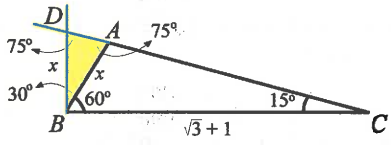
Örnek. *ABC üçgeninin B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla* $60°$ *ve* $15°$ *dir.*



$|BC| = \sqrt{3}+1$ br *olduğuna göre* $|AB| = x$ *kaç* br *dir?*

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 2

Çözüm: B'den BC'ye çıkılan dikme CA'yı D'de kessin.

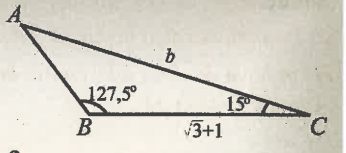


DBA üçgeni; D ve A açılarının ölçüleri $75°$ olacağından, ikizkenardır. Diğer yandan CDB üçgeni $15°$-$75°$-$90°$ üçgeni olduğundan $|DB| = \sqrt{3}-1$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

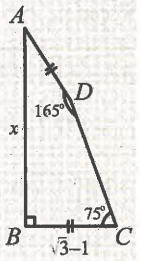
16.

ABC bir üçgen
$m(B) = 127{,}5°$
$m(C) = 15°$
$|BC| = \sqrt{3}+1$ br
$|CA| = b$ br
olduğuna göre b kaçtır?



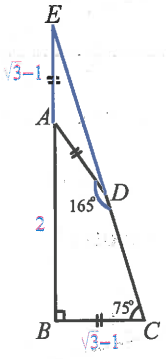
A) $2\sqrt{3}+2$ B) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}+1+2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AB \perp BC$
$m(BCD) = 75°$
$m(CDA) = 165°$
$|BC| = |AD| = \sqrt{3}-1$ br
olduğuna göre
$|AB| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: BA ile CD doğrularının kesim noktasına E diyelim. Kolayca görüleceği üzere EBC bir 15°-75°-90° üçgeni olur.



Hem CEB hem de ADE açılarının ölçüleri 15° olduğundan EAD bir ikizkenar üçgen olup

$$|EA| = |AD| = \sqrt{3}-1 \text{ br}$$

olur. Diğer yandan EBC dik üçgeninde 15° lik açının gördüğü kenar uzunluğu yani $|BC| = \sqrt{3}-1$ br olduğundan 75° lik açının gördüğü kenarın uzunluğu yani

$$|EB| = \sqrt{3}+1 \text{ br}$$

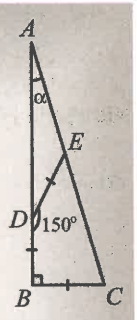
olmalıdır. O halde

$$|AB| = |EB| - |EA| = \sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1) = 2 \text{ br}$$

olmalıdır.

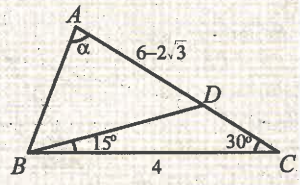
Doğru cevap: B.

17.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|CB| = |BD| = |DE|$
$m(EDB) = 150°$
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$ kaç derecedir?



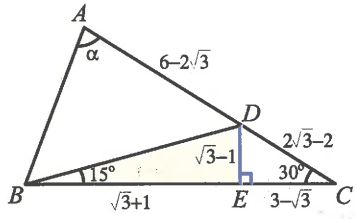
A) 10 **B)** 15 C) 18
D) 22,5 E) 30

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|BC| = 4$ br
$|AD| = 6-2\sqrt{3}$ br
$m(DBC) = 15°$
$m(BCA) = 30°$
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$ *kaç derecedir?*



A) 45 B) 60 C) 67,5 D) 75 E) 90

Çözüm: D'den BC'ye inilen dikme ayağı E olsun. DEB ve DEC üçgenleri birer özel üçgen olurlar.



$$|DE| = (\sqrt{3}-1)a \text{ br dersek}$$

$$|BE| = (\sqrt{3}+1)a \text{ br}$$

ve

$$|EC| = (3-\sqrt{3})a \text{ br}$$

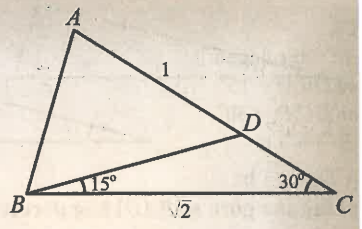
olarak bulunur. $|BC| = 4$ br verildiğinden

$$(\sqrt{3}+1)a + (3-\sqrt{3})a = 4$$

eşitliğinden $a = 1$ bulunur. Bu durumda $|DC| = 2\sqrt{3}-2$ br olur. Şimdi $|AD|$ ile $|DC|$ toplanırsa $|AC| = 4$ br bulunur ki aynı zamanda $|BC| = 4$ br olduğundan BCA üçgeninin ikizkenar olduğu anlaşılır. $m(BCA) = 30°$ olduğundan $m(CAB) = 75°$ olmalıdır.

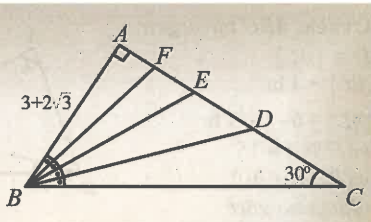
Doğru cevap: D.

18.
ABC bir üçgen
$m(BCA) = 30°$
$m(DBC) = 15°$
$|AD| = 1$ br
$|BC| = \sqrt{2}$ br
olduğuna göre
$m(ABD)$ kaç derecedir?



A) 45 B) 52,5 C) 60 **D)** 67,5 E) 75

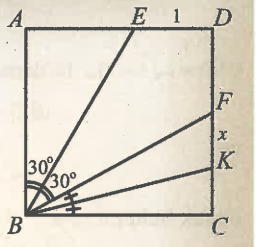
19.
ABC bir dik üçgen
ABF, FBE, EBD, DBC açıları eş
$BA \perp AC$
$m(BCA) = 30°$
$|AB| = 3+2\sqrt{3}$ br



olduğuna göre $|DE| - |FA|$ farkı kaç br dir?

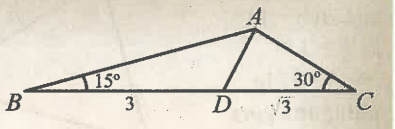
A) 0 **B)** 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

20.
$ABCD$ bir kare
$m(ABE) = m(EBF) = 30°$
$m(FBK) = m(KBC)$
$|ED| = 1$ br
$|FK| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{2}-1$

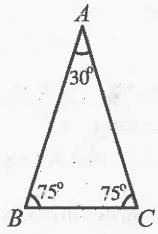
21.
ABC bir üçgen
$m(DBA) = 15°$
$m(DCA) = 30°$
$|BD| = 3$ br
$|CD| = \sqrt{3}$ br



olduğuna göre $m(BAD)$ kaç derecedir?

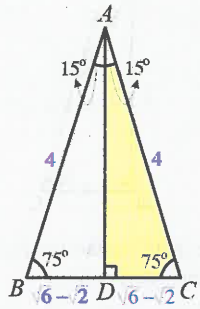
A) 15 B) 30 **C)** 45 D) 60 E) 75

Yeniden 30°-30°-75° Üçgeni. Bu sefer de 15°-75°-90° üçgeninin özelliklerini kullanarak bu üçgenin kenarları arasında oranı bulmaya çalışacağız.



Göstereceğimiz iki farklı yolun birincisi şu:

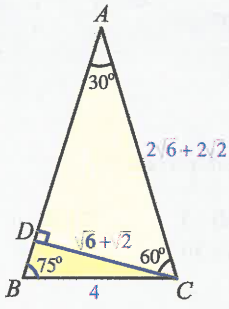
Üçgenimiz ikizkenar olduğundan hemen tepeden tabana dik indirerek üçgeni iki eş dik üçgene ayıralım.



Görülüyor ki bu dik üçgenler birer 15°-75°-90° üçgeni. Daha önce çıkarmış olduğumuz değerleri şekle yerleştirirsek, sonuca ulaşmış olacağız.

İkinci yol olarak da şunu önerebiliriz:

C'den AB'ye indirilen dikme ayağı D olsun.



CDB bir 15°-75°-90° üçgeni, AD ise bir 30°-60°-90° üçgeni olur. Herhangi bir kenar uzunluğuna herhangi bir değer vererek diğer tüm kenar uzunluklarını bulabilirsiniz.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

22,5°-67,5° -90° Üçgeni

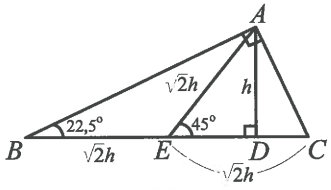
Geldik açılarına göre özel olan son dik üçgene... Sanmayın ki bu üçgenler topu topu 5 tane ama ortaöğretim seviyesinde ancak bunlarla yetineceğiz.

22,5°-67,5°-90° üçgeni. İç açılarından birinin ölçüsü 22,5° olan dik üçgene denir.

Birazdan bu üçgenin dik kenarlarının birbirlerine oranını öğreneceğiz ama aynı 15°-75°-90° üçgeninde olduğu gibi bu üçgende de hipotenüse inen dikmenin hipotenüsün kaçta kaçı olduğunu bilmemiz gerekiyor. Önce onu öğrenelim.

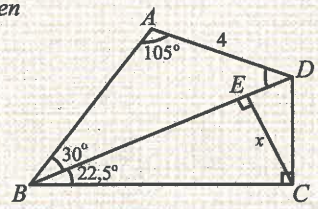
Teorem. *Bir 22,5°-67,5°-90° üçgeninde hipotenüsün boyu, hipotenüse inen yüksekliğin boyunun $2\sqrt{2}$ katıdır.*

Kanıt: Üçgenimiz A açısı dik, B açısının ölçüsü de 22,5° olan ABC dik üçgeni olsun.



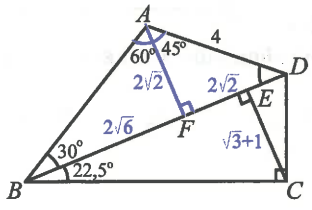
Hipotenüse inen $[AD]$ yüksekliğini çizelim. Ardından $[AE]$ kenarortayı çizilirse; muhteşem üçlü gereği AEB ikizkenar üçgen olduğundan ADE de ikizkenar dik üçgen olur. $|AD| = h$ br dersek $|AE| = h\sqrt{2}$ br olur. O halde $|BC| = 2\cdot|BE| = 2\sqrt{2}h$ 'dir. Böylelikle kanıt tamamlanır.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$CE \perp BD$
$m(DAB) = 105°$
$m(ABD) = 30°$
$m(DBC) = 22,5°$
$|AD| = 4$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}+1$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $2\sqrt{3}$

Çözüm: A'dan BD'ye inilen dikme ayağı F olsun.



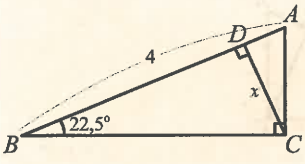
AFD bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AD| = 4$ br diye $|AF| = |FD| = 2\sqrt{2}$ br olur. Diğer yandan ABF bir 30°-60°-90° üçgeni diye $|BF| = 2\sqrt{6}$ br olur. Artık BCD dik üçgeninin hipotenüs uzunluğunu biliyoruz diye çözümün sonu geldi demektir.

$$|EC| = \frac{|BD|}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}+1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

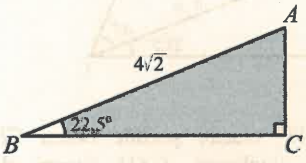
1.



x kaçtır?

$\sqrt{2}$

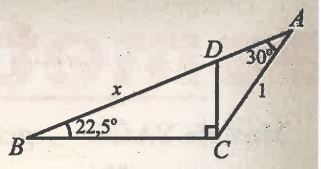
2.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

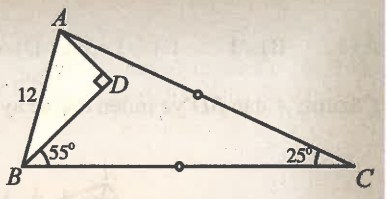
$4\sqrt{2}$

3.
ABC bir üçgen
$BC \perp CD$
$m(A) = 30°$
$m(B) = 22,5°$
$|AC| = 1$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}-1$ E) 3

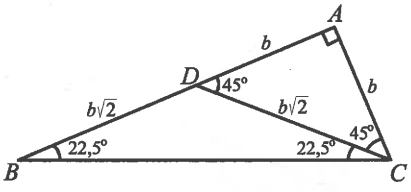
4.
ABC bir üçgen
$|CA| = |CB|$
$BD \perp DA$
$m(DBC) = 55°$
$m(C) = 25°$
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre
***ADB* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?**



A) 12 B) 18 C) $18\sqrt{2}$ D) 36 E) $36\sqrt{2}$

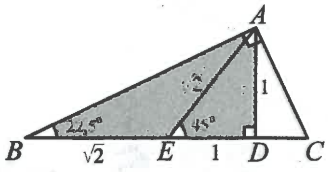
Teorem. *Bir 22,5°-67,5°-90° üçgeninde uzun dik kenarın boyu kısa dik kenarın boyunun $\sqrt{2}+1$ katıdır.*

Kanıt: Üçgenimiz yine A açısı dik, B açısının ölçüsü de 22,5° olan ABC dik üçgeni olsun.



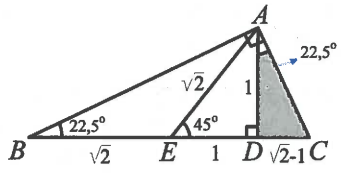
BCA açısını 22,5° ve 45° olacak şekilde bölen CD doğrusu çizilirse; BDC ikizkenar, CAD üçgeni de ikizkenar dik üçgen olur. Gerekli uzunluklar üst şekildeki gibi yazılırsa uzun dik kenarın boyunun kısa dik kenarın boyunun $\sqrt{2}+1$ katı olduğu kanıtlanır.

Aslında bir önceki teoreme verdiğimiz kanıttaki şekil de bunu kanıtlamaya müsaitti.



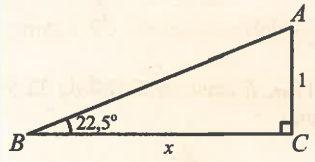
Taranmış ABD dik üçgenine odaklanmak yeterdi!

Sonuç. *Eğer 22,5°-67,5°-90° üçgeninde uzun dik kenarın boyu kısa dik kenarın boyunun $\sqrt{2}+1$ katıysa, kısa dik kenarın boyu da uzun dik kenarın boyunun $\sqrt{2}-1$ katıdır.*



Bunu üst şeklideki ADC dik üçgeninden de görebilirsiniz.

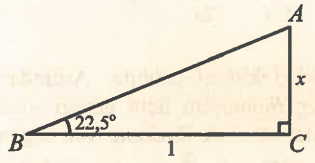
5.



x kaçtır?

$\sqrt{2}+1$

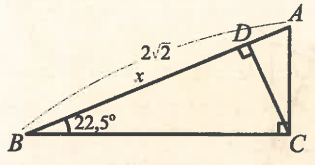
6.



x kaçtır?

$\sqrt{2}-1$

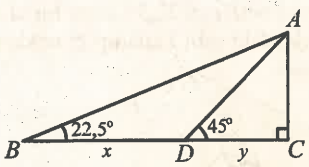
7.



x kaçtır?

$\sqrt{2}+1$

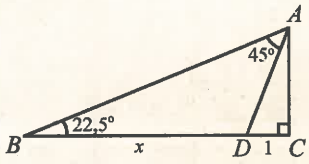
8.



x / y oranı kaçtır?

$\sqrt{2}$

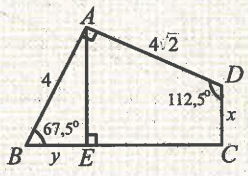
9.



x kaçtır?

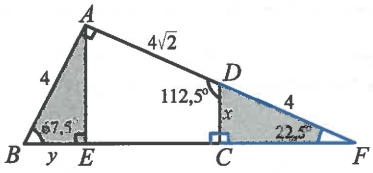
$2\sqrt{2}+2$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$
$AE \perp BC$
$m(ABC) = 67,5°$
$m(CDA) = 112,5°$
$|AB| = 4$ br
$|AD| = 4\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|DC| - |BE| = x - y$ *farkı kaçtır?*



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

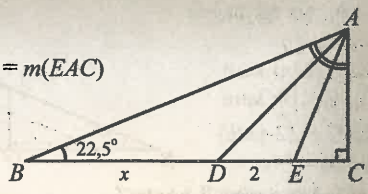
Çözüm: Önce DCB açısının dik olduğunu fark edelim. AD ile BC'nin kesim noktasına F diyelim.



ABF dik üçgeninde uzun dik kenarın boyu kısa dik kenarın boyunun $\sqrt{2}+1$ katı olması gerektiğinden $|DF| = 4$ br bulunur. Şimdi AEB ile FCD dik üçgenlerine bakılırsa ikisinin de üçer iç açısı eş iken hipotenüsleri de eş olduğundan bu üçgenler eştir. O halde $x = y$ olması gerektiğinden $x - y = 0$ bulunur.

Doğru cevap: A.

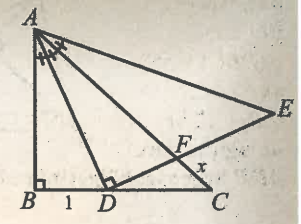
10.
ABC bir üçgen
$BC \perp CA$
$m(BAD) = m(DAE) = m(EAC)$
$m(B) = 22,5°$
$|DE| = 2$ br
$|BD| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

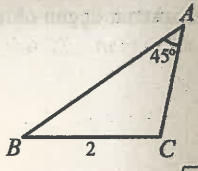
A) $2+\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}+2$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

11.
ABC ve ADE birer üçgen
BAD, DAC, CAE açıları eş
$AB \perp BC$ ve $AD \perp DE$
$|AB| = |BC|$
$|BD| = 1$ br
$|FC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



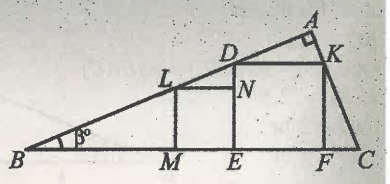
A) $2-\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}-2$ C) $\sqrt{2}-1$ D) 1 E) $\sqrt{2}$

12.
ABC bir üçgen
$|BC| = 2$ br
$m(A) = 45°$
olduğuna göre A'nın B'ye uzaklığı en fazla kaç br olabilir?



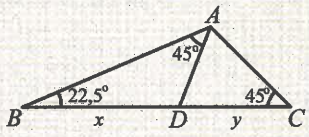
A) 2 B) $1+\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $2+\sqrt{2}$

13.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$DEFK$ bir kare
$LMEN$ bir kare
$|EF| = \sqrt{2} \cdot |ME|$
$m(B) = \beta°$
olduğuna göre β kaçtır?



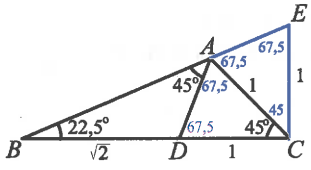
A) 15 B) 18 C) 22,5 D) 30 E) 36

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(B) = 22,5°$
$m(C) = m(DAB) = 45°$
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

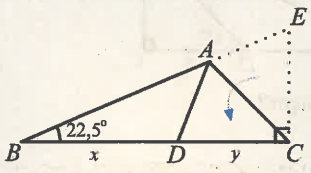
Çözüm: Eksik yerlere açı ölçülerini yazarsak DCA'nın ikizkenar üçgen olduğu görülür.



Şimdi DAC üçgenini $[AC]$ üzerine katlayalım. Yukardaki şekilden de görüleceği üzere BCE bir 22,5°-67,5°-90° üçgeni olur. $|CE| = 1$ br dersek, $|CA| = |CD| = 1$ br olur. Diğer yandan $|BC| = \sqrt{2}+1$ br olmalı diye $|BD| = \sqrt{2}$ br olur. Buradan da sorulan oran $\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

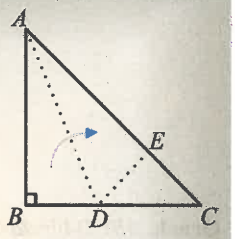
14.
EBC üçgeni C açısı dik ve $m(B) = 22,5°$ olan bir dik üçgendir. Bu üçgen alt şekildeki gibi katlanıp E noktası D'nin konumuna getiriliyor.



$|BD| = x$ br ve $|DC| = y$ br olduğuna göre x, y'nin kaç katıdır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

15.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
$D \in [BC]$
ABD dik üçgeni AD boyunca katlanarak, B noktasının E konumuna gelmesi sağlanıyor.
Buna göre $\frac{|AE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $1+\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{2}$

16.



ABC üçgeninde $m(A) = 157,5°$ ve $|AB| = |AC| = 2$ br' dir.
$|ABC| = S$ br^2 olduğuna göre S^2 kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2-\sqrt{2}$ D) $3-2\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{2}$

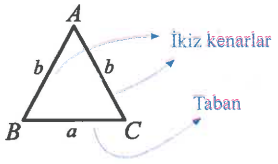
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

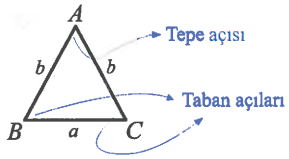
İkizkenar Üçgen

Bu dersimizde halihazırda ne olduğunu bildiğimiz ikizkenar üçgenin bilmediğimiz diğer özelliklerini öğreneceğiz. Önce üçgenimizi tekrar tanımlayalım, sonra devam ederiz.

İkizkenar üçgen. İki kenar uzunluğu birbirine eşit olan üçgenlere **ikizkenar üçgen** denir.

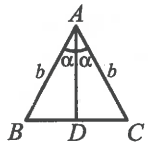


Boyları birbirlerine eşit olan bu kenarlara **ikiz kenarlar**, boyu farklı olan kenara da **taban** denir.



İkizkenar üçgenlerde ikiz kenarları gören açılara **taban açıları**, ölçüsü farklı olan açıya da **tepe açısı** denir.

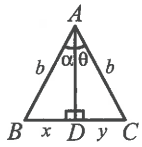
İkizkenar üçgenlerin en önemli özelliği, *taban açılarının eş olmasıdır*. Daha önce izah ettiğimiz bu durumu tekrar edip konumuza girelim.



Tepesi A olan bir ABC ikizkenar üçgeni çizip A'ya ait iç açıortayını çizelim. BAD ve CAD üçgenlerine dikkat edildiğinde, bu üçgenlerin karşılıklı iki kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açıların ölçüleri birbirlerine eşit olduğundan K-A-K gereğince eştirler. Bu eşlik sayesinde $m(B) = m(C)$ olmalıdır.

İkizkenar bir üçgende tepeye ait yardımcı elemanlar çakışıktır.

Tepeden İnen Yükseklik, Hem Kenarortaydır Hem Açıortaydır. Tepesi A olan bir ABC ikizkenar üçgeni çizip $[AD]$ yüksekliğini çizelim.



$m(BAD) = \alpha$, $m(CAD) = \theta$, $|BD| = x$ br ve $|DC| = y$ br diyelim. $x = y$ ve $\alpha = \theta$ olduğunu göstereceğiz.

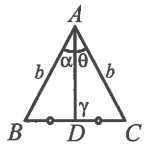
$|AD| = h$ br olsun. ADB ve ADC üçgenleri birer dik üçgen olduklarından Pisagor teoremi gereği

$$x^2 + h^2 = b^2$$
$$y^2 + h^2 = b^2$$

yazabiliriz. Bu da $x = y$ olduğunun kanıtıdır.

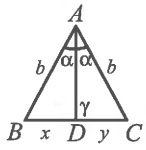
Diğer yandan, taban açılar eş olduğundan, taban açılarının ölçülerine β dersek, hem BAD hem de CAD açılarının ölçüsü $90° - \beta$ olarak bulunur. O halde $\alpha = \theta$ olduğu da kanıtlanmıştır.

Tepeden İnen Kenarortay, Hem Açıortaydır Hem Yüksekliktir. Tepesi A olan bir ABC ikizkenar üçgeni çizip $[AD]$ kenarortayını çizelim.



$\alpha = \theta$ ve $\gamma = 90°$ olduğunu göstereceğiz. ADB ile ADC üçgenlerinin üç kenar uzunluğu da birbirlerinin aynısı olduğundan bu üçgenler K-K-K gereğince eştirler. Bu eşlik $\alpha = \theta$ olmasını sağlar. Diğer yandan aynı eşlik ADB ile ADC açılarını da eş kıldığından $2\gamma = 180°$ eşitliğinden $\gamma = 90°$ bulunur.

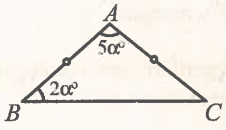
Tepeden İnen Açıortay, Hem Kenarortaydır Hem Yükseklikliktir. Tepesi A olan bir ABC ikizkenar üçgeni çizip $[AD]$ iç açıortayını çizelim.



$x = y$ ve $\gamma = 90°$ olduğunu göstereceğiz. BAD ve CAD üçgenlerine dikkat edildiğinde, bu üçgenlerin karşılıklı iki kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açıların ölçüleri de birbirlerine eşit olduğundan K-A-K gereğince eştirler. Bu eşlik sayesinde $x = y$ kanıtlanır. Diğer yandan aynı eşlik ADB ile ADC açılarını da eş kıldığından $2\gamma = 180°$ eşitliğinden $\gamma = 90°$ bulunur.

Unutma! Uzun lafın kısası, bir üçgende bir köşeye ait bir yardımcı elemanın başka bir yardımcı elemanla çakışık olduğunu görürsek üçgene ikizkenar diyeceğiz, o köşe de tepesi olacak.

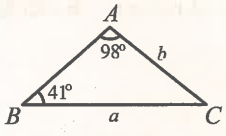
1.



α kaçtır?

20

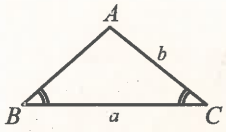
2.



Üçgenin çevresinin a ve b cinsinden değeri nedir?

$a + 2b$

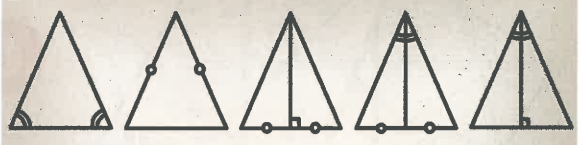
3.



$x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin kökleri a ve b olduğuna göre üçgenin çevresi kaç br dir?

7

4.

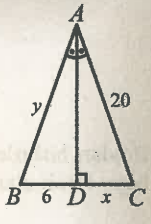


Yukardaki beş üçgenin kaç tanesi ikizkenar üçgendir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 **E)** 5

5.

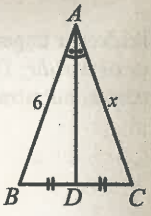
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(CAD)$
$AD \perp BC$
$|AC| = 20$ br
$|BD| = 6$ br
$|CD| = x$ br
$|AB| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?



A) 14 B) 16 C) 20 **D)** 26 E) 28

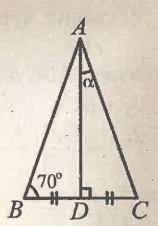
6.

ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(CAD)$
$|BD| = |DC|$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre x için aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?



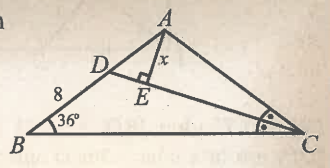
A) $x < 6$ **B)** $x = 6$ C) $x > 6$ D) $x = 3$ E) $x \neq 6$

7.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$m(ABC) = 70°$
olduğuna göre
$m(CAD) = \alpha$ kaç derecedir?



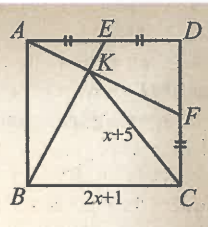
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

8.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(ABC) = 36°$
CD iç açıortay
$AE \perp CD$
$|BD| = 8$ br
olduğuna göre $|AE| = x$ kaç br dir?



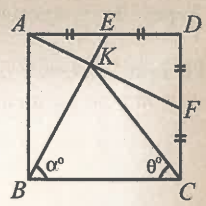
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
$ABCD$ bir kare
$|AE| = |ED| = |FC|$
$[AF] \cap [BE] = \{K\}$
$|CK| = x + 5$ br
$|BC| = 2x + 1$ br
olduğuna göre $|DF|$ kaç br dir?



A) $\frac{9}{2}$ B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

10.
$ABCD$ bir kare
$|AE| = |ED|$
$|CF| = |FD|$
$[AF] \cap [BE] = \{K\}$
$m(EBC) = \alpha°$
$m(BCK) = \theta°$

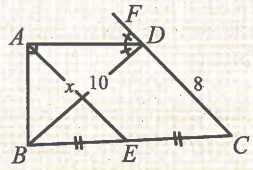


olduğuna göre α ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\alpha + \theta = 90$ **B)** $2\alpha + \theta = 180$ C) $\alpha + 2\theta = 180$
D) $\alpha + \theta = 135$ E) $\alpha = \theta$

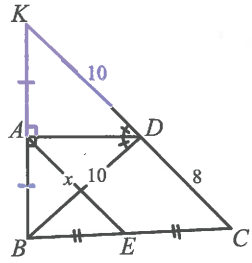
'Yükseklik, açıortaysa üçgen ikizkenardır'a bir örnek:

Örnek. *$ABCD$ bir dörtgen*
$DA \perp AB$
$|BE| = |EC|$
$m(BDA) = m(FDA)$
$|BD| = 10$ br
$|CD| = 8$ br
olduğuna göre
$|AE| = x$ kaç br dir?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Ne zaman orta nokta görürseniz aklınıza ilk olarak orta taban gelsin demiştik.

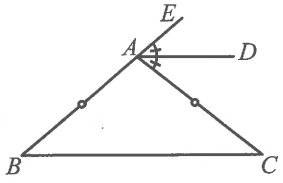


Şekilde orta taban olmaya aday tek doğru parçası $|BE| = |EC|$ olduğundan $[AE]$'dir. Bu amaçla $[CD]$'yi D yönünde uzatalım. CD ile BA'nın kesim noktası K olsun. Şimdi BDK üçgenine odaklanıyoruz. Bu üçgende $[DA]$ hem iç açıortay hem de yükseklik olduğundan BDK ikizkenar üçgendir. O halde $[DA]$ aynı zamanda kenarortaydır. $|BD| = 10$ br olduğundan $|DK| = 10$ br olacağını da not edelim. Sona geldik. $|CK| = 8$ br + 10 br = 18 br olduğundan $|AE| = 9$ br olmalıdır.

Doğru cevap: B.

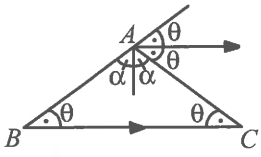
'Tepeye ait iç açıortay yüksekliktir'e bir örnek...

Teorem. *İkizkenar bir üçgende tepe açısına ait dış açıortay tabana paraleldir.*



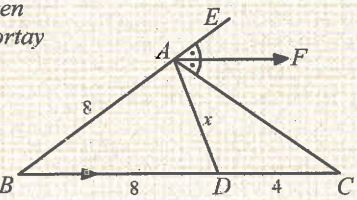
Yani üstteki şekle göre $AD \parallel BC$ olur demek istiyor.

Kanıt: CAB ikizkenar üçgeninin tepe açısının ölçüsü 2α, taban açılarının ölçüleri de θ olsun.



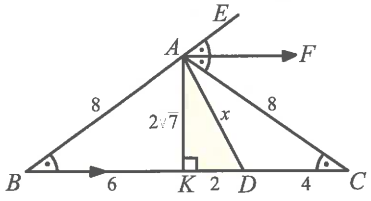
Aynı köşeye ait iç ve dış açıortaylar birbirlerini dik keseceğinden, dış açıortay dış açıyı taban açısına eşit olacak şekilde böler. Yöndeş açılardan paralel olduklarını anlarız.

Örnek. *ABC bir üçgen*
A açısına ait dış açıortay
BC kenarına paralel
$|AB| = 8$ br
$|BD| = 8$ br
$|DC| = 4$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç br dir?*



A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 5 D) $2\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{2}$

Çözüm: Dış açıortayın bir kenara paralel olduğu üçgenlerin ikizkenar olduğunu biraz önce kanıtladık. Bu yüzden hemen $m(FAC) = m(ACB) = m(CBA)$ olduğunu söyleyeceğiz. Gerisi kolay.



A'dan BC'ye inilen dikme ayağı K olsun. $|BK| = |KC|$ olacağını biliyoruz. Buradan $|BK| = 6$ br ve $|KD| = 2$ br çıkar. AKB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

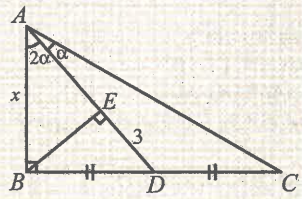
$$|AK| = 2\sqrt{7} \text{ br}$$

bulunur. AKD dik üçgeninde Pisagor teoremini kullanarak çözümü noktalarız. Kullanınca $x = 4\sqrt{2}$ çıkar.

Doğru cevap: E.

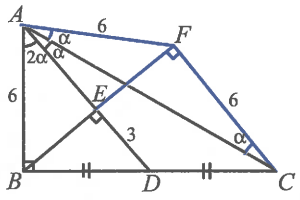
'Yükseklik, kenarortaysa üçgen ikizkenardır'a bir örnek:

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AB \perp BC$
$BE \perp AD$
$|BD| = |CD|$
$m(BAD) = 2\alpha$
$m(DAC) = \alpha$
$|DE| = 3$ br
olduğuna göre
$|AB| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

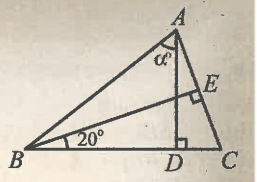
Çözüm: C'den BE'ye indirilen dikme ayağı F olsun.



$DE \parallel CF$ olup $|BD| = |DC|$ olması BCF üçgeninde $[DE]$'nin orta taban olması anlamına gelir. O halde $|DE| = 3$ br olduğundan $|CF| = 6$ br olur. Şimdi A ile F noktalarını birleştirelim. $[ED]$ orta taban olduğundan $|BE| = |EF|$ olduğunu biliyoruz. FAB üçgeninde $[AE]$ hem kenarortay hem de yükseklik olduğundan FAB ikizkenar üçgen olup $[AE]$ aynı zamanda iç açıortaydır. Bu yüzden $m(CAF) = \alpha$ olmalıdır. Diğer yandan $AD \parallel FC$ olduğundan iç ters açıların eşliği gereği ACF açısının ölçüsü de α olur. Sonuç olarak CFA üçgeni de ikizkenar bulunur. O halde $|CF| = |FA| = |AB| = 6$ br olmalıdır.

Doğru cevap: B.

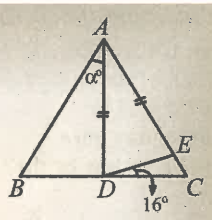
11.
ABC bir üçgen
$|BA| = |BC|$
$BE \perp AC$
$m(CBE) = 20°$
$m(DAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 75 B) 67,5 C) 60 **D) 50** E) 45

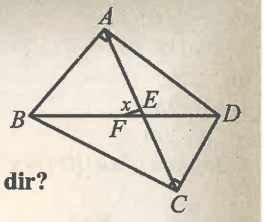
'Tepeden inen kenarortay, yükseklikliktir'e ait üç soru....

12.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$|BD| = |DC|$
$|AD| = |AE|$
$m(EDC) = 16°$
olduğuna göre
$m(DAB) = \alpha$ kaç derecedir?



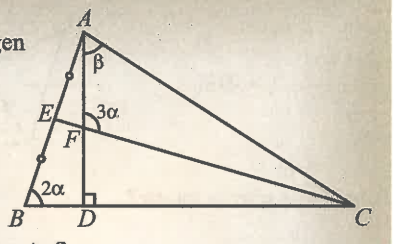
A) 32 B) 30 C) 28 D) 26 E) 16

13.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$
$BC \perp CD$
$|AE| = |EC| = 60$ br
$|BF| = |FD| = 61$ br
olduğuna göre $|EF| = x$ kaç br dir?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

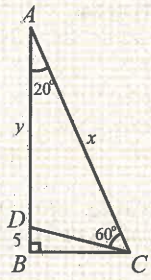
14.
ABC ikizkenar üçgen
$|CA| = |CB|$
$|AE| = |EB|$
$AD \perp BC$
$m(B) = 2\alpha$
$m(AFC) = 3\alpha$
$m(CAD) = \beta$
olduğuna göre β kaçtır?



A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{10}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

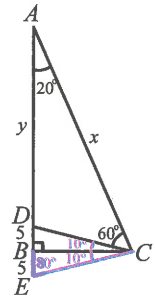
'Tepeden inen açıortay, kenarortaydır'a bir örnek....

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$D \in [BC]$
$m(CAB) = 20°$
$m(ACD) = 60°$
$|BD| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$|AD| = y$ br
olduğuna göre $x - y$ farkı kaçtır?



A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 12,5 E) 15

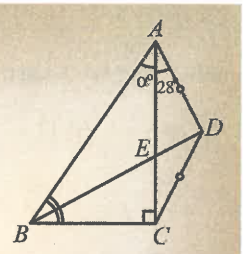
Çözüm: $[AB]$ kenarını B yönünde uzatarak alt şekildeki gibi CAE ikizkenar üçgenini oluşturalım.



Bu üçgenin tepe açısı 20° olduğundan taban açıları 80° olmalıdır. Bu yüzden $m(BCE) = 10°$ ve $m(CEB) = 80°$ dir. Diğer yandan $m(CDB) = 80°$ olduğundan ECD üçgeni de ikizkenardır. Yükseklik olan $[CB]$ aynı zamanda kenarortay olacağından $|DB| = |BE| = 5$ br dir. $|AC| = |AE|$ eşitliğinden $x = y + 10$ bulunur ki bu da $x - y = 10$ demek olur.

Doğru cevap: C.

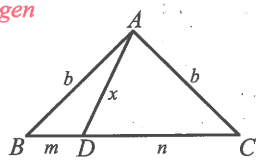
15.
$ABCD$ bir dörtgen
$m(ABD) = m(CBD)$
$BC \perp CA$
$|AD| = |DC|$
$m(DAC) = 28°$
$m(CAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



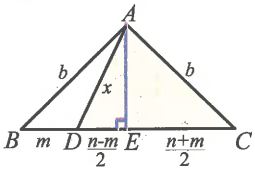
A) 28 B) 30 C) 32 **D) 34** E) 36

'Tepeden inen yükseklik, kenarortaydır'a ait örnekler...

Teorem. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC| = b$ br
$|BD| = m$ br
$|DC| = n$ br
$|AD| = x$ br
ise $x^2 = b^2 - mn$.



Kanıt: ABC ikizkenar üçgen olduğundan A'dan inen yükseklik $[BC]$'yi ortalayacaktır.



ADE üçgeninde yükseklik teoremi yazılırsa

$$x^2 - b^2 = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+m}{2}\right)^2$$

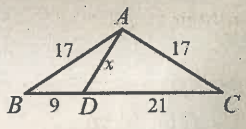
$$= \frac{n^2 - 2mn + m^2}{4} - \frac{n^2 + 2mn + m^2}{4}$$

$$= \frac{-4mn}{4} = -mn$$

eşitliğinden $x^2 = b^2 - mn$ olduğu görülür.

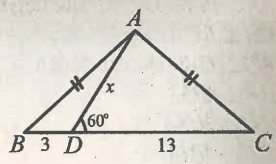
Bu teoremi ilerde Stewart Teoremi başlıklı yazımızda tekrar ele alıp detaylı olarak işleyeceğiz.

16.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC| = 17$ br
$|BD| = 9$ br
$|DC| = 21$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



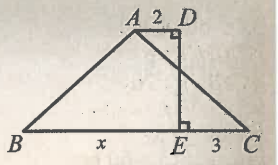
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

17.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(ADC) = 60°$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 13$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç br dir?



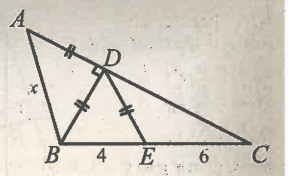
A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) 10 D) $10\sqrt{3}$ E) 13

18.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$AD \perp DE$
$DE \perp BC$
$|AD| = 2$ br
$|EC| = 3$ br
olduğuna göre $|BE| = x$ kaç br dir?



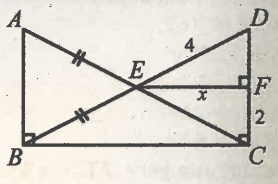
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

19.
ABC bir üçgen
$BD \perp AC$
$|BD| = |AD| = |DE|$
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 6$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



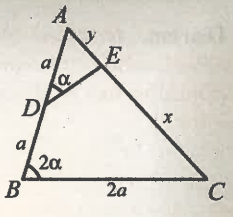
A) 7 B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{5}$

20.
ABC ve BCD birer dik üçgen
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$EF \perp CD$
$AC \cap BD = \{E\}$
$|AE| = |BE|$
$|ED| = 4$ br
$|FC| = 2$ br
olduğuna göre $|EF| = x$ kaç br dir?



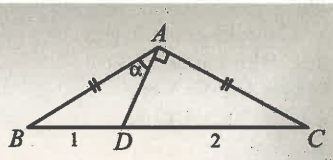
A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{10}$ D) 3 E) $2\sqrt{2}$

21.
ABC bir üçgen
$m(ADE) = \alpha$
$m(ABC) = 2\alpha$
$|AD| = |DB| = a$ br
$|BC| = 2a$ br
olduğuna göre
$|CE| / |EA| = x/y$ oranı kaçtır?



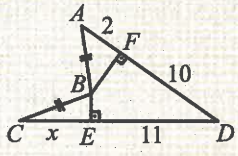
A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

22.
ABC bir üçgen
$CA \perp AD$
$|AB| = |AC|$
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 2$ br
olduğuna göre $m(DAB) = \alpha$ kaç derecedir?



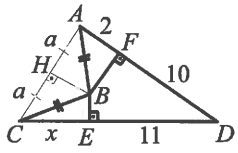
A) 15 B) 18 C) 22,5 **D) 30** E) 36

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$BE \perp CD$, $BF \perp AD$
$|AB| = |BC|$
$|AF| = 2$ br
$|FD| = 10$ br
$|DE| = 11$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ *kaçtır?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: A ile C noktalarını birleştirerek ACD üçgenini elde edelim.



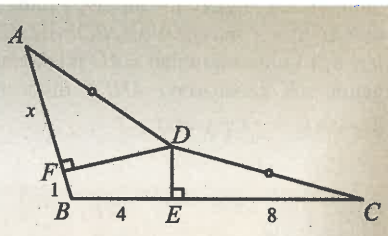
B'den AC'ye indirilen dikme ayağı H olsun. ABC ikizkenar üçgen olduğundan $|AH| = |HC|$ olur. Bu parçaların boyları da a br olsun. Carnot Teoremi gereği

$$x^2 + 10^2 + a^2 = 11^2 + 2^2 + a^2$$

olur. a^2 ifadelerini sadeleştirerek arta kalan denklemi çözersek $x = 5$ buluruz.

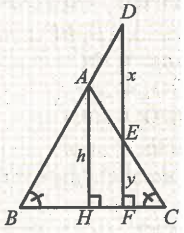
Doğru cevap: C.

23.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$DF \perp AB$
$DE \perp BC$
$|BC| = |CD|$
$|FB| = 1$ br
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 8$ br
olduğuna göre $|AF| = x$ kaç br dir?



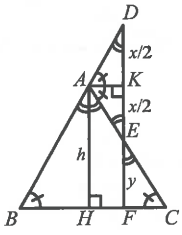
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 **E) 7**

Soru Tipi. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$m(B) = m(C)$
B, A, D doğrudaş
$AH \perp BC$, $DF \perp BC$
$|AH| = h$ br
$|DE| = x$ br
$|EF| = y$ br
olduğuna göre h'nin x ve y cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{1}{2}x+y$ B) $x+\frac{1}{2}y$ C) $x+y$ D) $2x-y$ E) $3y-x$

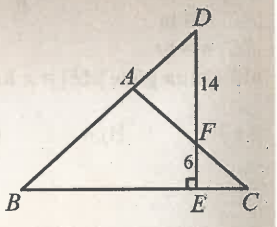
Çözümü: A'dan DF'ye indirilen dikmenin ayağı K olsun.



AH // DF olduğundan $m(BDF) = m(BAH)$ olur. CAB ikizkenar olduğundan $m(BAH) = m(HAC)$ olur. AH // EF olduğundan $m(HAC) = m(FEC)$ olur. Ters açıdan dolayı da $m(FEC) = m(AED)$'dir. BDF ile AED açılarının ölçüleri eşit bulunduğundan EAD ikizkenar üçgendir. Bu üçgende AK kenarortayı $AHFK$ dikdörtgenini oluşturacağından $h = \frac{1}{2}x + y$ olur.

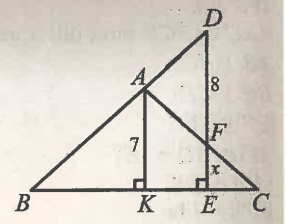
Doğru cevap: A.

24.
ABC bir ikizkenar üçgen
DEB bir dik üçgen
$|AB| = |AC|$
$DE \perp BC$
$|DF| = 14$ br
$|FE| = 6$ br
olduğuna göre
***A* noktasının *BC* doğrusuna uzaklığı kaç br dir?**



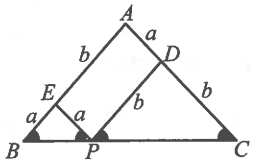
A) 17 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

25.
ABC bir ikizkenar üçgen
DEB bir dik üçgen
$|AB| = |AC|$
$AK \perp BC$
$DE \perp BC$
$|AK| = 7$ br
$|DF| = 8$ br
olduğuna göre $|FE| = x$ kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) $\frac{5}{2}$ D) 4 E) $\frac{7}{2}$

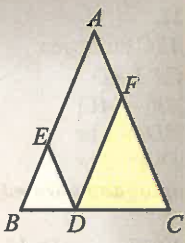
Teorem. *İkizkenar bir üçgende taban üzerinde alınan bir noktadan ikiz kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının boyları toplamı ikiz kenarlardan birinin boyuna eşittir.*



Kanıt: İkizkenar üçgenimiz $|AB| = |AC|$ olmak üzere ABC üçgeni olsun. Tabanda alınan noktaya da P diyelim. P noktasından kenarlara çizilen paralellerin $AEPD$'yi paralelkenar yaptığını ve yöndeş açılardan dolayı BEP ile PDC üçgenlerinin de ikizkenar olduğunu görürsek kanıt biter.

26.
ABC bir ikizkenar üçgen
AEDF bir paralelkenar
Çevre(*ABD*) = 6 br
Çevre(*FDC*) = 12 br

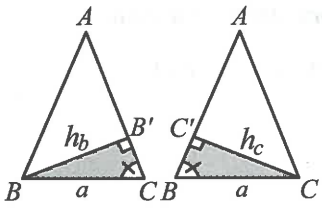
olduğuna göre
Çevre(*ABC*) kaç br dir?



A) 15 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

Teorem. *İkizkenar bir üçgende ikiz kenarlardan birine inen yüksekliğin boyu, diğerine inen yüksekliğin boyuna eşittir.*

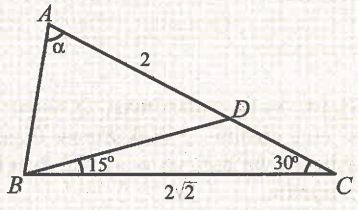
Kanıt: Kolay anlaşılması açısından aynı üçgenden iki tane çizdim. CAB ikizkenar üçgen olsun. B'den çıkan yüksekliğin boyuna h_b, C'den çıkan yüksekliğin boyuna h_c diyelim.



$BB'C$ ve $CC'B$ üçgenlerinin hem üç iç açı ölçüsü eşit hem de hipotenüslerinin boyları eşit olduğundan bu üçgenler eştir. Dolayısıyla aynı açının gördüğü kenarlar eşit boyda olmalıdır. Bu da $h_b = h_c$ demektir.

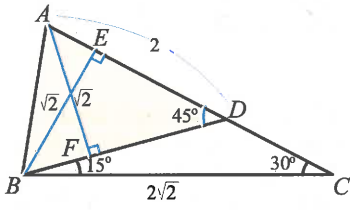
Bu teoremin karşıtı da doğrudur. Yani $h_b = h_c$ ise $b = c$ diyebiliriz. Zira üçgenin alanı hangi kenara göre hesaplanırsa hesaplansın değişmeyeceğinden $b \cdot h_b = c \cdot h_c$ eşitliğinden $b = c$ eşitliği hemencecik bulunabilir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(DBC) = 15°$
$m(BCA) = 30°$
$|BC| = 2\sqrt{2}$ br
$|AD| = 2$ br
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$
kaç derecedir?



A) 30 B) 45 C) 60 D) 67,5 E) 75

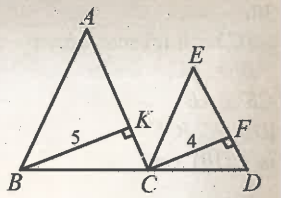
Çözüm: B'den AC'ye inilen dikme ayağı E olsun.



EBC bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|BE| = \sqrt{2}$ birimdir. Diğer yandan A'dan BD'ye inilen dikme ayağı F olsun. AFD bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AF| = \sqrt{2}$ birimdir. ABD üçgeninde AD ve BD kenarlarına inen yükseklikler eşit boyda diye BDA üçgeni $|BD| = |AD|$ olacak şekilde ikizkenardır. Bu yüzden $m(DAB) = 67{,}5°$ olmalıdır.

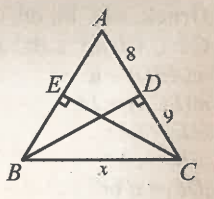
Doğru cevap: D.

27.
B, C, D doğrudaş
$|AB| = |AC|$
$|EC| = |ED|$
$BA \,//\, CE$
$BK \perp CA$
$CF \perp DE$
$|BK| = 5$ br
$|CF| = 4$ br
olduğuna göre D'nin AB'ye uzaklığı kaç br dir?



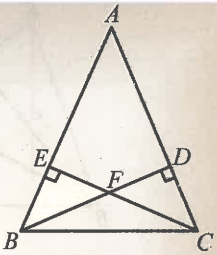
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

28.
ABC bir üçgen
$BD \perp AC$
$CE \perp AB$
$|BD| = |CE|$
$|AD| = 8$ br
$|DC| = 9$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



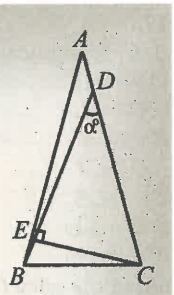
A) $2\sqrt{34}$ **B)** $3\sqrt{34}$ C) $4\sqrt{34}$ D) $5\sqrt{17}$ E) $6\sqrt{17}$

29.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$BD \perp CA$
$CE \perp AB$
$|BD| + |DC| = 18$ br
olduğuna göre EBF üçgeninin çevresi kaç br dir?



A) 12 B) 15 **C)** 18 D) 27 E) 36

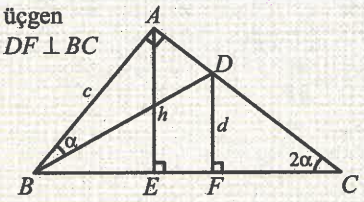
30.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$CE \perp AB$
$|DB| = 2\cdot|CE|$
$m(CDB) = \alpha°$



olduğuna göre α kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 22,5 **D) 30** E) 4

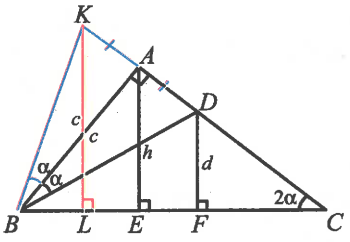
Örnek. ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB, AE \perp BC, DF \perp BC$
$m(ABD) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$|AE| = h$ br
$|AB| = c$ br
$|DF| = d$ br



olduğuna göre h'nin c ve d cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $h^2 = c^2 + d^2$ B) $2c = h + d$ C) $c^2 = d^2 + h^2$
D) $h = \frac{c+d}{2}$ E) $h = \sqrt{c\cdot d}$

Çözüm: Soruda α ile 2α'yı görünce içimizden bir ses α'dan 2α oluşturmamız gerektiğini söylüyor. Bu sebeple derhal BAD dik üçgeninin BA'ya göre simetriği olan BAK üçgenini çiziyoruz. $|KA| = |AD|$ olduğu aşikar.



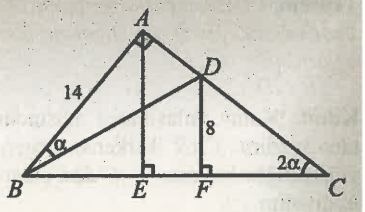
Diğer yandan, KAB üçgeninin çizimiyle CKB üçgenini ikizkenar yaptığımızı görünüz. $|CK| = |CB|$ olduğundan $[CK]$'ya inen yükseklik ile $[BC]$'ye inen yükseklik aynı olur. Şu durumda $|KL| = c$ br diyebiliriz. Son olarak, oluşan $KLFD$ dik yamuğunda $[AE]$ orta taban olduğundan

$$h = \frac{c+d}{2}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

31.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB, AE \perp BC$
$DF \perp BC$
$m(ABD) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$|AB| = 14$ br
$|DF| = 8$ br

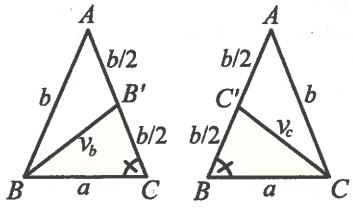


olduğuna göre $|AE|$ kaç birimdir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Teorem. *İkizkenar bir üçgende ikiz kenarlardan birine inen kenarortayın boyu, diğerine inen kenarortayın boyuna eşittir.*

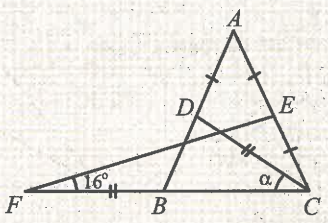
Kanıt: Kolay anlaşılması açısından yine aynı üçgenden iki tane çizdim. CAB ikizkenar üçgen olsun. B'den inen kenarortayın boyuna v_b, C'den inen kenarortayın boyuna v_c diyelim.



BCB' ve CBC' üçgenlerinin İkişer kenarı eşit boyda ve bu kenarların belirttiği açının ölçüsü birbirlerinin aynısı olduğundan bu üçgenler eştir. Dolayısıyla aynı açının gördüğü kenarlar eşit boyda olmalıdır. Bu da $v_b = v_c$ demektir.

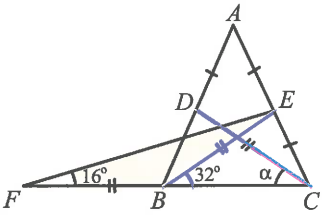
Bu teoremin de karşıtı doğrudur. $v_b = v_c$ ise $b = c$ diyebiliriz. Çünkü $v_b = v_c$ olursa yukarda taranmış iki üçgenin üç kenar uzunluğu da eşit boyda olur. Bu da eş oldukları anlamına gelir. Ayrıntısına benzerlik veya ağırlık merkezi dersinde gireriz.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = m(BCA)$
$|AD| = |AE| = |EC|$
$|FB| = |CD|$
$m(EFC) = 16°$
olduğuna göre
$m(FCD) = \alpha$
kaç derecedir?



A) 16 B) 24 C) 30 D) 32 E) 45

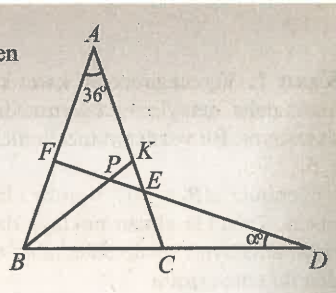
Çözüm: $|AD| = |AE| = |EC|$ eşitliği E gibi D'nin de orta nokta olduğunu anlatır.



CAB ikizkenar üçgen olduğundan $|BE| = |CD|$ olmalıdır. Soruda $|FB| = |CD|$ verildiğinden $|FB| = |BE|$ olur. $m(EFB) = m(FEB) = 16°$ olduğundan $m(EBC) = 32°$ olur. BEC ile CDB üçgenleri eş olduklarından $\alpha = 32$ bulunur.

Doğru cevap: D.

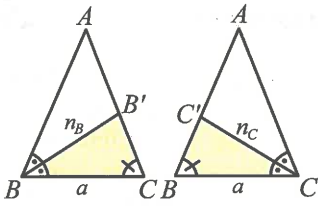
32.
ABC ve FBD birer üçgen
$|AB| = |AC|$
$|AF| = |AK|$
$|BK| = |CD|$
$m(CAB) = 36°$
olduğuna göre
$m(BDF) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 36 B) 24 C) 20 **D) 18** E) 12

Teorem. *İkizkenar bir üçgende ikiz açıların birine ait iç açıortayın boyu, diğerine ait iç açıortayın boyuna eşittir.*

Kanıt: Yine kolay anlaşılması açısından aynı üçgenden iki tane çizdim. CAB ikizkenar üçgen olsun. B'den çıkan iç açıortayın boyuna n_B, br, C'den çıkan iç açıortayın boyuna n_C br diyelim.

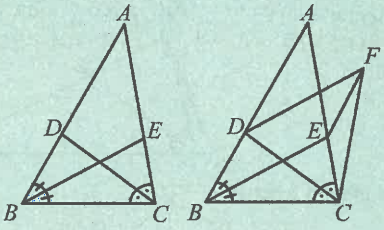


$B'BC$ ve $C'CB$ üçgenlerinin hem üç iç açı ölçüsü eşit hem de $[BC]$ kenarlarının boyları birbirlerine eşit olduğundan bu üçgenler A.K.A. eşliği gereğince eştir. Dolayısıyla aynı açının gördüğü kenarlar eşit boyda olmalıdır. Bu da $n_B = n_C$ demektir.

Yukarda ikizkenar bir üçgenin ikiz kenarlarına inen iç açıortayların boylarının birbirlerine eşit olduğunu kanıtladık. Aklımıza şöyle bir soru geldi: Teoremin karşıtı doğru mudur? Yani, bir üçgende farklı iki köşeye ait iç açıortaylar eşit boydaysa, bu üçgen ikizkenar mıdır? Evet, öyledir! Ama bunun kanıtı o kadar kolay değil. Merak edenler için aşağıya ekledim. Merak etmeyenler bu gri kutucuğu pas geçsinler…

Steiner-Lehmus Teoremi. *Bir üçgenin iki iç açıortayının uzunluğu eşit isse bu üçgen ikizkenar üçgendir.*

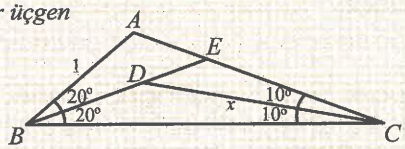
Kanıt: B ve C'ye ait iç açıortayları eşit boyda olan bir ABC üçgeni çizelim.



$m(C) > m(B)$ olduğunu farz edelim. $|DE| = |BC|$ verildiğinden DCB ile EBC üçgenlerinin ikişer kenarları eştir. $m(DCB) > m(EBC)$ olduğundan $|DB| > |EC|$'dir. $DBEF$ paralelkenarı oluşturulursa $|CD| = |BE| = |DF|$ olduğundan CDF ikizkenardır. $m(EFD) = m(EBD)$ olduğundan $m(EFC) > m(ECF)$ dir. Bu da $|EC| > |EF| = |DB|$ olmasını gerektirir ki bu da daha önce bulduğumuz sonuca göre çelişkidir.

$m(C) < m(B)$ alınsaydı da aynı çelişki yaşanacaktı. Demek ki $m(C) = m(B)$ olmalı. Teoremin karşıtı zaten kanıtlanmıştı.

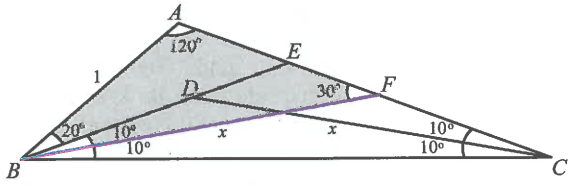
Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABE) = 20°$
$m(EBC) = 20°$
$m(BCD) = 10°$
$m(DCA) = 10°$
$|AB| = 1$ br
olduğuna göre $|CD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

Çözüm: Bu soruyu hazırlayalı sanırım 6 yıl filan oldu. Bir de çözüm yaptım ki dillere destan... Daha sonra birlikte çalıştığımız sevgili ortağım İbrahim Şepik'e gururla sordum, 'akşama boş bir vaktinde uğraş bakalım, güzel olmuş mu' diyerek. Sonra yanından ayrıldım. 3 dk sonra odasından çıkıp aşağıdaki çözümü getirdi. O kadar şık ve sade bir çözüm ki, kendi çözümümü buraya eklemeye utandım ☺

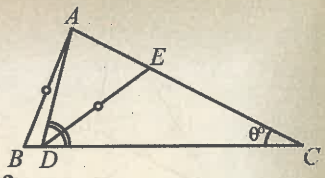
EBC ikizkenar üçgen olduğundan *C*'ye ait iç açıortayın boyu x br ise *B*'ye ait iç açıortayın boyu da x br dir.



Şimdi, *B*'ye ait iç açıortay olan $[BF]$ çizilirse *FAB* bir 30°-30°-120° üçgeni olur ki $|AB| = |AF| = 1$ br olduğundan $|BF| = x = \sqrt{3}$ br olmalıdır.

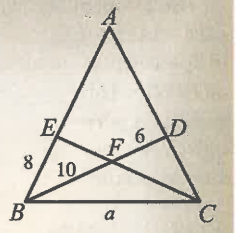
Doğru cevap: C.

33.
ABC bir üçgen
$m(ADE) = m(CDE)$
$|AB| = |DE|$
$|CA| = |CD|$
$m(BAD) = 9°$
$m(C) = \theta°$
olduğuna göre θ kaçtır?



A) 28,8 B) 28,6 C) 28,5 D) 28,4 E) 28,2

34.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$|BD| = |CE|$
$|EB| = 8$ br
$|BF| = 10$ br
$|FD| = 6$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre *a* kaçtır?

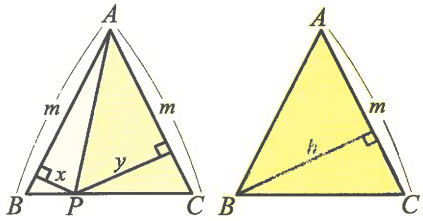


A) $8\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{5}$ D) 17 E) 20

Teorem. *İkizkenar bir üçgenin tabanı üzerinde alınan bir noktadan ikiz kenarlara indirilen dikmelerin boyları toplamı ikiz kenarlardan birine inen yüksekliğin boyuna eşittir.*

Kanıt 1: Vereceğimiz bu kanıt çok sade olmasına rağmen, daha detaylarını öğrenmediğimiz alan kavramına dayanıyor. Bu yüzden ikinci kanıta mutlaka göz atın.

Üçgenimiz $|AB| = |AC| = m$ br olmak üzere *ABC* üçgeni olsun. Tabanda alınan noktaya da *P* diyelim. Ben daha rahat anlatayım siz de daha rahat anlayın diye aynı şekilden iki tane çizdim.

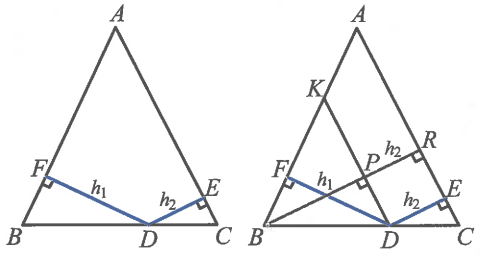


Önce $[AP]$'yi çizelim. *P*'den *AB* ve *AC* kenarlarına inen dikmelerin boyları sırasıyla x br ve y br olsun. İkiz kenarlara inen yüksekliklerden birinin boyu da h br olsun. *APB* ile *APC* üçgenlerinin alanlarının toplamı *ABC* üçgeninin alanını verir. Buna göre

$$\frac{mx}{2} + \frac{my}{2} = \frac{mh}{2}$$

olduğundan $x + y = h$ olduğu kanıtlanmış demektir.

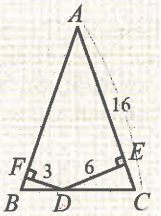
Kanıt 2: İkizkenar üçgenimiz ABC, ikiz açılar B ve C, tabanda alınan nokta D, D'den AB ve CA kenarlarına indirilen yüksekliklerin boyları da sırasıyla h_1 ve h_2 olsun. Göstermemiz gereken eşitlikse, B'den inen yüksekliğin boyunun $h_1 + h_2$ olduğudur.



D'den CA'ya paralel olarak çizilen doğru AB'yi K'de kessin. KBD üçgeninin de ikizkenar olacağını anlamışsınızdır. Şimdi B'den CA'ya dikme inelim. DK'yi P'de CA'yı R'de kessin. DK // CA olduğundan $BR \perp DK$ olur. Şimdi kanıta geçiyoruz:

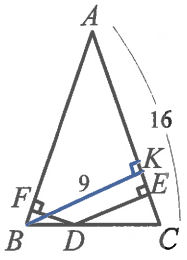
İkizkenar üçgenlerin ikiz kenarlarına inen yükseklikler eşit olmalı diye $|BP| = |DF| = h_1$, diğer yandan paralel doğrular arasındaki uzaklık sabit olmalı diye $|PR| = |DE| = h_2$ olur. Bu da $|BR| = |BP| + |PR| = h_1 + h_2$ demektir.

Örnek. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$DF \perp AB$
$DE \perp AC$
$|DF| = 3$ br
$|DE| = 6$ br
$|AB| = |AC| = 16$ br
olduğuna göre
Alan(ABC) *kaç* br^2 *dir?*



A) 144 B) 108 C) 96 D) 72 E) 36

Çözüm: B'den AC'ye inilen dikme ayağı K olsun.



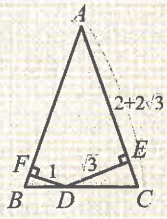
ABC bir ikizkenar üçgen olduğundan yukarda kanıtlandığı üzere $|BK| = 9$ br olur. O halde

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{16 \cdot 9}{2} = 72 \text{ br}^2$$

olmalıdır.

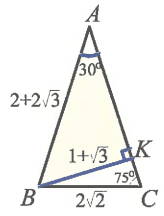
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$DF \perp AB$
$DE \perp AC$
$|DF| = 1$ br
$|DE| = \sqrt{3}$ br
$|AB| = |AC| = 2+2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|BC|$ *kaç* br *dir?*



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

Çözüm: B'den AC'ye inilen dikme ayağı K olsun.

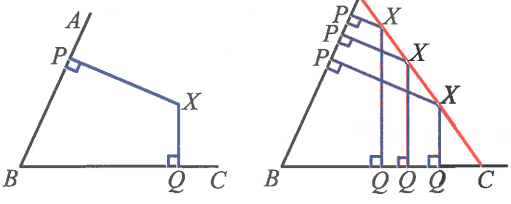


ABC bir ikizkenar üçgen olduğundan yukarda kanıtlandığı üzere $|BK| = 1+\sqrt{3}$ br olur. O halde ABK üçgeni bir 30°-60°-90° üçgenidir. Buradan $m(BCA) = 75°$ bulunduğundan BCK üçgeninin de bir 15°-75°-90° üçgeni olduğu anlaşılır. 75° lik açının gördüğü kenarın boyu $1+\sqrt{3}$ br olduğundan hipotenüsün boyu $2\sqrt{2}$ br olmalıdır.

Doğru cevap: B.

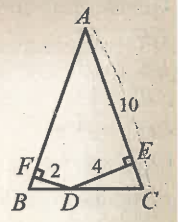
Örnek. *Bir açının iç bölgesinde alınan bir X noktasının açının kollarına uzaklıkları toplamı sabitse, X noktalarının geometrik yeri neresidir?*

Çözüm: Aşağıdaki şekilden takip ediniz.



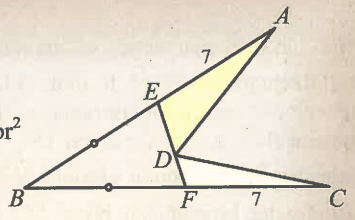
X'den açının kollarına inilen dikme ayaklarına şekildeki P ve Q diyelim. $|XP| + |XQ|$ toplamının sabit olması aklımıza ikizkenar üçgeni getiriyor. Demek ki, bir açının iç bölgesinde alınan bir X noktasının açının kollarına uzaklıkları toplamı sabitse, X noktalarının geometrik yeri tepe açısı B olan bir ikizkenar üçgeninin taban kenarıdır.

35.
$|ABC|$ bir ikizkenar üçgen
$DF \perp AB$, $DE \perp AC$
$|DF| = 2$ br
$|DE| = 4$ br
$|AC| = |AB| = 10$ br
olduğuna göre
Alan(ABC) kaç br^2 dir?



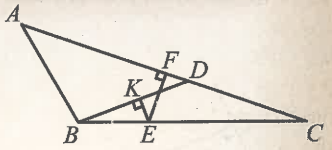
A) 30 B) 28 C) 24 D) 22 E) 20

36.
$ABCD$ bir dörtgen
$D \in [EF]$
$|BE| = |BF|$
$|EA| = |FC| = 7$ br
$|AED| + |DFC| = 14$ br^2
olduğuna göre
F'nin AB'ye
uzaklığı kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

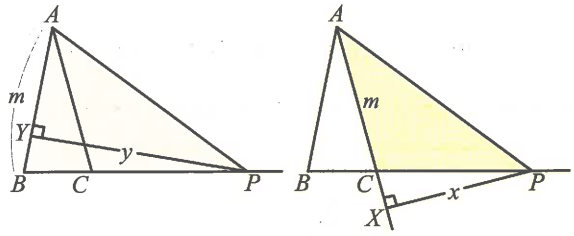
37.
$|ABC|$ bir üçgen
$|AB| = |BD| = |DC|$
$EK \perp BD$
$EF \perp AC$
$|AD| = 16$ br
$|EK| = 2$ br
$|EF| = 4$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) $6\sqrt{5}$ B) $8\sqrt{5}$ C) $12\sqrt{5}$ **D)** $6\sqrt{10}$ E) $8\sqrt{10}$

Teorem. *İkizkenar bir üçgenin tabanı üzerinde değil de uzantısında alınan bir noktadan ikiz kenarlara indirilen dikmelerin boylarının pozitif farkı, ikiz kenarlara inen yüksekliklerin boyuna eşittir.*

Kanıt 1: Üçgenimiz yine $|AB| = |AC| = m$ br olmak üzere ABC üçgeni olsun. Taban uzantısında alınan noktaya da yine P diyelim.



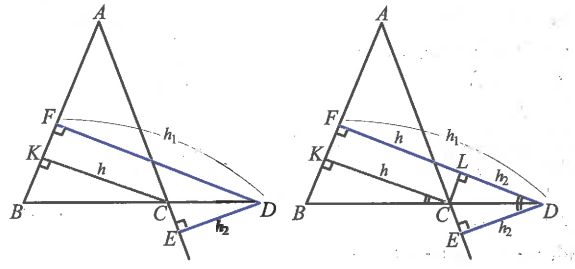
ABP üçgeninin alanından ACP üçgeninin alanı çıkartılırsa ABC üçgeninin alanı bulunur.

$$\text{Alan}(ABP) = \frac{my}{2} \text{ ve Alan}(ACP) = \frac{mx}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{m(y-x)}{2}$$

olur. Aynı zamanda ikiz bir kenara inen yüksekliğin uzunluğuna h denirse, ABC üçgeninin alanı $\frac{mh}{2}$ olduğundan $y - x = h$ olduğu kanıtlanmış olur.

Kanıt 2: C'ye ait yüksekliğin boyu h, $[BC$ üzerinde ama $[BC]$ dışında alınan nokta D, D'den AB ve AC'ye inilen yüksekliklerin boyları da sırasıyla h_1 ve h_2 olsun. Göstermemiz gereken eşitlik $h = h_1 - h_2$ eşitliğidir.

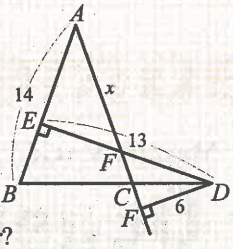


Hem CK hem de DF, AB'dik kestiği için $CK \,//\, DF$'dir. O halde $m(BCK) = m(BDF)$ olur. Diğer yandan ABC, BCA, DCE açıları eş diye EDC açısı da BCK açısına yani BDF açısına eş olur. Demek ki DB, EDF açısının açıortayıdır. Derhal C'den DF'ye dik indirelim, ayağı L olsun. DEC ile DLC üçgenleri eş olduğundan $|DL| = h_2$ olur. Diğer yandan $CLFK$ da bir dikdörtgen olduğundan $|LF| = |CK| = h$ olur. Sonuçta $|DF| = |DL| + |LF|$ yani $h_1 = h_2 + h$ bulunduğundan

$$h = h_1 - h_2$$

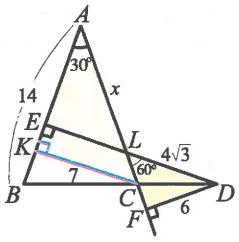
olduğu kanıtlanmış olur.

Örnek. *ABC bir ikizkenar üçgen*
B, C, D noktaları doğrudaş
$|AB| = |AC|$
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$|DF| = 6$ br
$|DE| = 13$ br
$|AB| = 14$ br
olduğuna göre $|AL| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 8 B) 9 C) 10 D) $8\sqrt{3}$ E) $26-8\sqrt{3}$

Çözüm: C'den AB'ye inilen dikme ayağı K olsun.



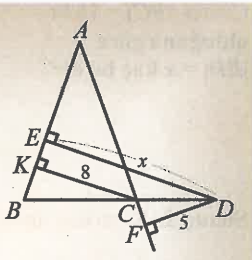
ABC bir ikizkenar üçgen olduğundan yukarda kanıtlandığı üzere $|CK| = 13$ br $- 6$ br $= 7$ br olur. O halde AKC üçgeni bir 30°-60°-90° üçgenidir. $ED \,//\, CK$ olduğundan $m(ALE) = m(DLF) = 60°$ bulunduğundan DLF üçgeninin de bir 30°-60°-90° üçgeni olduğu anlaşılır. $|DF| = 6$ br olduğundan $|FL| = 2\sqrt{3}$ br ve dolayısıyla $|DL| = 4\sqrt{3}$ br olur. Şu durumda $|EL| = 13 - 4\sqrt{3}$ br olduğundan $|AL|$ değeri onun 2 katı boyda olmalıdır. O halde

$$|AL| = 2 \cdot (13 - 4\sqrt{3}) = 26 - 8\sqrt{3} \text{ br}$$

olarak bulunur.

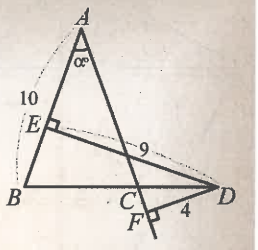
Doğru cevap: E.

38.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$D \in BC$
$DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $CK \perp AB$
$|DF| = 5$ br
$|CK| = 8$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



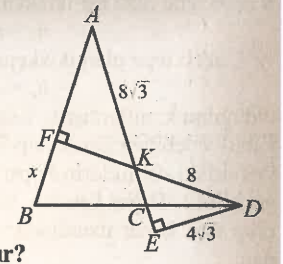
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

39.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$D \in BC$
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$|DF| = 4$ br
$|DE| = 9$ br
$|AB| = 10$ br
olduğuna göre $m(CAB) = \alpha$ kaç derecedir?



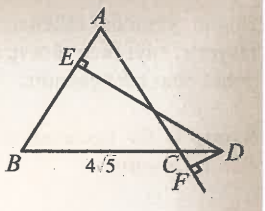
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 36 E) 45

40.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
B, C, D doğrudaş
$DE \perp EA$
$DF \perp AB$
$|DE| = 4\sqrt{3}$ br
$|DK| = 8$ br
$|AK| = 8\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|FB| = x$ kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

41.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$D \in BC$
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$\tan(ACB) = 2$
$|BC| = 4\sqrt{5}$ br
olduğuna göre $|DE| - |DF|$ farkı kaçtır?



A) 4 B) 6 C) 8 D) $2\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{5}$

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Eşkenar Üçgen

Bütün kenarları birbirine eş yani bütün kenar uzunlukları birbirlerine eşit olan üçgenlere **eşkenar üçgen** denir. Böyle bir üçgenin tüm iç açıları da eş olacağından, az kullanılmakla birlikte, **eşaçı üçgen** dendiği de olur.

Eşkenar bir üçgenin bütün iç açılarının ölçüleri birbirlerine eşit ve 60'ar derecedir.

Geçen dersimizde, tepesi A olan ikizkenar bir üçgende

$$h_a = n_A = v_a,$$

B açısı tepe olan bir ikizkenar üçgende

$$h_b = n_B = v_b$$

ve C açısı tepe olan ikizkenar bir üçgende de

$$h_c = n_C = v_c$$

olduğunu kanıtlamıştık. Eşkenar üçgen, her köşesini tepe kabul edebileceğimiz bir ikizkenar üçgen olduğundan, yukardaki eşitliklerin hepsi bir ABC eşkenar üçgeni için geçerlidir. Diğer yandan, bir eşkenar üçgenin alanı sabit olup tüm kenar uzunlukları da birbirlerine eşit olduğundan

$$h_a = h_b = h_c$$

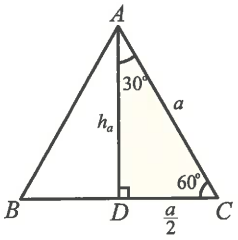
yazabiliriz. Bu yüzden bir *eşkenar üçgende tüm kenarlardan inen tüm yardımcı elemanlar eşit uzunluktadır.* Yani;

$$h_a = h_b = h_c = n_A = n_B = n_C = v_a = v_b = v_c.$$

Yine aynı sebepten dolayı *bir eşkenar üçgende ağırlık merkezi* (G), *iç teğet çember merkezi* (I), *çevrel çember merkezi* (O) *ve diklik merkezi* (H) *çakışıktır.*

Bunun yanında eşkenar üçgen tüm kenar uzunlukları rasyonel sayı iken tüm iç açıları da derece cinsinden rasyonel olan *tek* üçgendir.

Sonuç 1. *Bir kenarının uzunluğu a br olan bir ABC eşkenar üçgeninde*



$$h_a = h_b = h_c = n_A = n_B = n_C = v_a = v_b = v_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ br.}$$

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

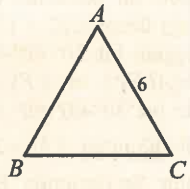
olduğunu göstersek yeter, çünkü diğer eşitlikleri yukarda kanıtlamıştık. Bunun için bir ABC eşkenar üçgeni çizip A'dan inen yüksekliği çizelim. ADC üçgeni bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|DC| = \frac{a}{2}$ br, dolayısıyla da

$$|AD| = h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ br}$$

olduğu görülür.

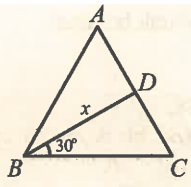
1.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AC| = 6$ br

olduğuna göre B köşesinin AC doğrusuna uzaklığı kaç br dir?



$3\sqrt{3}$

2.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(CBD) = 30°$
Çevre(ABC) = 18 br
olduğuna göre
$|BD| = x$ kaç br dir?



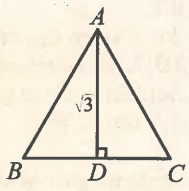
$3\sqrt{3}$

Sonuç 2. *Bir kenar uzunluğu a br olan bir eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ br^2 dir.*

Yüksekliğin boyuna $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ deyip, onu da eşkenar üçgenin alanına eşit olan $\frac{ah}{2}$ formülünde yerine yazarsak,

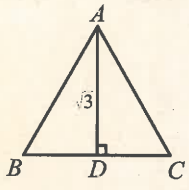
$$\frac{a.(\frac{a\sqrt{3}}{2})}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ olur.}$$

3.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \perp BC$
$|AD| = \sqrt{3}$ br
olduğuna göre
Çevre(ABC) kaç br dir?



6

4.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \perp BC$
$|AD| = \sqrt{3}$ br
olduğuna göre
Alan(ABC) kaç br^2 dir?



$\sqrt{3}$

Örnek. *Alanıyla çevresi sayıca birbirine eşit olan bir eşkenar üçgenin yüksekliğinin uzunluğu kaç* br *dir?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

Çözüm: Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğuna a br diyelim. Alan ve çevre formüllerini birbirlerine eşitlersek cevaba erişmiş olacağız.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $a = 4\sqrt{3}$ bulunur. O halde yüksekliği, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ formülünden 6 br olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC eşkenar üçgeninin A'dan inen iç açıortayı, B'den inen kenarortayı ve C'den inen yüksekliğinin uzunlukları toplamı* $9\sqrt{3}$ br *olduğuna göre bu üçgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 4 B) 6 C) 9 D) $6\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

Çözüm: ABC eşkenar üçgeninde $n_A = v_b = h_c$ olduğunu biliyoruz. Demek ki bunları her biri $3\sqrt{3}$ br uzunluğunda.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

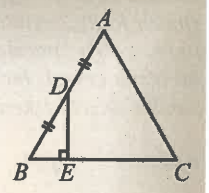
eşitliğinden $a = 6$ br bulunur. Bir kenar uzunluğu bilindiğinden artık alanı bulmak çok kolay olacak.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

olmalıdır.

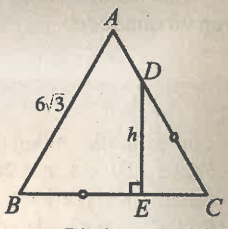
Doğru cevap: E.

5.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = |DB|$
$DE \perp BC$
Alan(ABC) = $9\sqrt{3}$ br^2
olduğuna göre $|BE|$ kaç br dir?



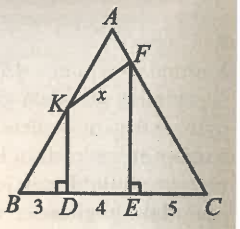
A) 1 **B)** $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{3}$ E) 3

6.
ABC bir eşkenar üçgen
$DE \perp BC$
$|BE| = |CD|$
$|AB| = 6\sqrt{3}$ br
$|DE| = h$ br
olduğuna göre h kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 8

7.
ABC bir eşkenar üçgen
$KD \perp BC$
$FE \perp BC$
$|BD| = 3$ br
$|DE| = 4$ br
$|EC| = 5$ br
$|KF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

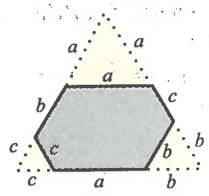


A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

Örnek. *Eşkenar üçgen şeklindeki bir kartonun üç köşesinden farklı boyutlarda birer eşkenar üçgen kesilip atılınca, geriye, paralel olan kenarları eşit uzunlukta olan 60 birim çevreli bir altıgen şekil kalıyor. Buna göre kesimden önceki eşkenar üçgenin çevresi kaç birimdi?*

A) 60 B) 75 C) 90 D) 120 E) 180

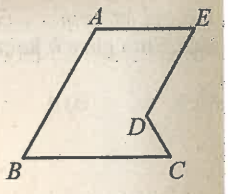
Çözüm: Taslak şekli aşağıda çizdim.



İlk eşkenar üçgenin çevresi $3a + 3b + 3c$ birim iken geriye kalan altıgenin alanı $2a + 2b + 2c$ birim olduğunu görüyoruz. Soruda ikinci değer 60 olarak verildiğinden cevap 90 olmalıdır.

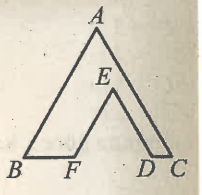
Doğru cevap: C.

8.
Kenar uzunlukları doğal sayı olan ABC ve ADE eşkenar üçgenleri birleştirilerek şekildeki $ABCDE$ beşgeni elde edilmiştir.
Çevre$(ABCDE) = 22$ br
Alan$(ABCDE) = 13\sqrt{3}$ br^2
olduğuna göre $|CD|$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ **D)** 2 E) 3

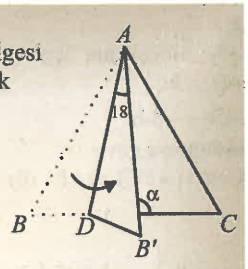
9.
Kartondan yapılmış ABC eşkenar üçgeninden şekildeki gibi DEF eşkenar üçgeni kesilerek atılıyor.
Kartonun çevresinin kaç br arttığını bulabilmek için aşağıdaki bilgilerden hangisi bilinmelidir?



A) $|AB|$ B) $|BF|$ C) $|DC|$ D) $|BF| + |DC|$ **E)** $|EF|$

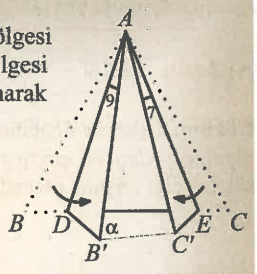
10.
ABC eşkenar üçgeninin ABD bölgesi $[AD]$ keseni üzerinden katlanarak şekildeki konuma getiriliyor.
$m(B'AD) = 18°$

olduğuna göre şekilde belirtilen α kaç derecedir?



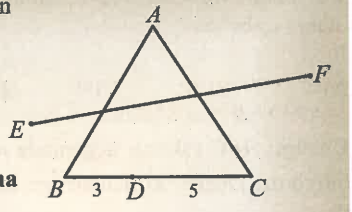
A) 108 B) 102 C) 98 **D)** 96 E) 92

11.
ABC eşkenar üçgeninin ABD bölgesi $[AD]$ keseni üzerinden, ACE bölgesi de $[AE]$ keseni üzerinden katlanarak şekildeki konuma getiriliyor.
$m(DAB') = 9°$
$m(EAC') = 7°$
olduğuna göre
$m(AB'C')$ kaç derecedir?



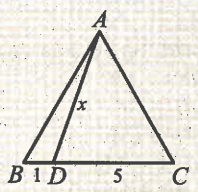
A) 76 B) 78 C) 80 D) 82 E) 83

12.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
E ve F noktaları, D'nin sırasıyla AB ve AC kenarlarına göre simetrikleri olduğuna göre $|EF|$ kaç br dir?



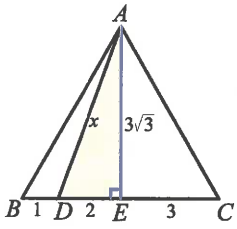
A) 7 B) 8 C) $7\sqrt{2}$ **D)** $7\sqrt{3}$ E) 16

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$D \in [BC]$
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 5$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{31}$ D) $\sqrt{29}$ E) $3\sqrt{3}$

Çözüm 1: Eşkenar üçgen de bir ikizkenar üçgen olduğundan yükseklikleri aynı zamanda kenarortaydır. *A*'dan *BC*'ye inilen dikme ayağı *E* olsun.



Bu durumda $|DE| = 2$ br ve $|EC| = 3$ br olmalıdır. Diğer yandan yüksekliğin boyu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ formülünden $3\sqrt{3}$ br olarak bulunur. *DEA* dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$x^2 = 2^2 + (3\sqrt{3})^2$$

eşitliğinden $x = \sqrt{31}$ olarak bulunur.

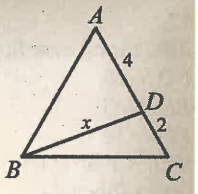
Çözüm 2: Eşkenar üçgen, nihayetinde bir ikizkenar üçgen olduğundan ikizkenar üçgen dersinde öğrendiğimiz *kesen formülü*nü uygulayabiliriz:

$$x^2 = 6^2 - 1 \cdot 5 = 31$$

eşitliğinden $x = \sqrt{31}$ bulunur.

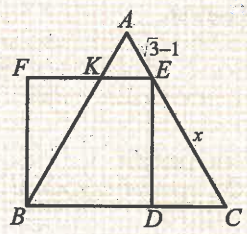
Doğru cevap: C.

13.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [CA]$
$|AD| = 4$ br
$|DC| = 2$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) $2\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 5 D) 4 E) $3\sqrt{2}$

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
BDEF bir kare
$E \in [AC]$
$|AE| = \sqrt{3} - 1$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?

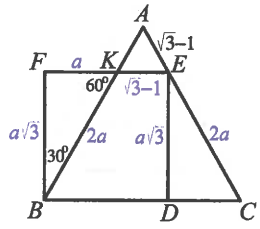


A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{3}+1$ E) 3

Çözüm: $KE \,//\, BC$ olduğundan *AKE* üçgeni de bir eşkenar üçgendir. O halde

$$|KE| = \sqrt{3} - 1 \text{ br}$$

olduğunu not edelim.



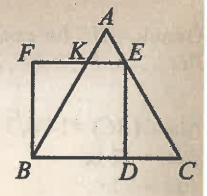
$|FK| = a$ br olsun. *BKF* üçgeni bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|FB| = a\sqrt{3}$ br olur. Karenin kenar uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan $|FB| = |FE|$ olması gerekir ki

$$a\sqrt{3} = a + \sqrt{3} - 1$$
$$a\sqrt{3} - a = \sqrt{3} - 1$$

eşitliğinden $a = 1$ bulunur. *EDC* üçgeni de bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|EC| = 2a = 2$ br olmalıdır.

Doğru cevap: C.

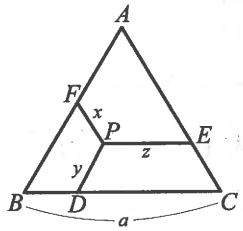
14.
ABC bir eşkenar üçgen
BDEK bir kare
$E \in AC$
$AB \cap FE = \{K\}$
olduğuna göre $\frac{|FK|}{|DC|}$ **oranı kaçtır?**



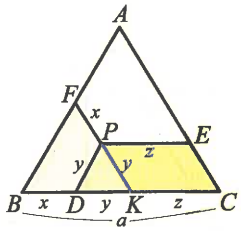
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Teorem. *Bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan istekse bir noktadan kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının uzunluklarının toplamı, eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.*

Yani yandaki
ABC eşkenar üçgeninde
PD // AB
PE // BC
PF // CA
ise $x + y + z = a$.



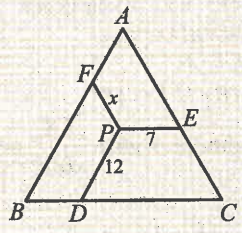
Kanıt: *FP*'nin *B*'yi kestiği noktaya *K* diyelim.



Yöndeş açılardan dolayı *PDK* ve *FBK* üçgenleri eşkenar üçgen, *PKCE* dörtgeni de paralelkenar olur. Bu sebeple $|BD| = x$ br, $|DK| = y$ br ve $|KC| = z$ br olduğundan, aranan $x + y + z = a$ eşitliği kanıtlanmış olur.

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
PD // AB, PE // BC, PF // CA

Alan$(ABC) = 144\sqrt{3}$ br^2
$|PD| = 12$ br
$|PE| = 7$ br
olduğuna göre
$|PF| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: *ABC* eşkenar üçgeninin bir kenar uzunluğu a br olsun. Alan formülünden a'yı bulalım bakalım.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$$

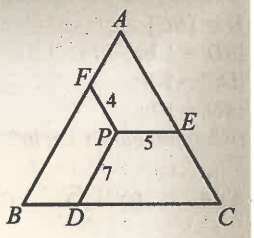
eşitliğinden $a = 24$ bulunur. $|PD| + |PE| + |PF| = a$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde

$$12 + 7 + x = 24$$

eşitliğinden $x = 5$ bulunur.

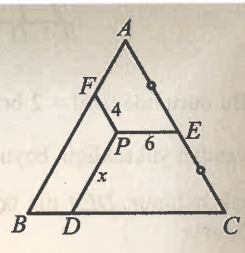
Doğru cevap: B.

15.
ABC bir eşkenar üçgen
PD // AB
PE // BC
PF // CA
$|PD| = 7$ br
$|PE| = 5$ br
$|PF| = 4$ br
olduğuna göre eşkenar üçgenin yüksekliği kaç br dir?



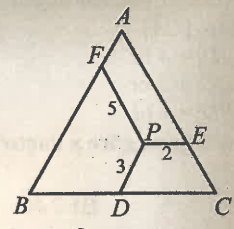
A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 8 **D)** $8\sqrt{3}$ E) 16

16.
ABC bir eşkenar üçgen
PD // AB, PE // BC, PF // CA
$|AE| = |EC|$
$|PD| = x$ br
$|PE| = 6$ br
$|PF| = 4$ br
olduğuna göre x kaçtır?



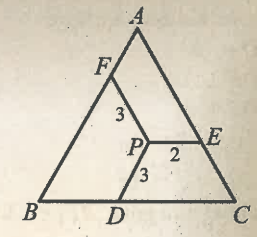
A) 8 B) 9 **C)** 10 D) 11 E) 12

17.
ABC bir eşkenar üçgen
PD // AB
PE // BC
PF // CA
$|PD| = 3$ br
$|PE| = 2$ br
$|PF| = 5$ br
olduğuna göre $|BD| - |DC|$ farkı kaçtır?



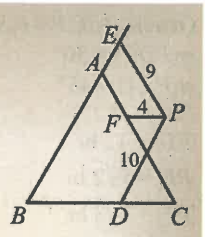
A) −2 B) −1 **C)** 0 D) 1 E) 2

18.
ABC bir eşkenar üçgen
PD // *AB*, *PE* // *BC*, *PF* // *CA*
|*PD*| = 3 br
|*PE*| = 2 br
|*PF*| = 3 br
olduğuna göre *A* ile *D* noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



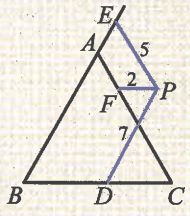
A) 6 **B)** 7 C) 8 D) 9 E) 10

19.
ABC bir eşkenar üçgen
PD // *AB*
PF // *BC*
PE // *CA*
|*PD*| = 10 br
|*PF*| = 4 br
|*PE*| = 9 br
olduğuna göre |*DC*| kaç br dir?



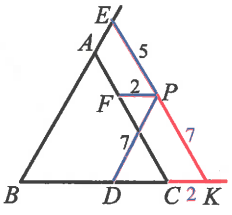
A) 9 B) 8 C) 7 **D)** 6 E) 4

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
PD // *AB*
PF // *BC*
PE // *CA*
|*PF*| = 2 br
|*PE*| = 5 br
|*PD*| = 7 br
olduğuna göre |AB| kaç br *dir?*



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm: *EP*'nin *BC*'yi kestiği noktaya *K* diyelim.



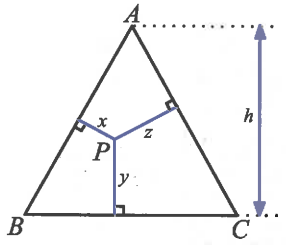
EK // *AC* olduğundan *EBK* üçgeni de eşkenardır.
|*EK*| = 12 br
diye |*BK*| = 12 br olmalıdır. Diğer yandan *FCKP* bir paralelkenar olduğundan |*CK*| = 2 br dir. Bu yüzden
|*AB*| = |*BC*| = |*BK*| − |*CK*| = 12 − 2 = 10 br
bulunur.

Doğru cevap: C.

Teorem [Viviani]. *Bir eşkenar üçgenin içinde alınan isteksel bir noktadan kenarlara inen dikmelerin toplamı, eşkenar üçgenin bir yüksekliğine eşittir.*

Yani, yandaki *ABC* eşkenar üçgenine göre

$x + y + z = h.$

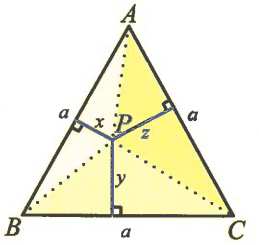


Kanıt: Alınan nokta *P* olsun. *P* noktası köşelere birleştirilirse oluşan *APB*, *BPC* ve *CPA* üçgenlerinin alanlarının toplamı eşkenar üçgenin alanını verir.

$\text{Alan}(ABP) = \frac{ax}{2}$ br^2

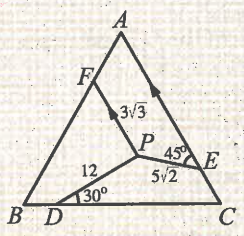
$\text{Alan}(BPC) = \frac{ay}{2}$ br^2

$\text{Alan}(CPA) = \frac{az}{2}$ br^2



değerleri toplanır ve $\frac{ah}{2}$ 'ye eşitlenirse $x + y + z = h$ bulunur.

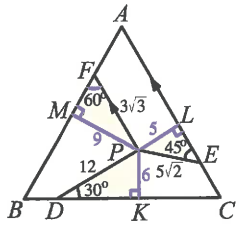
Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$m(PDC) = 30°$
$m(PEA) = 45°$
$PF \,//\, CA$
$|PD| = 12$ br
$|PE| = 5\sqrt{2}$ br
$|PF| = 3\sqrt{3}$ br



olduğuna göre eşkenar üçgenin yüksekliği kaç br *dir?*

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

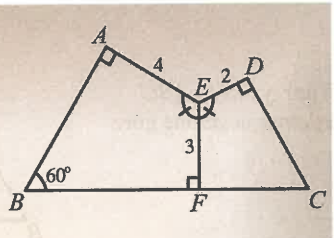
Çözüm: *P*'den *BC*, *CA* ve *AB* kenarlarına inilen dikme ayakları sırasıyla *K*, *L* ve *M* olsun.



PDK bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|PK| = 6$ br, *PLE* bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|PL| = 5$ br ve *PFM* bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|PM| = 9$ br dir. $|PK| + |PL| + |PM|$ toplamı eşkenar üçgenin bir yüksekliğinin uzunluğunu vereceğinden cevap $6 + 5 + 9 = 20$ olmalıdır.

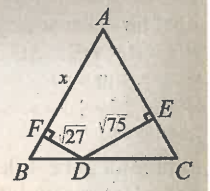
Doğru cevap: E.

20.
ABCDE bir beşgen
$EA \perp AB$, $ED \perp DC$
$EF \perp BC$
$m(B) = 60°$
$m(AEF) = m(DEF)$
$|AE| = 4$ br
$|EF| = 3$ br
$|ED| = 2$ br
olduğuna göre *C*'nin *AB*'ye uzaklığı kaç br dir?



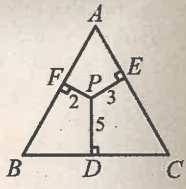
A) 8 **B) 9** C) $6\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) 12

21.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$DF \perp AB$
$DE \perp AC$
$|DF| = \sqrt{27}$ br
$|DE| = \sqrt{75}$ br
olduğuna göre $|AF| = x$ kaç br dir?



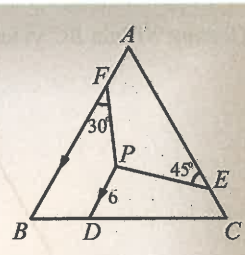
A) 12 **B)** 13 C) 14 D) 15 E) 16

22.
ABC bir eşkenar üçgen
$PD \perp BC$
$PE \perp CA$
$PF \perp AB$
$|PD| = 5$ br
$|PE| = 3$ br
$|PF| = 2$ br
olduğuna göre $\dfrac{\text{Alan}(ABC)}{|BC|}$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

23.
ABC bir eşkenar üçgen
$PD \,//\, AB$
$m(PFB) = 30°$
$m(PEA) = 45°$
$|PD| = 6$ birim
$|PE| = 2\sqrt{6}$ birim
$|PF| = 2\sqrt{3}$ birim
olduğuna göre $|BC|$ kaç birimdir?



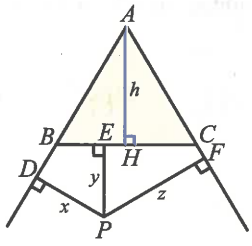
A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

Teorem. *Bir eşkenar üçgenin dışında alınan isteksel bir noktadan üçgenin kenarlarına ya da bu kenarların uzantılarına inen dikmelerin toplamı, (noktanın içeride alınması durumunda yön değiştirecek olan dikmenin boyu negatif alınacak) eşkenar üçgenin bir yüksekliğine eşittir.*

Yani, teoremin dediği;

yandaki ABC eşkenar üçgenine göre

$h = x - y + z.$



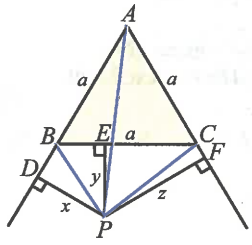
Kanıt 1: Eşkenar üçgenin dışında alınan nokta P olsun. P'yi eşkenar üçgenin köşelerine birleştirelim. ABPC dörtgeninin alanını iki türlü bulup, bulduklarımızı eşitleyeceğiz. Öncelikle bu dörtgenin alanı APB ve APC üçgenlerinin alanları toplamıdır. Diğer yandan ABC eşkenar üçgeniyle BPC üçgeninin alanının toplamı da bu dörtgenin alanını verir. O halde ilk toplamdan BPC üçgeninin alanını çıkartırsak, bu değer eşkenar üçgenin alanına eşit olur.

$$\text{Alan}(APB) = \frac{ax}{2} \text{ br}^2$$

$$\text{Alan}(APC) = \frac{az}{2} \text{ br}^2$$

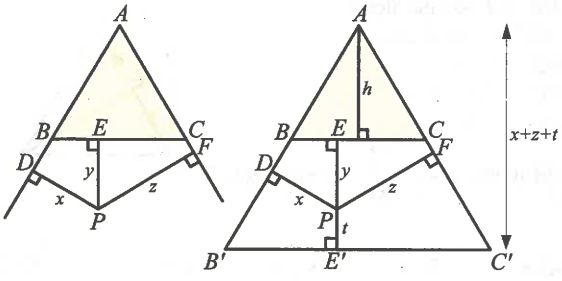
$$\text{Alan}(BPC) = \frac{ay}{2} \text{ br}^2$$

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{ah}{2} \text{ br}^2$$



olduğundan $\frac{ax}{2} + \frac{az}{2} - \frac{ay}{2} = \frac{ah}{2}$ olur ki $x + z - y = h$ bulunur.

Kanıt 2: P'yi içinde bırakacak şekilde, alt şekildeki gibi $AB'C'$ eşkenar üçgenini oluşturalım.

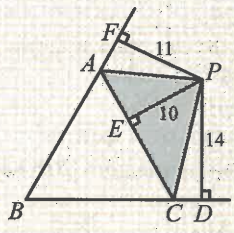


P'nin $B'C'$ doğrusuna uzaklığı t br olsun. Şu durumda $AB'C'$ eşkenar üçgeninin yüksekliği $x + z + t$ toplamıdır. Diğer yandan aynı toplam $h + y + t$ olduğundan

$$h + y + t = x + z + t$$

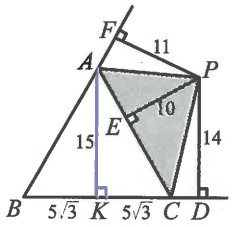
eşitliği gereğince $h = x - y + z$ bulunur.

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$PD \perp BC$
$PE \perp CA$
$PF \perp AB$
$|PD| = 14$ br
$|PE| = 10$ br
$|PF| = 11$ br
olduğuna göre
Alan(CPA) *kaç* br^2 *dir?*



A) $50\sqrt{3}$ B) $45\sqrt{3}$ C) $40\sqrt{3}$ D) $35\sqrt{3}$ E) $30\sqrt{3}$

Çözüm: Yukarda kanıtlandığı üzere $|PD| + |PF| - |PE|$ eşkenar üçgenin bir yüksekliğinin uzunluğunu verir.



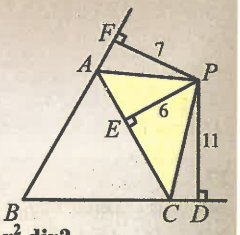
O halde yüksekliğin boyu $14 + 11 - 10 = 15$ br olmalıdır. İster eşkenar üçgende yükseklik formülünden isterseniz de şekildeki AKC dik üçgenini kullanarak $|AC| = 10\sqrt{3}$ br bulunur. O halde

$$\text{Alan}(CAP) = \frac{10\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 50\sqrt{3} \text{ br}^2$$

olmalıdır.

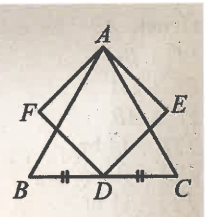
Doğru cevap: A.

24.
ABC bir eşkenar üçgen
$PD \perp BC$
$PE \perp CA$
$PF \perp AB$
$|PD| = 11$ br
$|PE| = 6$ br
$|PF| = 7$ br
olduğuna göre Alan(APC) kaç br^2 dir?



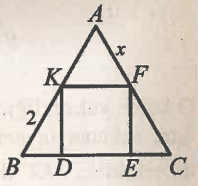
A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) $6\sqrt{3}$ D) 12 E) $12\sqrt{3}$

25.
$[ABC]$ bir eşkenar üçgen
$[AFDE]$ bir kare
$|BD| = |DC|$
$|AF| \cdot |AB| = 4\sqrt{6}$ br^2
olduğuna göre $|BD|$ kaç birimdir?



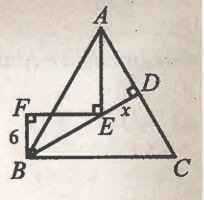
A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

26.
$[ABC]$ bir eşkenar üçgen
$[DEFK]$ bir kare
$K \in AB, F \in AC$
$|KB| = 2$ br
olduğuna göre
$|AF| = x$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ **C) $\sqrt{3}$** D) 2 E) $\sqrt{5}$

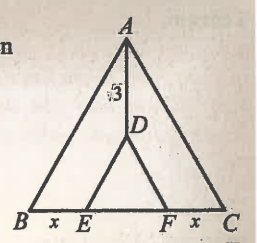
27.
$[ABC]$ bir eşkenar üçgen
$BD \perp AC, AE \perp EF$
$EF \perp FB, FB \perp BC$
$|FB| = 6$ br
olduğuna göre
$|ED| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{2}$ **E) 6**

28.
$[ABC]$ ve $[DEF]$ birer eşkenar üçgen
$|AD| = \sqrt{3}$ br
$|BE| = |FC| = x$ br

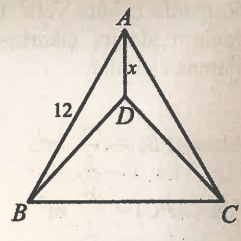
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{3}$

29.
$[ABC]$ bir eşkenar üçgen
D bu üçgenin iç bölgesinde
$[BDC]$ bir ikizkenar dik üçgen
$|AB| = 12$ br

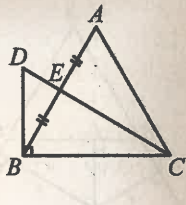
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{3}$ D) $6+\sqrt{3}$ **E) $6\sqrt{3}-6$**

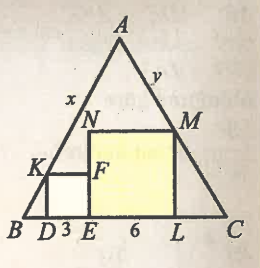
30.
$[ABC]$ bir eşkenar üçgen
$[DBC]$ bir dik üçgen
$DB \perp BC$
$DC \cap AB = \{E\}$
$|AE| = |EB|$

olduğuna göre $\dfrac{|CE|}{|ED|}$ oranı kaçtır?



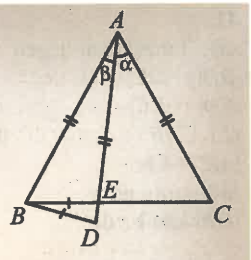
A) 6 B) 4 **C) 3** D) $2\sqrt{3}$ E) 2

31.
ABC bir eşkenar üçgen
$KDEF$ ve $NELM$ birer kare
$K \in [AB]$, $M \in [CA]$
$|DE| = 3$ br
$|EL| = 6$ br
$|AK| = x$ br
$|AM| = y$ br
olduğuna göre
$x + y$ toplamı kaçtır?



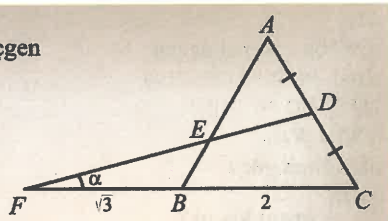
A) 12 B) 14 C) 16 **D)** 18 E) 20

32.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AB| = |AD| = |AC|$
$|BE| = |BD|$
$m(CAD) = \alpha$
$m(BAD) = \beta$
olduğuna göre $\alpha - \beta$
farkı kaç derecedir?



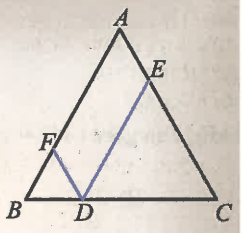
A) 5 B) 10 C) 15 **D)** 20 E) 25

33.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = |DC|$
$CB \cap DE = \{F\}$
$|FB| = \sqrt{3}$ br
$|BC| = 2$ br
$m(CFD) = \alpha$
olduğuna göre α kaçtır?



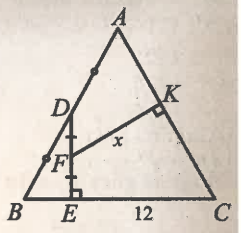
A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{18}$ C) $\frac{\pi}{15}$ **D)** $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{10}$

34.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$DE \,//\, BA$
$DF \,//\, CA$
olduğuna göre ABC üçgeninin
çevresi $|DE| + |DF|$ toplamının
kaç katıdır?



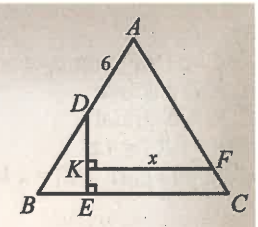
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

35.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = |DB|$
$DE \perp BC$
$|DF| = |FE|$
$FK \perp CA$
$|EC| = 12$ br
$|FK| = x$ br
olduğuna göre x^2 kaçtır?



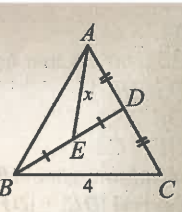
A) 48 B) 49 C) 64 **D)** 75 E) 125

36.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = |DB| = 6$ br
$|AF| = 5 \cdot |FC|$
$DE \perp BC$
$FK \perp DE$
olduğuna göre
$|KF| = x$ kaç br dir?



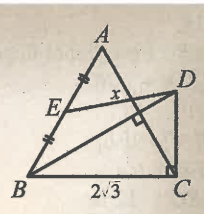
A) $\frac{13}{2}$ B) 7 C) $\frac{15}{2}$ **D)** 8 E) $\frac{17}{2}$

37.
ABC bir eşkenar üçgen
$|CD| = |DA|$
$|BE| = |ED|$
$|BC| = 4$ br
olduğuna göre $|AE| = x$ kaç br dir?



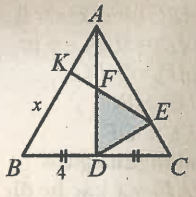
A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{5}$

38.
ABC bir eşkenar üçgen
$BD \perp CA$
$BC \perp CD$
$|AE| = |EB|$
$|BC| = 2\sqrt{3}$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



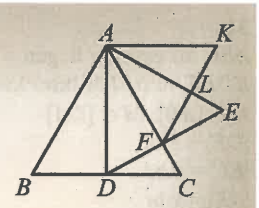
A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{6}$ E) 2

39.
ABC ve DEF birer eşkenar üçgen
A, F, D doğrusal
E, F, K doğrusal
$|BD| = |DC| = 4$ br
olduğuna göre $|BK| = x$ kaç br dir?



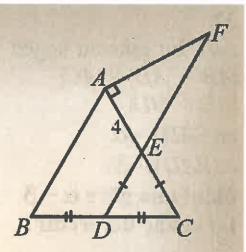
A) 6 B) $\frac{11}{2}$ C) 5 D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{5}$

40.
ABC, ADE ve AFK
birer eşkenar üçgen
$|BD| = |DC|$
olduğuna göre
$\frac{|BD|}{|FL|}$ **oranı kaçtır?**



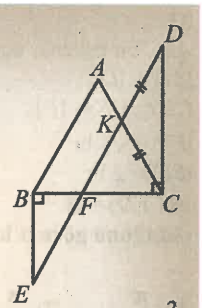
A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

41.
ABC bir eşkenar üçgen
$|BD| = |DC|$
$|ED| = |EC|$
$CA \perp AF$
$|AE| = 4$ br
olduğuna göre
$|DF|$ kaç br dir?



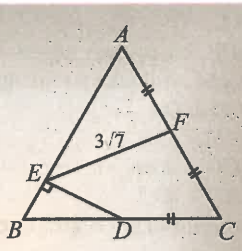
A) 12 B) $4+4\sqrt{3}$ C) 8 D) $2+4\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

42.
ABC bir eşkenar üçgen
$EB \perp BC$
$BC \perp CD$
$|CK| = |KD|$
olduğuna göre
$\frac{|ED|}{|AB|}$ **oranı kaçtır?**



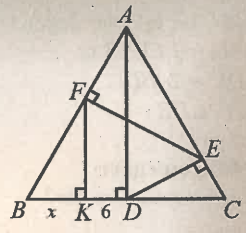
A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{3}{2}$

43.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AF| = |FC| = |CD|$
$DE \perp AB$
$|EF| = 3\sqrt{7}$ br
olduğuna göre
$|EB|$ kaç br dir?



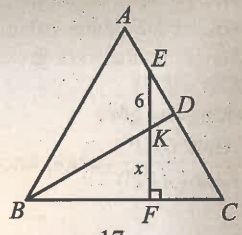
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

44.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \perp BC$
$DE \perp CA$
$EF \perp AB$
$FK \perp BC$
$|KD| = 6$ br
olduğuna göre
$|BK| = x$ kaç br dir?



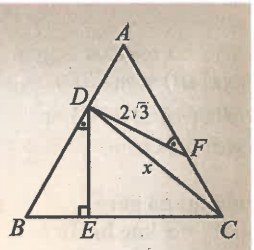
A) 12 **B) 10** C) 9 D) 8 E) 6

45.
ABC bir eşkenar üçgen
$|DC| = 2 \cdot |AE| = 2 \cdot |ED|$
$EF \perp BC$
$|EK| = 6$ br
olduğuna göre
$|KF| = x$ kaç br dir?



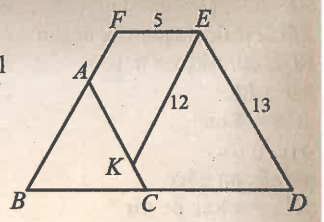
A) 7 **B)** $\frac{15}{2}$ C) 8 D) $\frac{17}{2}$ E) 9

46.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(AFD) = m(BDE)$
$DE \perp BC$
$|DE| = |DF| = 2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



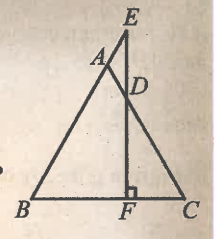
A) 1 B) $\sqrt{7}$ C) 2 D) $2\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{7}$

47.
ABC bir eşkenar üçgen
B, A, F noktaları doğrusal
$FE \,//\, BD$
$EK \,//\, BF$
$ED \,//\, AC$
$|FE| = 5$ br
$|EK| = 12$ br
$|ED| = 13$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) 5 B) $\frac{11}{2}$ **C)** 6 D) $\frac{13}{2}$ E) 7

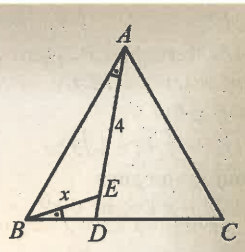
48.
ABC bir eşkenar üçgen
B, A, E noktaları doğrusal
$|DC| = 3 \cdot |AD|$
$EF \perp BC$
olduğuna göre $\frac{|BF|}{|FC|}$ **oranı kaçtır?**



A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{7}{4}$ **C)** $\frac{5}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

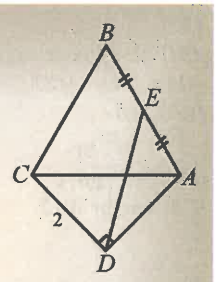
49.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(DAB) = m(EBD)$
Alan$(ABC) = 7\sqrt{3}$ br^2
$|AE| = 4$ br

olduğuna göre
$|BE| = x$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ **D)** 2 E) 3

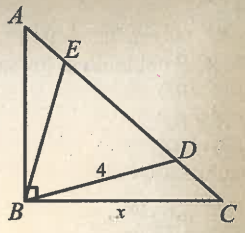
52.
ABC bir eşkenar üçgen
CDA bir ikizkenar dik üçgen
$CD \perp DA$
$|BE| = |EA|$
$|CD| = 2$ br
$|AE| = |EC|$
olduğuna göre $|DE|$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 **D)** $1+\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

50.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
BDE bir eşkenar üçgen
$AB \perp BC$
$|BD| = 4$ br

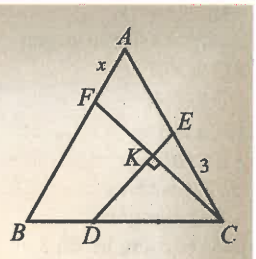
olduğuna göre
$|BC| = x$ kaç br dir?



A) $\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ **D)** $2\sqrt{6}$ E) 5

53.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AE| = |EC| = 3$ br
$|DC| = 2 \cdot |BD|$
$CF \perp DE$

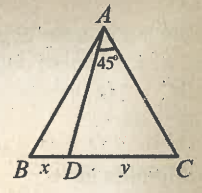
olduğuna göre
$|AF| = x$ kaç br dir?



A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{11}{7}$ C) $\frac{10}{7}$ D) $\frac{9}{7}$ E) $\frac{8}{7}$

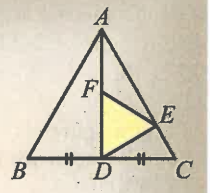
51.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(CAD) = 45°$
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br

olduğuna göre x/y oranı kaçtır?



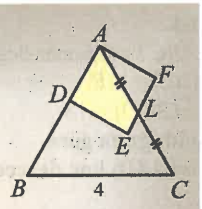
A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

54.
ABC ve DEF birer eşkenar üçgen
A, F, D noktaları doğrusal
$|BD| = |DC|$
olduğuna göre
$\frac{\text{Alan}(DEF)}{\text{Alan}(ABC)}$ **oranı kaçtır?**



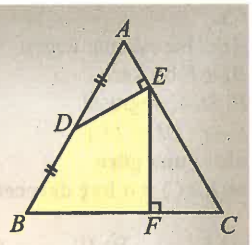
A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{3}{16}$

55.
ABC bir eşkenar üçgen
$ADEF$ bir kare
$|AL| = |LC|$
$|BC| = 4$ br
olduğuna göre
Alan($ADEF$) kaç br^2 dir?



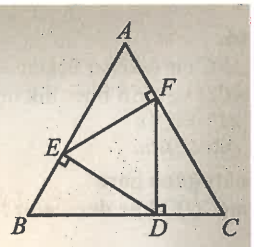
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

56.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = |DB|$
$DE \perp AC$, $EF \perp BC$
olduğuna göre taralı dörtgensel bölgenin alanı eşkenar üçgenin alanının kaçta kaçıdır?



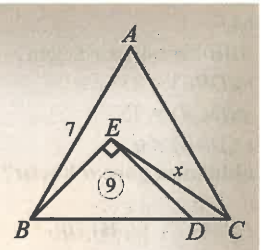
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{8}{19}$ E) $\frac{19}{32}$

57.
ABC bir eşkenar üçgen
$DE \perp AB$
$EF \perp AC$
$FD \perp BC$
olduğuna göre
$\frac{\text{Alan}(DEF)}{\text{Alan}(ABC)}$ **oranı kaçtır?**



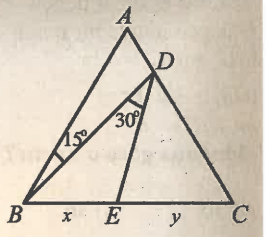
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3}{16}$

58.
ABC bir eşkenar üçgen,
$BE \perp ED$
$|BE| = |ED|$
Alan(EBD) = 9 br^2
$|AB| = 7$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



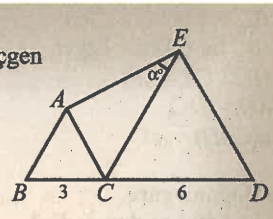
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) 4 E) 5

59.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(ABD) = 15°$
$m(BDE) = 30°$
$|BE| = x$ br
$|EC| = y$ br
olduğuna göre
$\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



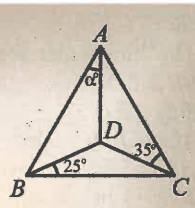
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

60.
ABC ve CDE birer eşkenar üçgen
B, C, D noktaları doğrusal
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 6$ br
olduğuna göre $m(CEA) = \alpha$ kaç derecedir?



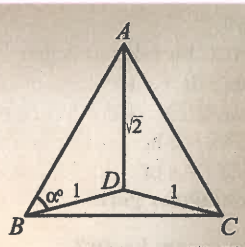
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

61.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(DBC) = 25°$
$m(DCA) = 35°$
$m(DAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 B) 20 C) 25 **D) 30** E) 35

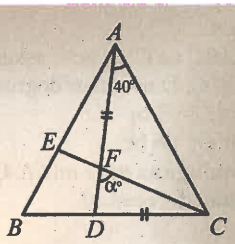
62.
ABC bir eşkenar üçgen
D üçgen içinde bir nokta
$|BD| = |DC| = 1$ br
$|DA| = \sqrt{2}$ br
$m(ABD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 36 C) 40 **D) 45** E) 50

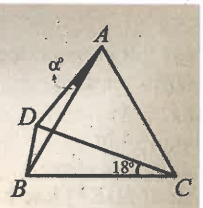
63.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \cap CE = \{F\}$
$|AF| = |DC|$
$m(CAD) = 40°$

olduğuna göre
$m(CFD)$ kaç derecedir?



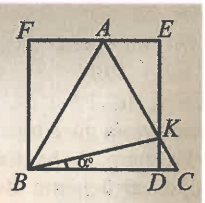
A) 60 B) 70 **C) 80** D) 90 E) 100

64.
ABC bir eşkenar üçgen
$|DC| = |AB|$
$m(BCD) = 18°$
olduğuna göre
$m(BAD)$ kaç derecedir?



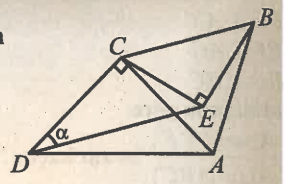
A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 36

65.
ABC bir eşkenar üçgen
$BDEF$ bir kare
B, D, C doğrusal
$CA \cap DE = \{K\}$
olduğuna göre
$m(KBC) = \alpha$ kaç derecedir?



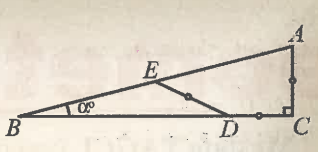
A) 5 B) 10 **C) 15** D) 18 E) 22,5

66.
ABC bir eşkenar üçgen
ACD ve CEB birer dik üçgen
$|AC| = |CD|$
$|CE| = |EB|$
olduğuna göre
$m(CDE)$ kaç derecedir?



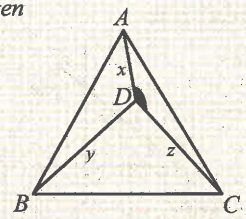
A) 15 B) 22,5 **C) 30** D) 36 E) 45

67.
ABC bir üçgen
$BC \perp CA$
$|AC| = |CD| = |DE|$
$m(CDE) = 150^\circ$
olduğuna göre
$m(B) = \alpha$ kaç derecedir?



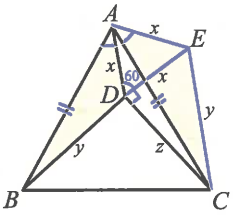
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 36 E) 45

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$|DA| = x$ br
$|DB| = y$ br
$|DC| = z$ br
$x^2 + z^2 = y^2$
olduğuna göre
m(ADC) kaç derecedir?



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

Çözümü: $[AD]$ kenarı üzerine üçgenin dışına doğru şekildeki gibi bir eşkenar üçgen çizelim.



$m(BAD) = m(CAE)$, $|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |AE|$ olduğundan BAD ile CAE eş olur. O halde $|EC| = y$ br olur. EDC üçgeninin kenarları x br, z br ve y br olup Pisagor Teoremi'ni sağladığı görülürse $m(EDC) = 90^\circ$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla

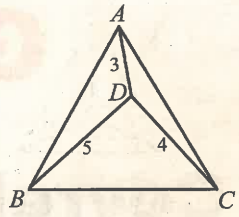
$$m(ADC) = m(ADE) + m(EDC)$$
$$= 60^\circ + 90^\circ$$
$$= 150^\circ$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Bu teoremin tersi de doğrudur. Yani ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde alınan bir D noktası için
$m(ADC) = 150^\circ$ ise $|AD|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$
olur. Kanıt nerdeyse aynı, aşağıdaki çözümlü örneği inceleyiniz.

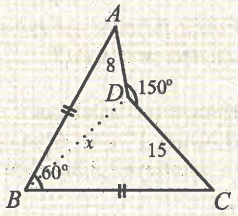
68.



ABC eşkenar üçgen ise
$m(ADC)$ kaç derecedir?

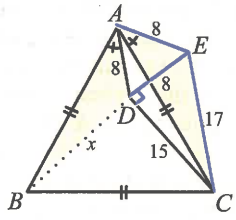
150°

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$m(CDA) = 150^\circ$
$m(ABC) = 60^\circ$
$|AB| = |BC|$
$|DA| = 8$ br
$|DC| = 15$ br
olduğuna göre $|DB|$ kaç br dir?



A) 15 B) 16 C) 17 D) 19 E) 23

Çözüm: A, B, C köşelerinin bir eşkenar üçgen belirttiği aşikar sanırım. Biz hemen diğer örneklerde olduğu gibi ADE eşkenar üçgenini oluşturalım. $m(ADE) = 60^\circ$ olduğundan $m(EDC) = 90^\circ$ olacaktır.



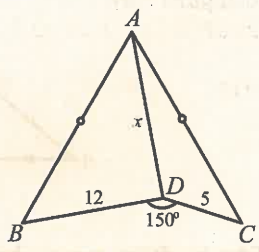
Bu durumda EDC dik üçgen çıktığından Pisagor teoremi gereği $|EC| = 17$ br bulunur. Diğer yandan

$$m(BAD) = m(CAE)$$
$$|AB| = |AC|$$
$$|AD| = |AE|$$

olduğundan BAD ile CAE eş olur. Öyleyse $|BD| = |EC| = 17$ br olmalıdır.

Doğru cevap: C.

69.
$ABCD$ bir dörtgen
$m(BAC) = 60^\circ$
$m(BDC) = 150^\circ$
$|AB| = |AC|$
$|DB| = 12$ br
$|DC| = 5$ br
$|DA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



13

Geometri Notları

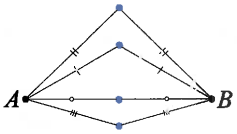
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Çevrel Çember

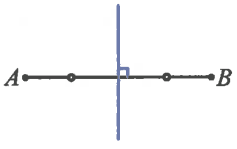
Bu yazımıza, bir geometrik yer problemiyle başlayacağız:

Farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?

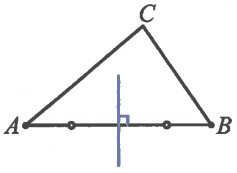
Hemen bir taslak şekil çizelim. Farklı iki noktamız A ve B olsun. A'ya ve B'ye eşit uzaklıkta görünen birkaç nokta işaretleyelim bakalım, ne oluşturuyorlarmış?



Şekilden de görüldüğü üzere; bu noktalar, sanki doğrusallar yani ortak tek bir doğru üzerindeler... Ve buna aday olan doğru, görülen o ki $[AB]$'nin de orta noktasından geçiyor. Gerçekten de geçmeli, çünkü $[AB]$'nin orta noktası da A'ya ve B'ye eşit uzaklıktadır. Diğer yandan, $[AB]$'nin orta noktası dışında hangi noktayı A'ya ve B'ye birleştirirsek birleştirelim, bir ikizkenar üçgen çıktığını ve $[AB]$'nin bu ikizkenar üçgenin tabanı olduğunu fark etmiş olmalısınız. O zaman bu doğru ikizkenar üçgenin tepesine ait kenarortay olmalı! Bu yüzden de $[AB]$'yi dik kesmelidir.

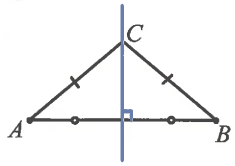


İşte, yukardaki gibi, bir doğru parçasını tam orta noktasından dik keserek geçen doğruya **orta dikme** denir.

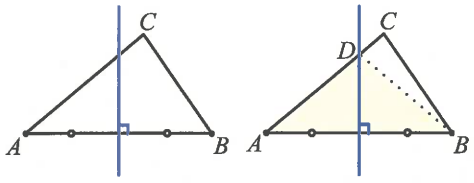


Eğer bu doğru parçası, herhangi bir üçgenin kenarıysa, bu doğru parçasının orta dikmesine **kenar orta dikme** deriz.

Tahmin edebileceğiniz üzere,

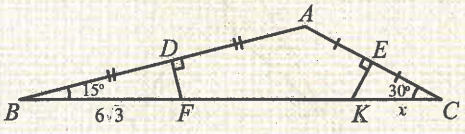


ikizkenar üçgenlerde, tabanın orta dikmesi tam tepeden geçer ama



ikizkenar olmayan üçgenlerde yan kenarlardan birini keser. Üzülmeyin, yine de bir ikizkenar oluşur. Yan kenarı kestiği noktaya D dersek, DAB üçgeni ikizkenardır.

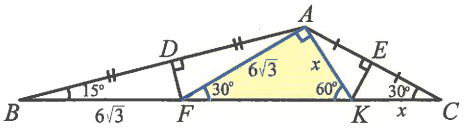
Örnek. *B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla $15°$ ve $30°$ olan ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına ait kenar orta dikmeleri $[BC]$ kenarını sırasıyla F ve K noktasında kesmektedir.*



$|BF| = 6\sqrt{3}$ br olduğuna göre $|KC| = x$ kaç br dir?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

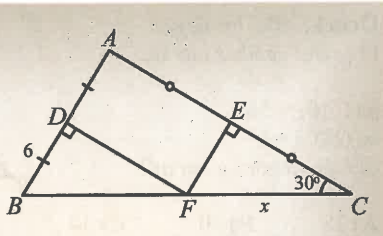
Çözüm: Derhal $[AF]$ ve $[AK]$'yi çizelim. BFA ve AKC üçgenlerinin ikizkenar olacaklarını biliyoruz.



$m(AFK) = 30°$ ve $m(FKA) = 60°$ bulunduğundan, KAF üçgeni bir $30°$-$60°$-$90°$ üçgenidir. $|AF| = 6\sqrt{3}$ br olduğundan $|AK| = 6$ br olmalıdır.

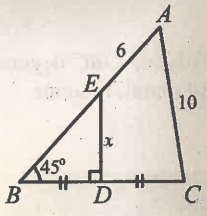
Doğru cevap: A.

1.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DA|$
$|AE| = |EC|$
$FE \perp CA$
$FD \perp AB$
$m(C) = 30°$
$|BD| = 6$ br
olduğuna göre $|FC| = x$ kaç br dir?



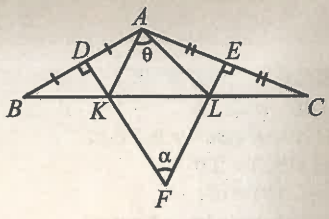
A) 18 **B) 12** C) $6\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$ E) 6

2.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = 45°$
$ED \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|EA| = 6$ br
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre
$|ED| = x$ kaç br dir?



A) $4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 8 D) 6 E) 4

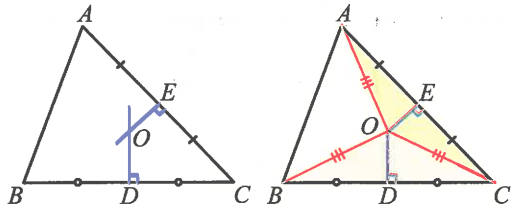
3.
ABC bir üçgen
$|AD| = |DB|$
$|AE| = |EC|$
$FD \perp AB$
$FE \perp CA$
$m(LAK) = \theta°$
$m(DFE) = \alpha°$
olduğuna göre θ'nın α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



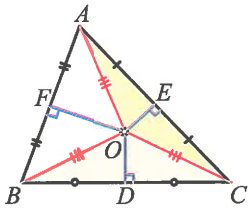
A) $\pi - \alpha$ **B) $\pi - 2\alpha$** C) α D) 2α E) $2\pi - 3\alpha$

Üç Kenarın Orta Dikmesi Kesişir! Bir üçgenin üç kenarı olduğundan, üç tane kenar orta dikmesi vardır. Üçgen, nasıl bir üçgen olursa olsun, üç kenarının orta dikmesi daima kesişir. Şimdi bunu kanıtlayalım:

Herhangi bir ABC üçgeni çizelim. $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E olsun. Bu iki kenarın orta dikmelerinin kesiştiği noktaya da O diyelim.

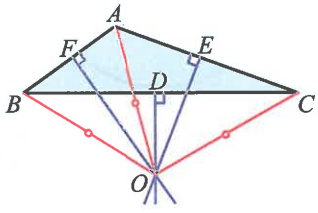


Şimdi O noktasını A, B, C köşelerine birleştirelim. OBC ve OCA üçgenlerinde O'dan inen yükseklikler tabanı iki eşit parçaya ayırdığından, bu üçgenler ikizkenardır. Yani $|OB| = |OC| = |OA|$ olur.

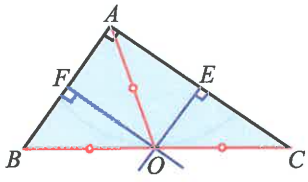


OAB üçgeni de ikizkenar çıktığından, O'dan $[AB]$'ye indirilen yükseklik $[AB]$'yi iki eşit uzunlukta parçaya ayıracaktır. Başka bir deyişle $[AB]$'nin orta dikmesi de O'dan geçer.

Yalnız burada önemli bir noktaya değinmekte fayda var:



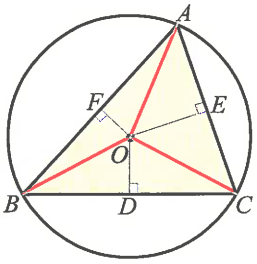
Eğer ABC üçgeni geniş açılı bir üçgen olursa, üç kenarın orta dikmesi yine kesişir fakat üçgenin içinde değil, dışında kesişir.



Eğer ABC dik üçgen olursa, üç kenarın orta dikmesi hipotenüsün orta noktasında kesişir. Muhteşem üçlü!

BİR ÜÇGENİN ÇEVREL ÇEMBERİ ve MERKEZİ

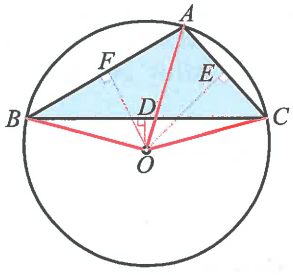
Verilmiş sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan düzlemdeş noktaların geometrik yerine **çember** dendiğini daha önce söylemiştik. Verilen sabit noktaya **merkez**, eşit uzaklığa da **yarıçap** deniyordu. Şimdi, üç kenarın orta dikmesinin kesiştiği O noktasına bir daha bakalım.



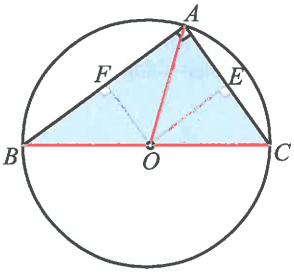
Görülüyor ki; O noktası A, B ve C köşelerine eşit uzaklıkta... O halde A, B, C noktalarından geçen çember çizilirse, O noktası bu çemberin merkezi olacaktır. $|OA|$, $|OB|$ ve $|OC|$ değerlerinin her biri de yarıçap uzunluğunu verecektir. Uzun lafın kısası, hangi teoremi kanıtladığımızı not edelim:

Bir üçgenin üç kenarının orta dikmeleri, üçgenin çevrel çemberinin merkezinde kesişir.

Yukarda, üçgeni dar açılı gibi çizdiğimiz için O noktası üçgenin iç bölgesinde yer aldı. Halbuki O noktası bazen üçgenin dışında hatta üstünde de olabilir.



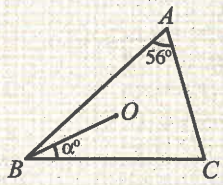
Üçgen geniş açılı olduğunda, kenar orta dikmeler üçgenin dışında kesişeceğinden, O noktası dışarıda olur.



Üçgen dik olduğunda, kenar orta dikmeler hipotenüsün orta noktasında kesişeceğinden, O noktası üçgenin üstünde olur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
O çevrel çember merkezi

$m(CAB) = 56°$
$m(OBC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?

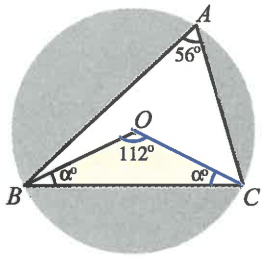


A) 28 B) 30 C) 34 D) 36 E) 44

Çözüm: Derhal $[OC]$'yi çizelim.

$$m(COB) = 2 \cdot m(CAB) = 112°$$

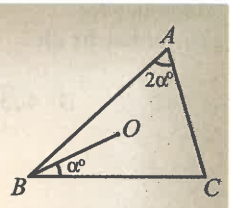
olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $|OB| = |OC|$ olduğunu da...



O halde OBC üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından $\alpha = 34$ olarak bulunur.

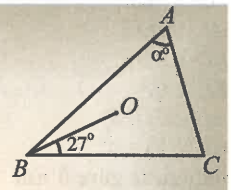
Doğru cevap: C.

4.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$m(OBC) = \alpha°$
$m(CAB) = 2\alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



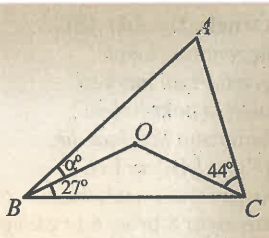
A) 15 B) 20 C) 25 **D) 30** E) 45

5.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$m(OBC) = 27°$
$m(CAB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



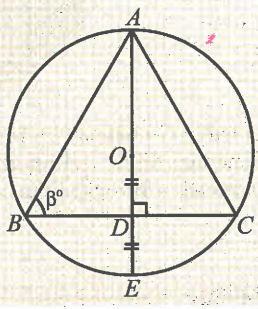
A) 45 B) 54 C) 57 D) 60 **E) 63**

6.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$m(OBC) = 27°$
$m(OCA) = 44°$
$m(OBA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



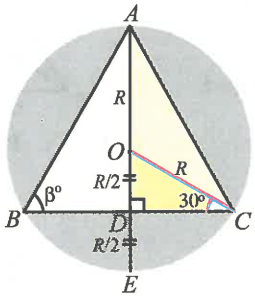
A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Örnek. *ABC bir üçgen*
O çevrel çember merkezi
$O \in [AD]$
$[AE] \perp [BC]$
$|OD| = |DE|$
$m(ABC) = \beta°$
olduğuna göre β kaçtır?



A) 45 B) 52,5 C) 60
D) 67,5 E) 75

Çözüm: Evvela *ABC* üçgeninin ikizkenar olduğu fark edilmelidir. Çünkü; $[BC]$'nin orta dikmesi üçgenin bir yüksekliği olup yükseklik tabanı iki eşit parçaya ayırmış.

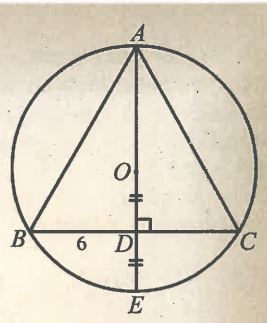


Devam edelim: *O* merkez olduğundan $|OA| = R$ br dersek $|OD| = |DE| = \frac{R}{2}$ br olur. Şimdi *O* ile *C* noktalarını birleştirelim. $[OC]$ de yarıçap olduğundan $|OC| = R$ olur.
O halde *ODC* bir 30°-60°-90° üçgenidir. $m(DCO) = 30°$ ve $m(COD) = 60°$ olup *AOC* üçgeni de ikizkenar olduğundan $m(OCA) = 30°$ olur. Sonuçta *ABC* üçgeninde $m(C) = 60°$ diye $m(B) = 60°$ olur.

Doğru cevap: C.

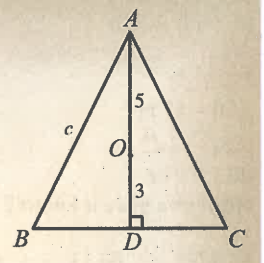
7.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$O \in [AD]$
$[AE] \perp [BC]$
$|OD| = |DE|$
$|BD| = 6$ br

olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç birimdir?



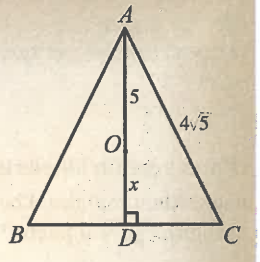
A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 8 D) $8\sqrt{3}$ E) 10

8.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$O \in [AD]$
$[AD] \perp [BC]$
$|AO| = 5$ br
$|OD| = 3$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre *c* kaçtır?



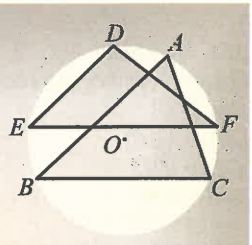
A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 8 **D)** $4\sqrt{5}$ E) 10

9.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$O \in [AD]$
$[AD] \perp [BC]$
$|AO| = 5$ br
$|AC| = 4\sqrt{5}$ br
$|OD| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



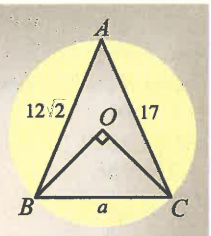
A) 2 B) $\sqrt{5}$ **C)** 3 D) $\sqrt{10}$ E) 4

10.
ABC ve *DEF* birer üçgen
O çevrel çember merkezi
AB // *DE*
BC // *EF*
$|AC| = 2x + 5$ br
$|DF| = 3x + 2$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 **E)** 3

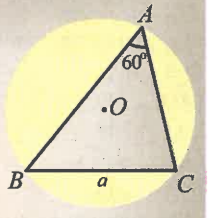
11.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
BO ⊥ *OC*
$|CA| = 17$ br
$|AB| = 12\sqrt{2}$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre *a* kaçtır?



A) 12 **B)** 13 C) 14 D) 15 E) 16

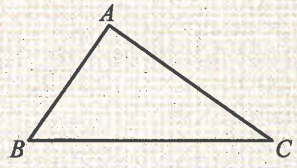
12.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$m(A) = 60°$
$|BC| = a$ br

***O*'nun üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı $12\sqrt{3}$ br olduğuna göre *a* kaçtır?**



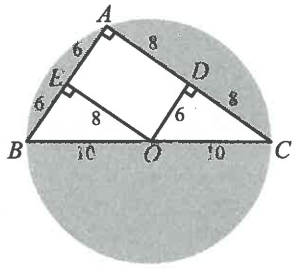
A) 4 B) 6 C) 8 **D)** 12 E) 24

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olan O noktası [BC] kenarının üzerindedir. O'nun [AB] ve [AC] kenarlarına uzaklıkları sırasıyla* 8 br *ve* 6 br *olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?*



A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

Çözüm: Çevrel çember merkezinin üçgenin üzerinde olması ancak ve ancak üçgenin dik olmasıyla mümkündü. Merkez [*BC*] üstünde olduğundan *A* açısı diktir.

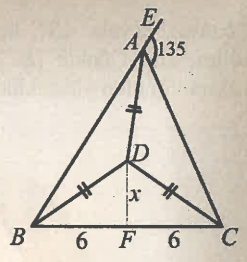


O halde *O* noktası tam [*BC*]'nin ortasındadır. *O*'dan yan kenarlara dikler indirip uzunlukları soruda verildiği gibi yazarsak *ABC* üçgeninin çevresi 48 br olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

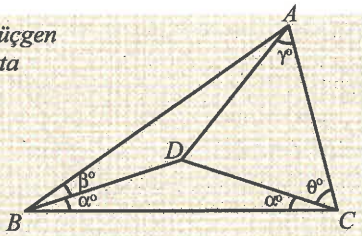
13.
ABC bir üçgen
B, *A*, *E* noktaları doğrusal
$m(CAE) = 135°$
$|DA| = |DB| = |DC|$
$|BF| = |FC| = 6$ br

olduğuna göre
$|DF| = x$ kaç br dir?



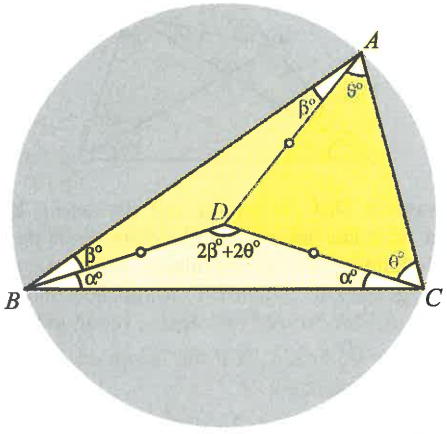
A) 3 B) 4 C) 5 **D)** 6 E) 7

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$m(ABD) = \beta^\circ$
$m(DBC) = \alpha^\circ$
$m(BCD) = \alpha^\circ$
$m(DCA) = \theta^\circ$
$m(CAD) = \gamma^\circ$
$\alpha + \beta + \theta = 90$
olduğuna göre γ *değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) α B) β C) θ D) $\alpha+\beta$ E) 2α

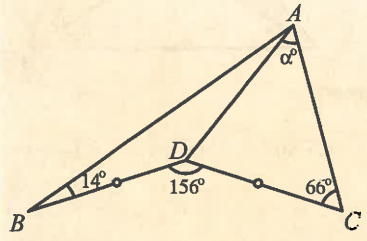
Çözümü: *DBC* ikizkenar üçgeninin ikiz kenarlarını yarıçap, *D* köşesini de merkez kabul eden bir çizmek istiyoruz. Derdimiz şu: Bu çember *A* noktasından geçer mi geçmez mi? Geçebilmesinin şartı $m(CDB) = 2\cdot m(CAB)$ olmasıdır, bakalım öyle mi?



Verilen $\alpha + \beta + \theta = 90$ eşitliğinden $m(CAB) = \beta^\circ + \theta^\circ$ ve $m(CDB) = 2\beta^\circ + 2\theta^\circ$ çıkar. Bu da çizilmek istenen çemberin *A* köşesinden geçeceği anlamını taşır. Şu durumda *D* noktasının *ABC* üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olduğu anlaşılır. O halde $|DA| = |DB| = |DC|$ olmalıdır. Bu yüzden $\gamma = \theta$ olmalıdır.

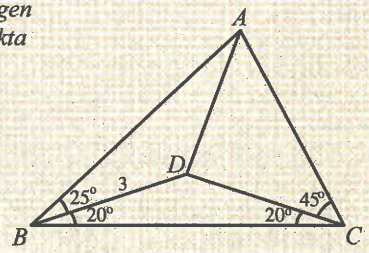
Doğru cevap: C.

14.



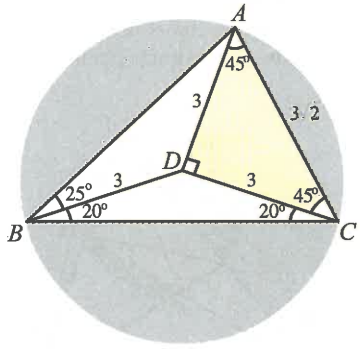
α kaçtır?

Örnek. *ABC bir üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$m(ABD) = 25^\circ$
$m(DBC) = 20^\circ$
$m(BCD) = 20^\circ$
$m(DCA) = 45^\circ$
$|BD| = 3$ br
olduğuna göre
$|AC|$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 5 E) 6

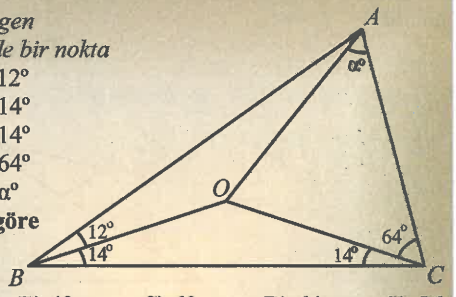
Çözüm: Evvela $m(CDB) = 140^\circ$ ve $m(CAB) = 70^\circ$ olduğunu not edelim.



ABC üçgeninde hem $|DB| = |DC|$ hem de $m(CDB) = 2\cdot m(CAB)$ olduğundan *D* noktası *ABC* üçgeninin çevrel çember merkezidir. Bu yüzden $|DA| = |DC| = 3$ br ve $m(CAD) = 45^\circ$ olur. Sonuçta *ADC* bir ikizkenar dik üçgen bulunduğundan $|AC| = 3\sqrt{2}$ br olmalıdır.

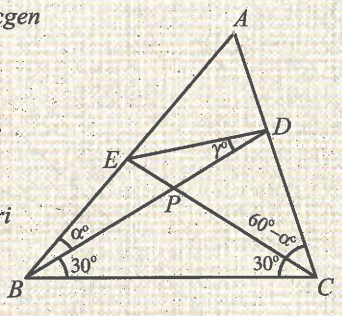
Doğru cevap: B.

15.
ABC bir üçgen
O iç bölgede bir nokta
$m(ABO) = 12^\circ$
$m(OBC) = 14^\circ$
$m(BCO) = 14^\circ$
$m(OCA) = 64^\circ$
$m(CAO) = \alpha^\circ$
olduğuna göre
α kaçtır?



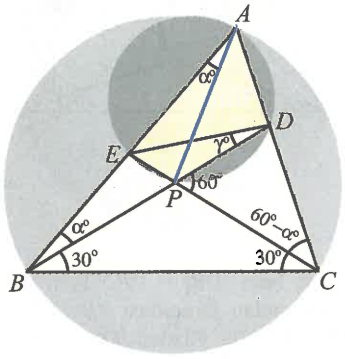
A) 26 B) 42 C) 60 **D) 64** E) 76

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$BD \cap CE = \{P\}$
$m(ABD) = \alpha^\circ$
$m(DBC) = 30^\circ$
$m(BCE) = 30^\circ$
$m(ECA) = 60^\circ - \alpha^\circ$
$m(EDB) = \gamma^\circ$
olduğuna göre γ *değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) α B) β C) θ D) $30-\alpha$ E) $60-\theta$

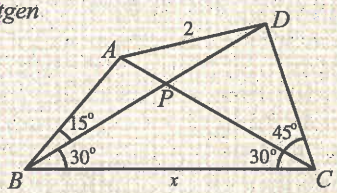
Çözümü: Soruda verilen değerlerin bir önceki soru tipinin şartlarına uyduğunu fark edelim. Bu yüzden P noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezidir. Hemen aşağıdaki şekildeki gibi çemberimizi çizelim.



$|PA| = |PB|$ olduğundan $m(PAB) = \alpha^\circ$ olmalıdır. Diğer yandan $AEPD$ dörtgeninde A ile P açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan bu dörtgen bir kiriş dörtgenidir. O halde $m(PDE) = m(PAE)$ olması gerektiğinden $\gamma = \alpha$ olmalıdır.

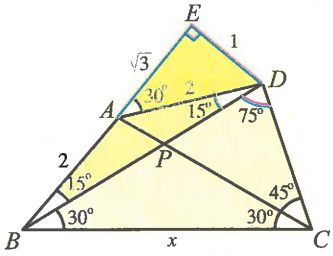
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$[AC] \cap [BD] = \{P\}$
$m(ABD) = 15^\circ$
$m(DBC) = 30^\circ$
$m(BCA) = 30^\circ$
$m(ACD) = 45^\circ$
$|AD| = 2$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Çözüm: $ABCD$ dörtgenindeki açı ölçüsü verilerinin bir önceki soru tipiyle uyuştuğunu fark ediniz. Demek ki $m(BAD) = 15^\circ$ ve bu yüzden DAB bir ikizkenar üçgenmiş. O halde $|BA| = |AD| = 2$ br olur.

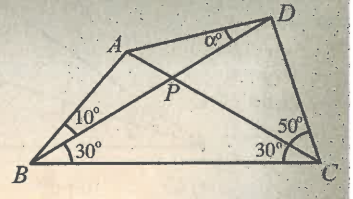


Diğer yandan DBC üçgeninin açı ölçülerine bakılırsa onun da ikizkenar olduğu görülecektir. O halde $|BD| = |BC|$ olduğundan $|BD|$'nin bulunması sorunun çözülmesi anlamına gelecektir. D'den BA'ya indirilen dikme ayağı E olsun. DEA bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|ED| = 1$ br ve $|EA| = \sqrt{3}$ br dir. DEB dik üçgeninde Pisagor teoremi yazıp x'i bulacağız.

$$x^2 = 1^2 + (2+\sqrt{3})^2$$
$$x^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{12}$$
$$x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

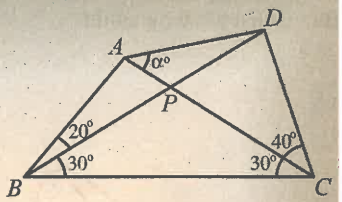
Doğru cevap: D.

16.
ABCD bir dörtgen
$[AC] \cap [BD] = \{P\}$
$m(ABD) = 10^\circ$
$m(DBC) = 30^\circ$
$m(BCA) = 30^\circ$
$m(ACD) = 40^\circ$
$m(DAC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

17.
ABCD bir dörtgen
$[AC] \cap [BD] = \{P\}$
$m(ABD) = 10^\circ$
$m(DBC) = 30^\circ$
$m(BCA) = 30^\circ$
$m(ACD) = 40^\circ$
$m(DAC) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?

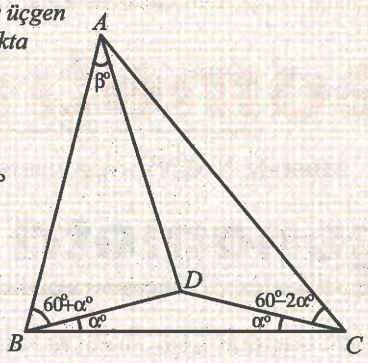


A) 40 B) 45 C) 50 D) 60 E) 70

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
D iç bölgede bir nokta

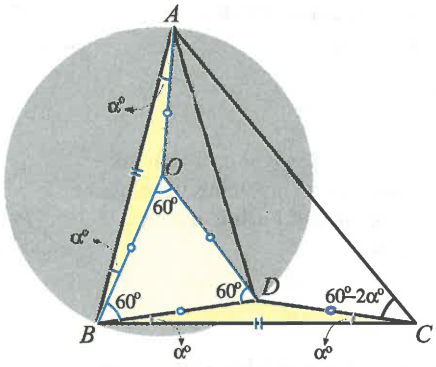
$m(ABD) = 60° + \alpha°$
$m(DBC) = \alpha°$
$m(BCD) = \alpha°$
$m(DCA) = 60° - 2\alpha°$
$m(DAB) = \beta°$

olduğuna göre β *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) α B) 2α C) $30 - \alpha$ D) 30 E) $30 + \alpha$

Çözümü: Bu soruda ilk fark edilmesi gereken şey, *ABC* üçgeninde *A* ile *C* açılarının eşliği yani *ABC*'nin bir ikizkenar üçgen olmasıdır.



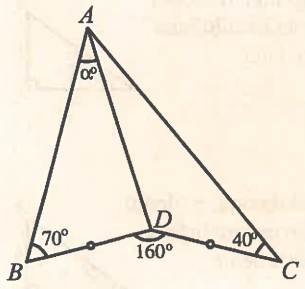
$|BA| = |BC|$ olduğundan *BDC* ikizkenar üçgenini, yukardaki gibi, *BOA* üçgeninin bulunduğu yere kopyalayalım. $|DB| = |DC| = |OB| = |OA|$ eşitliklerini not edelim. Diğer yandan $m(DBO) = 60°$ ve $|BO| = |BD|$ olduğundan *OBD* bir eşkenar üçgendir. O halde elimizde

$$|OA| = |OB| = |OD|$$

eşitlikleri var demektir. Bu da *O* noktasının *ABD* üçgeninin çevrel çember merkezi olduğunu anlatır. Bu yüzden *DAB* açısının ölçüsü *DOB* açısının ölçüsünün yarısı yani 30° olmalıdır.

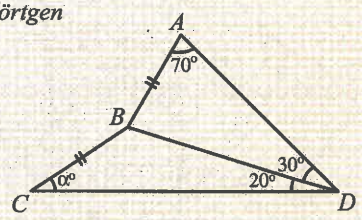
Doğru cevap: D.

18.



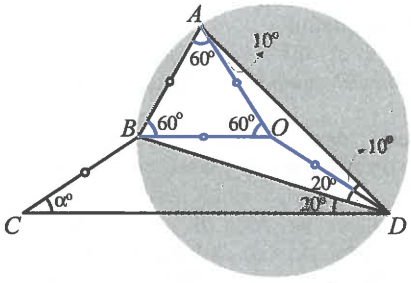
α kaçtır?

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|AB| = |BC|$
$m(DBC) > 90°$
$m(BAD) = 70°$
$m(ADB) = 30°$
$m(BDC) = 20°$
$m(DCB) = \alpha°$
olduğuna göre
α *kaçtır?*



A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: $[AB]$ kenarı üzerine *ABD* üçgeninin iç bölgesine doğru *ABO* eşkenar üçgenini çizelim. $m(ADB) = 30°$ ve $m(AOB) = 60°$ olup $|OA| = |OB|$ olduğundan, *O* noktası *ABD* üçgeninin çevrel çember merkezidir. Öyleyse aynı zamanda da $|OA| = |OD|$ olmalıdır.

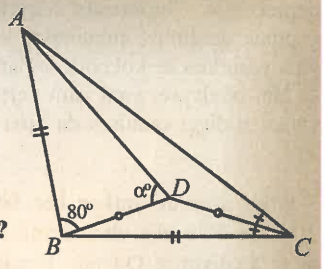


Bu yüzden $m(OAD) = m(ODA) = 10°$ olur. Diğer yandan *OBD* üçgeni de ikizkenar olduğundan $m(OBD) = m(ODB) = 20°$ olur. Aynı zamanda $m(BDC) = 20°$ olduğundan *BO* // *CD* olduğu görülmelidir. Bu da *BCDO* dörtgeniniz ikizkenar yamuk olduğu anlamına gelir ki $\alpha = 40$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Soruyu çözdük çözmesine de, soruda $m(DBC) > 90°$ bilgisi neden verildi, onu anladınız mı?

19.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$|DB| = |DC|$
$|BA| = |BC|$
$m(DCB) = m(ACD)$
$m(ABD) = 80°$
$m(BDA) = \alpha°$
olduğuna göre α **kaçtır?**



A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

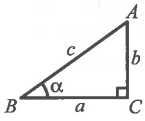
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Azıcık Trigonometri

Trigonometri Başlıyooor! Her şey Pisagor'un o meşhur teoremini bulmasıyla başlamış olsa gerek. Hatırlayalım:

Hipotenüs uzunluğu c br, *dik kenar uzunlukları a* br *ve b* br *olan dik bir ABC üçgeninde* $a^2 + b^2 = c^2$*'dir.*



Türkçe'ye çevirelim:
Bir dik üçgende, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

Bu teoremin daha nicelerine gebe olduğu, en azından olabilme olasılığının çok yüksek olduğu daha o günlerde anlaşılmış olmalı ki, formülü evirip çevirip yeni şeyler bulmaya çalışmışlar. Akla ilk gelen, karelerin birini diğer tarafa atarak iki kare farkından yararlanmak olabilir örneğin. 'Başka ne yapılabilir?' diye düşününce, akla, toplamı bir sabit sayıya çevirmek amacıyla, eşitliğin her iki yanını c^2'ye bölmek geliyor:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

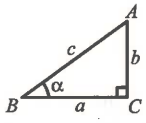
Eşitliğin güzelliği ortada. Her ama her üçgende ''dik kenar uzunluklarının hipotenüs uzunluğuna oranlarının kareleri toplamı hep ama hep 1'e eşit olur'' diyor. Her matematikçinin içindeki dürtü gereği, içimizden, bu oranlara birer isim vererek teoremi sadeleştirmek geliyor. Dik açının gördüğü kenara, "dik açının karşısındaki kenar" demektense, "hipotenüs" deyiverdiğimiz gibi... Böyle yapmak derdimizi anlatmakta kolaylık sağlayacağı gibi, yazı yazarken de kolaylık sağlar. Beni de düşünün biraz! ☺ Hal böyleyse, yani isim vermek işi kolaylaştırıyorsa, var olan diğer oranlara da birer isim verelim, olsun bitsin!

3 farklı uzunluk varken kaç farklı oran tanımlanabilir? a/b ile b/a eşit olmadığından, sıranın önemli olduğunu fark ediyoruz. O halde, kombinasyon değil, permutasyon yapacağız: $P(3, 2) = 6$.

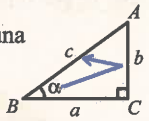
Bu altı oranı isterseniz yazalım: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$.

Sıra bunlara sırasıyla isimler vermeye geldi. Altı tanımı ardı ardına vermek belki pedagojik değil ama bu seferlik böyle olsun!

Dik kenar uzunlukları a birim ve b birim, hipotenüs uzunluğu c birim olan yandaki gibi bir ABC dik üçgeni çizilsin. $m(CBA) = \alpha$ olsun.

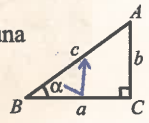


Sinüs. α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün sinüsü** denir. sin α ile gösterilir.



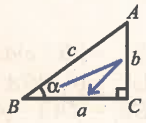
$$\sin(CBA) = \sin\alpha = \frac{b}{c}$$

Kosinüs. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kosinüsü** denir. cos α ile gösterilir.



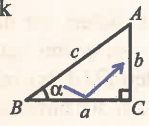
$$\cos(CBA) = \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Tanjant. α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun komşusundaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün tanjantı** denir. tan α ile gösterilir.



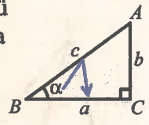
$$\tan(CBA) = \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Kotanjant. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kotanjantı** denir. cot α ile gösterilir.



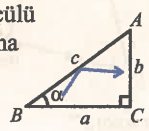
$$\cot(CBA) = \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

Sekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranına, **α açısının sekantı** denir. sec α ile gösterilir.



$$\sec(CBA) = \sec\alpha = \frac{c}{a}$$

Kosekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α açısının kosekantı** denir. csc α ile gösterilir.



$$\csc(CBA) = \csc\alpha = \frac{c}{b}$$

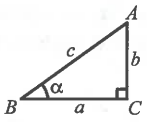
Şimdi bu tanımlardan doğan en temel teoremleri verelim. İlk teoremi yazının başında vermiştik zaten. Hatırlayalım:

Teorem. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Kanıt: Aynı üçgen için işlem yaptığımızı farz edelim.

$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ ve $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ diye,

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$



Örnek.

$$\sin x = -\cos x$$

iken $\sin x \cdot \cos x$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: $\sin x = -\cos x$ olması $\sin x + \cos x = 0$ demektir. Şimdi bu eşitliğin karesini alalım.

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 0$$
$$1 + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 0$$
$$\sin x\cdot\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: B.

1.

$$\frac{3+\sin^2 x}{2-\cos x} - 2$$

ifadesinin en sade eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ **B)** $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\sec x$

2.

$$\frac{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2}{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}$$

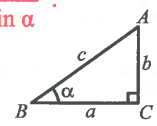
ifadesi kaça eşittir?

A) 1 **B)** $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Teorem. α *dar bir açı ölçüsü olmak üzere*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ ve } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kanıt: Yine aynı üçgendeyiz.



$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ ve } \cot\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

α geniş olsa da olur ama daha onları görmedik.

Örnek.

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{4}{3}$$

olduğuna göre $\tan x$ *kaçtır?*

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapalım:

$$3\cdot\sin x + 3\cdot\cos x = 4\cdot\sin x - 4\cdot\cos x$$
$$7\cdot\cos x = \sin x$$

olur. Eşitliğin her iki yanını $\cos x$'e bölersek, $\tan x$ değerinin 7 olduğunu görürüz.

Doğru cevap: D.

3.

$$\frac{3\sin x - 5\cos x}{2\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre $\cot x$ **kaçtır?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

4.

$$\left(\frac{1+\cos x}{\tan x}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\cot x}\right)$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ **C)** $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\tan x$

5.

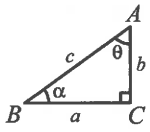
$$\tan x + \cot x = 4$$

olduğuna göre $\tan^2 x + \cot^2 x$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Teorem. *Tümler iki açı ölçüsünün birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına, birinin sekantı diğerinin kosekantına eşittir.*

Kanıt: Kanıt, aşağıdaki üçgene göz ucuyla bakmayı gerektiriyor, o kadar…



Görüldüğü üzere;

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \cot\theta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{a} = \csc\theta$$

Örnek. *ABC bir dik üçgen olduğuna göre*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

toplamı kaça eşittir?

A) $1+\sin^2 A$ B) $\cos^2 A$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Genelliği bozmadan A açısını dik kabul edelim. Yapacağımız çözüm B veya C açısını dik kabul ettiğimizde de geçerli olacaktır.

$m(A) = 90°$ ise $\sin A = 1$ olacağından

$$\sin^2 A = 1$$

olur. Diğer yandan $m(B) + m(C) = 90°$ yani B ve C açıları tümler olduğundan $\cos C = \sin B$ olur ki buradan da

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \cos^2 C + \sin^2 C = 1$$

çıkar ki sorulan toplam 2'ye eşit bulunmuş olur.

Doğru cevap: E.

6.

ABC bir dik üçgen olduğuna göre

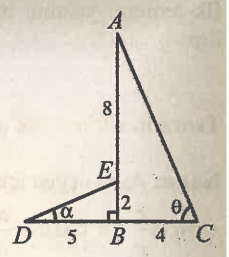
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

toplamı kaça eşittir?

1

7.

ABC ve *EBD* birer dik üçgen
$AB \perp DC$
$|AE| = 8$ br
$|EB| = 2$ br
$|DB| = 5$ br
$|BC| = 4$ br
$m(D) = \alpha$ ve $m(C) = \theta$
olduğuna göre
$\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{4\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{9}$

Örnek.

$$\frac{\sin^2 20° + \sin^2 70° - \cos^2 25°}{\cos^2 25°} = a^2$$

eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $\sin 25°$ B) $\cos 25°$ C) $\tan 25°$ D) $\cot 25°$ E) $\sec 25°$

Çözüm: Kanıtladığımız üzere $\sin 20° = \cos 70°$ olmalıdır. O halde $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$ diyebiliriz.

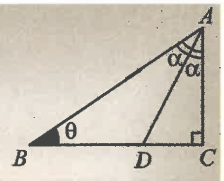
$$a^2 = \frac{1-\cos^2 25°}{\cos^2 25°} = \frac{\sin^2 25°}{\cos^2 25°} = \tan^2 25°$$

olacağından $a = \tan 25°$ olabilir.

Doğru cevap: C.

8.

ABC bir dik üçgen
$AC \perp BC$
$m(ABC) = \theta$
$m(BAD) = m(DAC) = \alpha$
olduğuna göre $\sin(\alpha + \theta)$
ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?



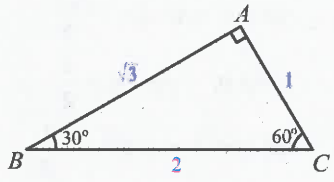
A) $\sin\alpha$ B) $\sin\theta$ C) $\cos\alpha$ D) $\cos\theta$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Şu ana kadar öğrendiklerimize şöyle bir göz atınca, tanjant ve kotanjant oranlarının aslında sinüs ve kosinüsün birbirlerine oranı olduğunu, sekant ve kosekant oranlarının da sinüs ve kosinüsün çarpmaya göre tersleri olduğunu gördük. Anlayacağınız her şey dön dolaş sinüs ve kosinüse geliyor.

Buradan çıkan sonuç; sinüs ve kosinüsü adam gibi bilen birinin sırtının yere gelmeyeceğidir. Hatta son öğrendiğimiz teoremle kosinüs de sinüse dönüşebiliyor, sadece sinüsü bil yeter diyeceğim ama abartmayalım. ☺ Siz sinüs ile kosinüsü her şeyiyle bilin ama diğer dört oranın sadece tanımlarını bilin, yeter! En azından geometride…

Özel Ölçülerin Trigonometrik Değerleri. Şimdi bazı özel açı ölçülerinin trigonometrik değerlerini öğreneceğiz. Bu değerleri, daha önce öğrendiğimiz özel dik üçgenleri kullanarak bulacağız.

Örneğin, 30°-60°-90° üçgenin kenarları



yukarda belirtildiği oranlarda olduğundan,

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

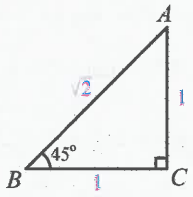
$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

eşitliklerini bir çırpıda yazabiliriz. Diğer yandan ikizkenar dik üçgenin kenarları arasında da



yukarda belirtilen oranlar var olduğundan

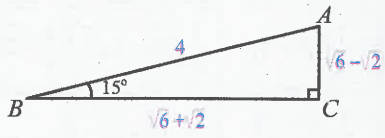
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

eşitlikleri mevcuttur.

Gelelim 15°-75°-90° üçgenine… Hatırlarsanız Ailles dikdörtgenini kullanarak,



üç kenarın birbirine oranını yukardaki şekilde bulmuştuk. O halde

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \cot 75^\circ = 2-\sqrt{3}$$

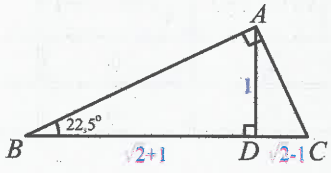
$$\tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$$

$$\sec 15^\circ = \csc 75^\circ = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\sec 75^\circ = \csc 15^\circ = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

eşitlikleri cebimizde!

22,5°-67,5°-90° üçgeninde ise sadece dik kenarlar oranının bilsek yeter, diğerleri çok önem arz etmiyor.



22,5° ile 67,5° ölçülerinin tanjant ve kotanjantları aşağıda verilmiş. Onları bilin, kafi!

$$\sin 22{,}5^\circ = \cos 67{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\sin 67{,}5^\circ = \cos 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\tan 22{,}5^\circ = \cot 67{,}5^\circ = \sqrt{2}-1$$

$$\tan 67{,}5^\circ = \cot 22{,}5^\circ = \sqrt{2}+1$$

$$\sec 22{,}5^\circ = \csc 67{,}5^\circ = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\sec 67{,}5^\circ = \csc 22{,}5^\circ = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Diğer özel ölçülerin trigonometrik değerlerini aşağıdaki tabloda verdik. Belki merak eden vardır. Zaten başa ne gelse bu meraktan gelmiyor mu? ☺

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0°	0	1	0
15°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$22{,}5^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
36°	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$67{,}5^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$
72°	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
75°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
90°	1	0	∞
180°	0	-1	0

Şu simetriye bakmadan geçmeyin.

$\sin 0^\circ$	=	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\sin 30^\circ$	=	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\sin 45^\circ$	=	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin 60^\circ$	=	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin 90^\circ$	=	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Dikkatli okur, burada şu soruyu soracaktır: 'Trigonometrik oranları bir dik üçgenin bir dar açısı için tanımlamadık mı? Ama bu tabloda 90° veya 180° ölçülerinin de trigonometrik değerleri verilmiş. Yoksa geniş açı ölçülerinin de trigonometrik değerleri var da bizden mi saklıyorsunuz?' Üzgünüm ki, buna cevabım evet. Sizden gerçek tanımı sakladık. Ama bunu sizin yararınıza yaptık. Zira dersimiz trigonometri değil, biz burada sadece bize geometri sorularında yardımcı olacak kadar trigonometri öğreneceğiz. Gerçek tanımı herhangi bir cebir kitabının birim çemberle ilgili kısmında bulabilirsiniz.

Bütünler iki açının sinüsü birbirine eşittir ama kosinüsü birbirlerinin zıt işaretlisidir. Bunların kanıtını sırasıyla üçgende alan ve kosinüs teoremi başlıklı yazılarda bulabilirsiniz, burada verip konuyu fazla dağıtmak istemedik, affedin.

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tanjant, sinüs ile kosinüsün birbirine oranı olduğundan,

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

işlemi gereğince, bütünler açıların tanjantlarının birbirlerinin zıt işaretlisi olduğunu söyleyebiliriz. O halde doğal olarak tanım gereği kotanjant için de aynı durum geçerli olacaktır.

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

9.

$\sin(80^\circ\,4000'\,12000'')$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

10.

$$\cos^2\frac{\pi}{6}+\frac{5}{\sec^2\frac{\pi}{3}}$$

toplamı kaça eşittir?

A) 1 **B)** 2 C) 3 D) 4 E) 5

11.

$$\sin^4\frac{\pi}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{4}$$

farkı kaça eşittir?

A) –1 **B)** 0 C) 1 D) 2 E) 3

12.

$4\cdot\sin 15^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ E) 1

13.

$\tan 15^\circ + \tan 60^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ **C)** 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

14.

$\tan 75^\circ - 2\cdot\cos 30^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ **C)** 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

15.

$\tan 22{,}5^\circ + \tan 45^\circ = a\cdot\cos 45^\circ$

eşitliğini sağlayan *a*'nın değeri kaça eşittir?

A) 1 **B)** 2 C) 3 D) 4 E) 5

16.

$$\tan 67{,}5^\circ - 2\cdot\sin 45^\circ = \sec p$$

eşitliğini doğrulayan p hangisi olabilir?

A) 0 B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

17.

$$\tan 15^\circ + \tan 22{,}5^\circ + \tan 67{,}5^\circ + \tan 75^\circ$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $4+2\sqrt{2}$ B) $2+2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}+4$

18.

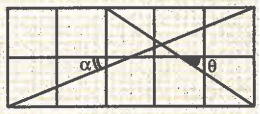
$$\frac{\sin x\cdot\tan x\cdot\csc x}{\sec x\cdot\cot x\cdot\cos x}$$

ifadesinin $x=\frac{\pi}{3}$ için değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

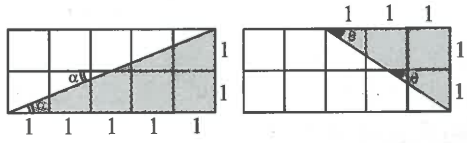
Tanımlardan doğan temel teoremlerimiz bununla birlikte son buldu. Şimdi yine sadece trigonometrik tanımlar yardımıyla çözülen geometri soruları çözeceğiz.

Örnek. 10 *adet eş kareden oluşturulmuş üstteki şekilde belirtilen* α *ve* θ *ölçülü açılar için* $\tan\alpha\cdot\cot\theta$ *çarpımı kaça eşittir?*



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

Çözüm: Şekilde görülen α ve θ açılarının trigonometrik değerleri içinde bulundukları üçgenlerden hemen seçilemiyor. Bu yüzden, iç ters ve yöndeş açıları kullanarak şekilde olduğu gibi yeni α ve θ açıları bulalım.

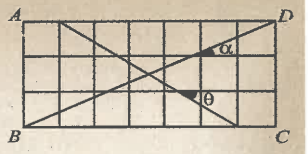


Görüldüğü üzere, $\tan\alpha=\frac{2}{5}$ ve $\cot\theta=\frac{3}{2}$'dir. Bu durumda $\tan\alpha\cdot\cot\theta=\frac{3}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

19.

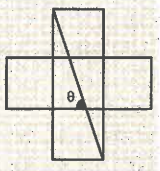
Yukarıdaki şekil 21 birimkareden oluşturulmuş olup, ölçüsü α ve θ olan açılar taranmıştır.



Buna göre $\cot\alpha\cdot\tan\theta$ çarpımının değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{35}{9}$

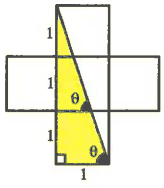
Örnek [1983 ÖYS]. *Yandaki şekil tabanlarından biri olmayan bir küpün açılımıdır.*



Buna göre tan θ *değeri kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

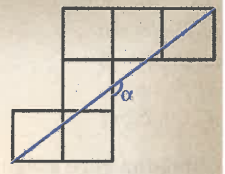
Çözüm: Uzun lafa gerek yok.



Yukardaki şekilde taralı dik üçgenden de görüldüğü üzere tan θ = 3 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

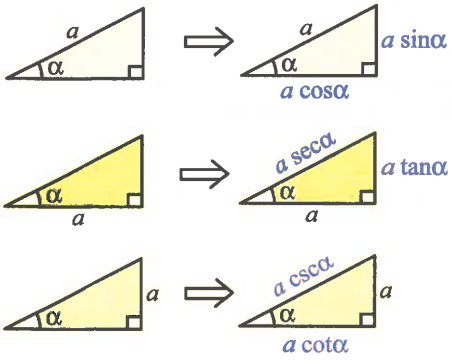
20.
Yandaki şekil 6 adet birimkareden oluşturulmuştur.



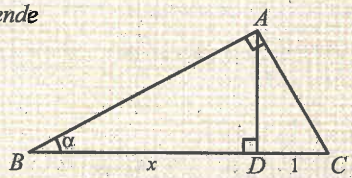
Buna göre cos α değeri kaça eşittir?

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

Bazen bazı uzunluklar trigonometrik olarak verilir veya sorulur. Böyle durumlarda, herhangi bir kenar uzunluğu belliyken diğer kenarların uzunluklarını da herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonu şeklinde yazmayı bilmek lazımdır. Gerekli bilgileri aşağıda verdik:

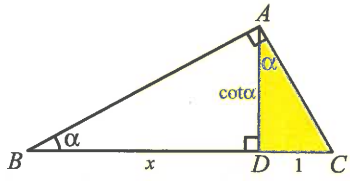


Örnek. *Yandaki üçgende*
BA ⊥ AC
AD ⊥ BC
DE ⊥ AB
m(ABC) = α ve
|DC| = 1 br
olduğuna göre
|BD| = x aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) tan α B) cot α C) $\tan^2\alpha$ D) $\cot^2\alpha$ E) sec α

Çözüm: *DAC* açısının ölçüsünün de α olduğunu fark edelim.



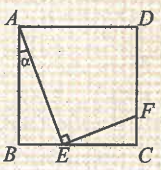
ADC dik üçgeninde |*DC*| = 1 br olduğundan |*AD*| = cot α br olur. *CAB* dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden

$$\cot^2\alpha = x\cdot 1$$

olur ki bu da bize cevabı verir.

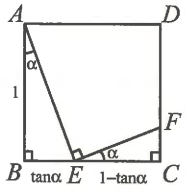
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABCD birim kare*
AE ⊥ EF
m(BAE) = α
olduğuna göre |DF| uzunluğu aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) 1 − tan α + $\tan^2\alpha$ B) tan α C) $\cot^2\alpha$
D) 1 − tan α E) 1 + tan α

Çözüm: *m(FEC) = m(BAE) = α*'dır.



|*BE*| = tan α olduğundan

|*EC*| = 1 − tan α ve |*FC*| = tan α − $\tan^2\alpha$

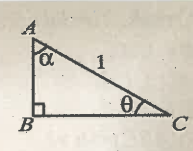
olur. O halde

|*DF*| = 1 − |*FC*| yani |*DF*| = 1 − tan α + $\tan^2\alpha$

bulunur.

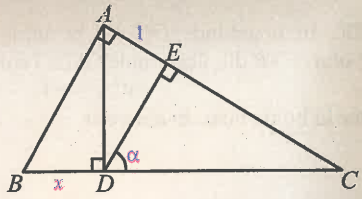
Doğru cevap: A.

21.
Yandaki ABC üçgeninde
$[AB] \perp [BC]$
$m(CAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$
olduğuna göre $|BC|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?



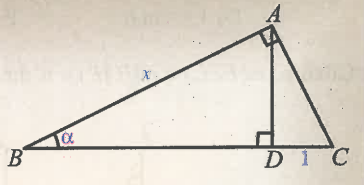
A) $\sin\theta$ B) $\tan\theta$ C) $\cos\alpha$ D) $\tan\alpha$ **E)** $\sin\alpha$

22.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$DE \perp AC$
$m(CDE) = \alpha$
$|AE| = 1$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir?



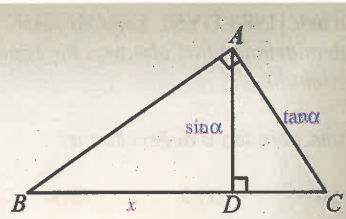
A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ **C)** $\csc\alpha$ D) $\sec\alpha$ E) $\tan\alpha$

23.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$m(ABC) = \alpha$
$|DC| = 1$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir?



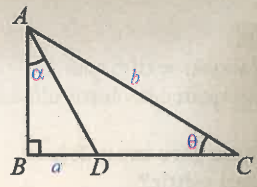
A) $\tan\alpha$ B) $\cot\alpha$ C) $\tan^2\alpha$
D) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ E) $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha}$

24.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AD| = \sin\alpha$ br
$|AC| = \tan\alpha$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?



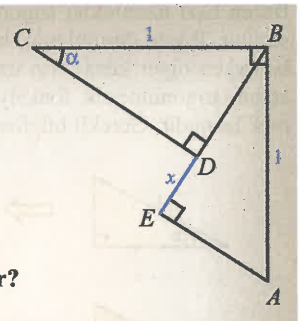
A) 1 B) $\sin^2\alpha$ C) $\cos^2\alpha$ **D)** $\cos\alpha$ E) $\sec\alpha$

25.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(DAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$
$|BD| = a$ br
$|CA| = b$ br
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $\dfrac{a}{b}$'ye eşittir?



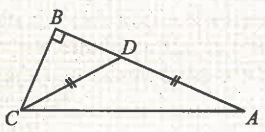
A) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\alpha}$ B) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\alpha}$ C) $\dfrac{\sin\alpha}{\tan\theta}$
D) $\sin\theta\cdot\tan\alpha$ E) $\sin\alpha\cdot\cos\theta$

26.
Yandaki şekilde
$AB \perp BC$
$CD \perp BE$
$BE \perp EA$
$m(BCD) = \alpha$
$|AB| = |BC| = 1$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?



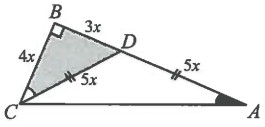
A) $\cos\alpha - \sin\alpha$ B) $\sin\alpha - \cos\alpha$ C) $\tan\alpha - \cot\alpha$
D) $\sec\alpha - \csc\alpha$ E) $\csc\alpha - \sec\alpha$

Örnek. *Yandaki ABC dik üçgeninde*
$BC \perp BA$
$|CD| = |DA|$
$\tan(BCD) = \frac{3}{4}$
olduğuna göre tan *A kaçtır?*



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

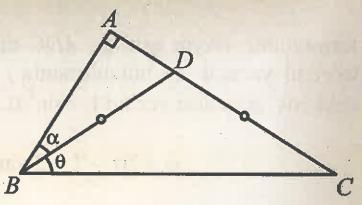
Çözüm: $|BD| = 3x$ br ise $|BC| = 4x$ br olur, o halde $|CD| = |DA| = 5x$ br dir.



Buradan tan $A = \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

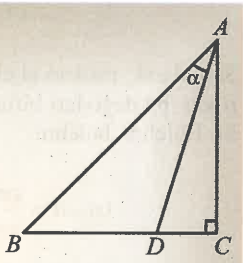
Doğru cevap: C.

27.
ABC bir dik üçgen
$BA \perp AC$
$|BD| = |DC|$
$m(ABD) = \alpha$
$m(DBC) = \theta$
$\tan\alpha = \frac{5}{12}$
olduğuna göre tan θ değeri kaça eşittir?



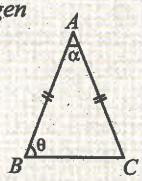
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{13}{3}$

28.
ABC ikizkenar dik üçgen
$BC \perp CA$
$|BC| = |CA|$
$|BD| = 2\cdot|DC|$
$m(BAD) = \alpha$
olduğuna göre
tan α kaça eşittir?



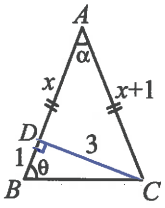
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Örnek [1997 ÖYS]. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC|$
$m(ABC) = \theta$
$m(BAC) = \alpha$
Yandaki şekilde tan θ = 3
olduğuna göre tan α *değeri kaçtır?*



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: tan θ = 3 eşitliğinden faydalanmak amacıyla *C*'den *AB*'ye dik indirelim. Dikme ayağı *D* olsun.



$|DB| = 1$ br dersek $|DC| = 3$ br olur. Diğer yandan $|AD| = x$ br dersek *BAC* üçgeninin ikizkenar olmasından dolayı $|AC| = x + 1$ br bulunur. *ADC* dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $x = 4$ olduğu rahatlıkla bulunur. O halde $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ olmalıdır.

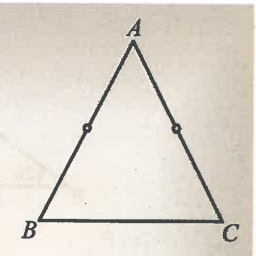
Doğru cevap: C.

Aramızda Kalsın. Her üçgenin üç iç açı ölçüsünün tanjantının çarpımıyla toplamı birbirine eşittir.

$$3\cdot3\cdot\tan\alpha = 3 + 3 + \tan\alpha$$

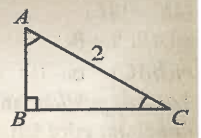
eşitliğinden tan α = 3/4 olarak bulunur.

29.
ABC ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$\tan B = 2$
olduğuna göre
cot *A* değeri kaça eşittir?



A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

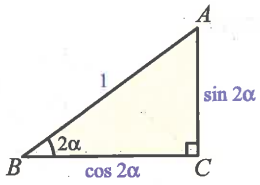
30.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AC| = 2$ br
$\tan A + \tan C = x$
Alan$(ABC) = y$
olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaça eşittir?



A) 1 **B) 2** C) 4 D) 8 E) 16

Yarım Açı Formülleri. Geometride bazen bir açının ölçüsü, başka bir açı ölçüsünün yarısı veya 2 katı olarak verilir. Bunlardan birinin bir trigonometrik oranı biliniyorken, diğerinin bir trigonometrik oranını bulabiliyorsanız sizden ancak bir uçan bir de kaçan kurtulabilir. Peki birinden diğeri nasıl bulunur, hangi formülle veya teknikle? Şimdi onları vereceğiz.

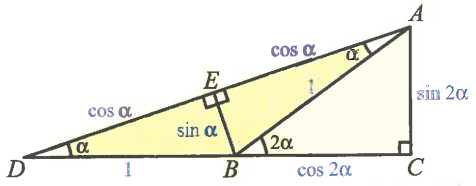
Sözgelimi 2α ölçüsünün trigonometrik değerlerini biliyor olalım. α ölçüsünün trigonometrik değerlerini arıyoruz.



Yukarıdaki gibi, hipotenüsü 1 br olan bir ABC üçgeni çizelim. $m(B) = 2\alpha$ olsun.

$$|BC| = \cos 2\alpha$$
$$|AC| = \sin 2\alpha$$

olduğunu not edelim. Şimdi $[CB]$'yi B yönünde 1 br uzatarak BAD ikizkenar üçgenini oluşturalım.



$m(BAD) = m(BDA) = \alpha$ olduğunu fark ettiniz mi? Şimdi B'den AD'ye dikme indirelim. Ayağı E olsun. AEB ve DEB dik üçgenlerinde hipotenüs 1 br olduğundan

$$|DE| = |EA| = \cos\alpha$$
$$|EB| = \sin\alpha$$

olur. Tüm uzunluklar bulundu, sıra formüllere geldi:

ADC dik üçgeninde $m(D) = \alpha$ için yazacağımız iki trigonometrik oran bize istediğimizi verecek. İlk formülümüz

$$\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$$

eşitliğinden gelen

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

formülü, ikinci formülümüzse

$$\cos\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$$

eşitliğinden gelen

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$$

formülüdür. (Aynı eşitliği, ADC dik üçgeninde Pisagor teoremi yazarak da bulabilirsiniz.) Dileyen, bu formüldeki $\cos^2\alpha$ ifadesi yerine $1 - \sin^2\alpha$ yazarak

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha$$

formülünü de elde edebilir. Hatta $1 - 2\sin^2\alpha$ ifadesini

$$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$$

diye ayırıp $1 - \sin^2\alpha$ yerine $\cos^2\alpha$ yazarak

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

eşitliğine de ulaşabilirsiniz. (Bu eşitliği, geometriden bulmak isteyenler, son şeklimizde $[CE]$ kenarortayını çizip önce muhteşem üçlüyü ardından ikizkenar üçgenlerde keseni bulduran güzel formülü kullansınlar.)

Son olarak, madem ki elimizde $\sin 2\alpha$ ve $\cos 2\alpha$ değerleri var, bu değerleri birbirine bölerek $\tan 2\alpha$ da bulunabilir. Bölelim, bulalım.

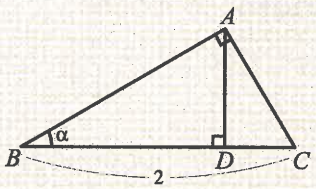
$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

ifadesinde hem payı hem de paydayı $\cos^2\alpha$'ya bölersek

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

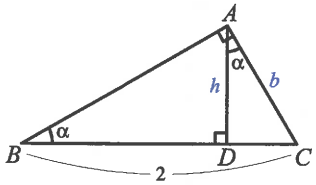
elde edilir.

Örnek [1986 ÖYS].
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
AD ⊥ BC
m(B) = α
olduğuna göre
|AD|'nin değeri
aşağıdakilerden hangisidir?



A) $2+\sin 2\alpha$ B) $2-\sin 2\alpha$ C) $1+\sin 2\alpha$
D) $1-\sin 2\alpha$ E) $\sin 2\alpha$

Çözüm: *CAD* açısının ölçüsünün de α olduğunu fark edelim.



CAB dik üçgeninden $\sin\alpha=\frac{b}{2}$ olduğundan

$$b=2\cdot\sin\alpha$$

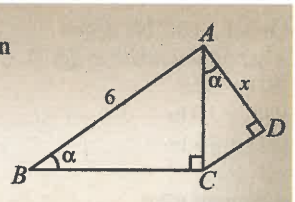
olur. Diğer yandan *ADC* dik üçgeninden $\cos\alpha=\frac{h}{b}$ olduğundan

$$h=b\cdot\cos\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

olarak bulunur.

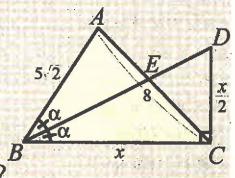
Doğru cevap: E.

31.
BCA ve *CDA* birer dik üçgen
BC ⊥ CA
CD ⊥ DA
m(ABC) = m(DAC) = α
|AB| = 6 br
|AD| = x br
olduğuna göre *x* aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\cot\alpha$ B) $\tan 2\alpha$ C) $3\sin 2\alpha$
D) $3\tan 2\alpha$ E) $2\cot 2\alpha$

Örnek. *ABC bir üçgen*
BC ⊥ CD
|BC| = 2·|CD|
m(ABD) = m(DBC)
|AB| = 5√2 br
|AC| = 8 br
olduğuna göre |BC| = x kaç br dir?



A) 7 B) $7\sqrt{2}$ C) 8 D) $8\sqrt{2}$ E) 14

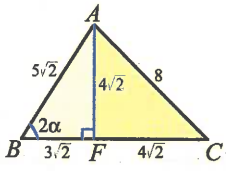
Çözüm: $m(ABD)=m(DBC)=\alpha$ diyelim. *ABC* üçgeninde iki kenar uzunluğu belli olduğundan $\cos 2\alpha$ değeri bulunursa kosinüs teoreminden sonuca ulaşabiliriz. *BCD* dik üçgeninden

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$$

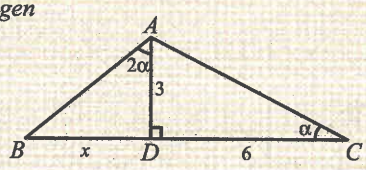
olur. *A*'dan *BC*'ye indirilen dikme ayağı *F* olsun.



$\cos 2\alpha$ bulunduğundan $|BF|=3\sqrt{2}$ br olur. Buradan $|AF|$ ve ardından $|FC|=4\sqrt{2}$ br çıkar. O halde $x=7\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD ⊥ BC
m(C) = α
m(BAD) = 2α
|AD| = 3 br
|DC| = 6 br
olduğuna göre |BD| = x kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: Soru aslında 'tan α = 1/2 iken tan 2α kaçtır?' sorusundan başka bir şey değil. Bu yüzden hemen tan 2α değerini bulalım.

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

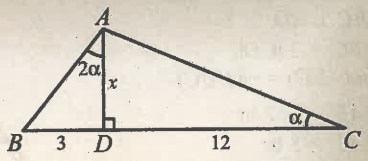
Diğer yandan, *ABD* dik üçgeninden

$$\tan 2\alpha=\frac{x}{3}$$

olduğunu bildiğimizden $x=4$ olmalıdır.

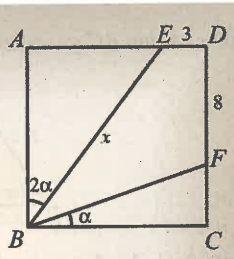
Doğru cevap: B.

32.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(C) = \alpha$
$m(BAD) = 2\alpha$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 12$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



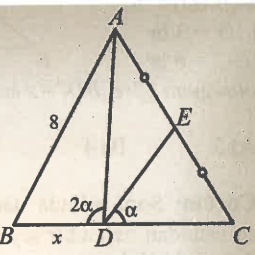
A) 3 **B) 4** C) 5 D) 6 E) 8

33.
$ABCD$ bir kare
$m(CBF) = \alpha$
$m(ABE) = 2\alpha$
$|ED| = 3$ br
$|DF| = 8$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 10 B) 13 **C) 15** D) 17 E) 20

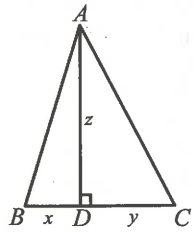
34.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AE| = |EC|$
$m(ADB) = 2\alpha$
$m(EDC) = \alpha$
$|AB| = 8$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



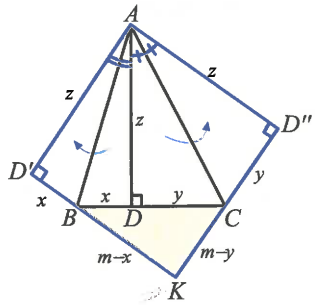
A) 1,5 B) 2 C) 2,5 **D) 3** E) 3,5

Teorem. *ABC bir üçgen*
$AD \perp BC$
$|AD| = z$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
$z^2 = x{\cdot}y + y{\cdot}z + x{\cdot}z$

ise $m(BAC) = 45°$.



Kanıt: ADB ve ADC üçgenlerini hipotenüsleri üzerine katlayalım.



$AD'KD''$ dörtgeni bir deltoit olacağından $|D'K| = |D''K|$ olur. $|BK| = m - x$ br, $|CK| = m - y$ br olsun. BKC üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa

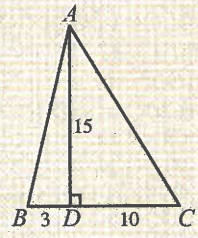
$$m^2 = m{\cdot}x + m{\cdot}y + x{\cdot}y$$

bulunur ki bu da $m = z$ ve $m(BKC) = 90°$ demektir. Yani $AD'KD''$ dörtgeni bir kareymiş.

$$m(BAC) = m(D'AD'')/2 = 90°/2 = 45°.$$

Örnek. *ABC bir üçgen*
A'ya ait yükseklik ayağı D
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 10$ br
$|AD| = 15$ br

olduğuna göre
$m(BAC)$ kaç derecedir?



A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

Çözüm: $15^2 = 15{\cdot}3 + 15{\cdot}10 + 3{\cdot}10$ eşitliği sağlandığından cevap 45° olmalı ama biz başka bir yoldan daha çözelim.

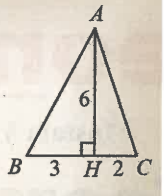
ABC üçgeninde A'ya ait yüksekliğin boyu ve bu yüksekliğin indiği tabanın boyu bilindiğinden, üçgenin alanı bulunabilir. ADC üçgeninde Pisagor teoreminden $|AC|$'yi bulursak, alanı bildiğimizden B'ye ait yüksekliğin boyu da bulunabilir. Bu noktada, $|AB|$ değerinin B'den inen yüksekliğin $\sqrt{2}$ katı olduğu farkedilirse

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğundan $\alpha = 45$ olur.

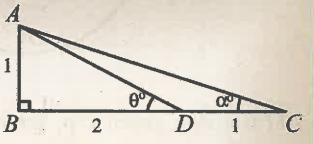
Doğru cevap: B.

35.
Yandaki ABC üçgeninde
$[AH] \perp [BC]$
$|AH| = 6$ br
$|BH| = 3$ br
$|HC| = 2$ br
olduğuna göre $m(CAB)$ kaçtır?



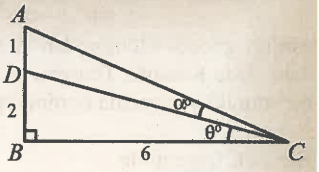
A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 45°

36.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |DC| = 1$ br
$|BD| = 2$ br
$m(BCA) = \alpha°$
$m(BDA) = \theta°$
olduğuna göre $\alpha + \theta$ toplamı kaçtır?



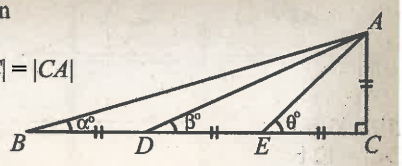
A) 75 B) 67,5 C) 60 **D) 45** E) 30

37.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AD| = 1$ br
$|DB| = 2$ br
$|BC| = 6$ br
$m(DCA) = \alpha°$
$m(BCD) = \theta°$
olduğuna göre $\alpha + 2\theta$ toplamı kaçtır?



A) 90 B) 75 C) 67,5 D) 60 **E) 45**

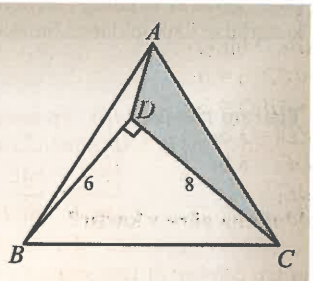
38.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|BD| = |DE| = |EC| = |CA|$
$m(ABC) = \alpha°$
$m(ADC) = \beta°$
$m(AEC) = \theta°$



olduğuna göre $\alpha + \beta + \theta$ toplamı kaçtır?

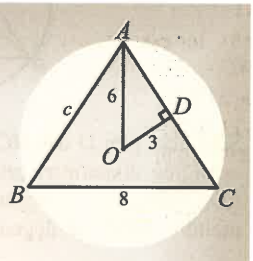
A) 60 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

39.
ABC eşkenar üçgen
D iç bölgede bir nokta
$m(CDB) = 90°$
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 8$ br
olduğuna göre ADC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) 16 D) $16\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}-12$

40.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$OD \perp CA$
$|OD| = 3$ br
$|OA| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c kaçtır?



A) 8 B) $6\sqrt{3}$ C) $4+2\sqrt{15}$ D) $8\sqrt{3}$ E) 10

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Sinüs Teoremi

Bir üçgenin temel elemanlarının açıları ve kenarları olduğunu daha önce söylemiştik. Açıları ve kenarları derken; açılarının ölçüleri, kenarlarının da uzunluklarını kastediyoruz. İşte bu temel elemanlar arasında ilişkileri ortaya döken çok önemli iki teorem öğreneceğiz. Birisi sinüs teoremi, diğeri kosinüs teoremi...

Sinüs teoremi, kabaca, ölçüsü belli olan bir açının gördüğü kenarın uzunluğu belliyse, diğer açıların gördüğü kenarların uzunluklarını bulmaya yarar.

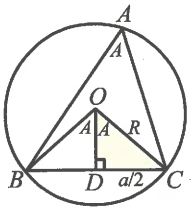
Teorem [Sinüs]. *ABC herhangi bir üçgen olsun. Açılara sırasıyla A, B, C diyelim. O zaman*

$$\frac{|BC|}{\sin A}=\frac{|AC|}{\sin B}=\frac{|AB|}{\sin C}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, üçgenin köşelerinin bulunduğu çember R yarıçaplıysa, bu değerler 2R'ye eşittir.

Kanıt: İki farklı kanıt göstereceğiz.

Birinci kanıt. Bir ABC üçgeni ve onun çevrel çemberini çizelim. Çemberin merkezine O diyelim.



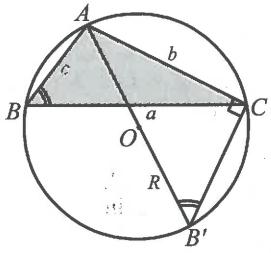
Şekildeki gibi O'dan BC'ye dik inelim. $m(COD)=m(A)$ eşitliğine dikkatinizi çekerim. $|BO|=|OC|$ olduğundan, BOC ikizkenar bir üçgendir. Dolayısıyla $|BD|=|DC|$ olmalıdır. ODC dik üçgeninden

$$\sin A=\sin(COD)=\frac{|DC|}{|CO|}=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R}.$$

Demek ki $\dfrac{|BC|}{\sin A}=2R.$

(Dikkat: Eğer A açısının ölçüsü 90°'den fazlaysa, o zaman O noktası üçgenin dışında kalır ama gene aynı eşitliği elde ederiz.) Aynı şeyi diğer açı ölçüleriyle de yaparsak teoremi elde ederiz. □

İkinci kanıt. Bir ABC üçgeni ve onun R yarıçaplı çevrel çemberini çizelim



A köşesinden geçen çap, çemberi B' noktasında kessin. $m(ACB')=90°$ ve $m(AB'C)=m(ABC)$ olur.

$$\sin B=\sin B'=\frac{b}{2R}$$

olduğundan eşitliğin biri gösterilmiş olur. Diğerleri de simetrik şekilde kanıtlanabilir.

Örnek [1966 ÜSS]. *Bir ABC üçgeni için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*

A) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ B) $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$
C) $2R\cdot\sin A=a$ D) $a\cdot\sin A=b\cdot\sin B$
E) $\sin(A+B)=\sin C$

Çözüm: Her x reel sayısı için

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

eşitliği geçerli olduğundan A şıkkı doğrudur. B şıkkındaki ifade Kosinüs Teoremi olduğundan doğrudur. Bunu bir sonraki yazımızda öğreneceğiz.

Bir ABC üçgeninde

$$A+B+C=\pi$$

olduğundan $A+B$ ile C açıları bütünlerdir. Bundan dolayı sinüsleri eşittir. E şıkkı da doğrudur. Sinüs Teoremi'nden

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

olduğunu biliyoruz. O halde C şıkkındaki ifade doğru olup,

$$a\cdot\sin B=b\cdot\sin A$$

olmalıdır. Bu durumda D şıkkı yanlıştır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1968 ÜSS]. *Aşağıdaki ifadelerden hangisi ABC üçgeninde sinüs teoremini ifade eder?*

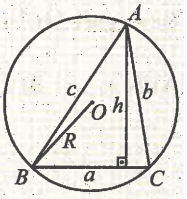
A) $\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$

B) $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

C) $h = b\cdot \sin C = c\cdot \sin B$

D) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{1-\sin^2 A}$

E) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



Çözüm: Verilen 5 önermenin 5'i de doğrudur fakat Sinüs Teoremi diye adlandırılan teorem E şıkkındakidir.

Doğru cevap: E.

1.
Aşağıdakilerden hangisi *ABC* üçgeninin çevrel çember yarıçapına eşittir?

A) $\frac{a}{\sin A}$ B) $\frac{a}{2\sin A}$ C) $\frac{2a}{\sin A}$

D) $\frac{\sin A}{a}$ E) $\frac{\sin A}{2a}$

2.
Çevrel çember yarıçapı *R* olan bir *ABC* üçgeninin alanı aşağıdaki bağıntıların hangisiyle hesaplanabilir?

A) $R\sin A\sin B\sin C$ B) $2R\sin A\sin B\sin C$

C) $R^2\sin A\sin B\sin C$ D) $2R^2\sin A\sin B\sin C$

E) $\frac{R}{2}\sin A\sin B\sin C$

3.
Kenar uzunlukları *a*, *b*, *c* olan bir *ABC* üçgeni için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ B) $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin A+\sin B}{\sin B}$

C) $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$ D) $a\cdot\sin A = c\cdot\sin C$

E) $a > b$ ise $\sin A > \sin B$

Örnek. *Bir ABC üçgeninde,*

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

eşitliği geçerliyse, bu üçgen ailesi hakkında ne söylenebilir?

A) Çeşitkenar B) İkizkenar C) Eşkenar
D) Dik E) İkizkenar dik

Çözüm: Sinüs Teoremi'ne göre

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

diye

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R} \text{ ve } \sin C = \frac{c}{2R}.$$

Verilen bağıntıda bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$(\frac{b}{2R})^2 + (\frac{c}{2R})^2 = (\frac{a}{2R})^2$$

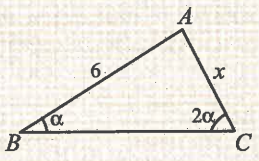
olur ki, sadeleştirilirse $b^2 + c^2 = a^2$ bulunur. O halde bu eşitliğin geçerli olduğu üçgen ailesi *A* açısı dik olan üçgenlerdir.

Doğru cevap: D.

4.
Çevrel çember çapının uzunluğu, bir kenarının uzunluğuna eşit olan bir üçgen için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) Eşkenar üçgendir. B) İkizkenar üçgendir.
C) Geniş açılı üçgendir. D) Dar açılı üçgendir.
E) Dik üçgendir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ACB) = 2 \cdot m(ABC)$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre
x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sinüs Teoremi'nden $\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}$ eşitliğini yazalım. İçler dışlar çarpımı yapılırsa

$$6 \cdot \sin\alpha = x \cdot \sin 2\alpha$$
$$6 \cdot \sin\alpha = x \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$x = 3 \cdot \sec\alpha$$

olarak bulunur. $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ olduğundan

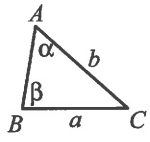
$$3 < x < 3 \cdot \sec\frac{\pi}{3} \text{ yani } 3 < x < 6$$

bulunur. O halde x değeri sadece 2 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: B.

Soru Tipi. *Bir üçgenin herhangi 2 açı ölçüsü ve 1 kenar uzunluğu verilip, diğer kenarlardan biri sorulur.*

Çözüm yolu: Sinüs Teoremi'nden kolaylıkla çözülebilir. Uygun şartlar altında, 1 açı ölçüsü ve 2 kenar uzunluğu verilip, diğer bir açı ölçüsü sorulduğunda da Sinüs Teoremi uygulanabilir.



Örnek. *Bir ABC üçgeninde* $|BC| = 12$ br *olup*

$$\cos A = \frac{5}{13}$$

olarak veriliyor. Bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?

A) 5 B) $\frac{11}{2}$ C) 6 D) $\frac{13}{2}$ E) 7

Çözüm: Uygun dik üçgeni hemen çizerseniz $\sin A = \frac{12}{13}$ olduğunu görürsünüz. Sinüs Teoremi gereği $\frac{a}{\sin A} = 2R$ olduğunu biliyoruz. a ve $\sin A$ değerleri bu eşitlikte yerlerine yazılırsa $R = \frac{13}{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

5.
C açısının ölçüsü 30° olan bir ABC üçgeninde $|AB| = 1$ br ve $|BC| = 2$ br olarak veriliyor.
Buna göre $|AC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 2 E) $\sqrt{6}$

6.
Bir ABC üçgeninde $m(A) = 45°$, $m(B) = 60°$ ve $|BC| = 4$ br olarak veriliyor.
Buna göre $|AC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

7.
Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ br olarak veriliyor.
$m(A) = 30°$ olduğuna göre $|BC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

8.
Bir ABC üçgeninde $m(A) = 30°$ ve $a = 6$ cm olduğuna göre bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm dir?

A) 6 **B)** $6\sqrt{2}$ **C)** $6\sqrt{3}$ **D)** 12 **E)** $12\sqrt{3}$

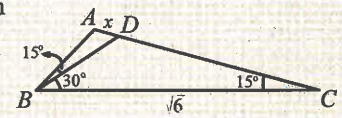
9.
$$a = 24 \text{ br}$$
$$\cos A = \frac{5}{13}$$
olan bir ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı kaç br dir?

A) 15 **B)** $\frac{13}{2}$ **C)** 10 **D)** 13 **E)** 24

10.
Bir ABC üçgeninde $a = 6$ br ve çevrel çemberin yarıçapı $2\sqrt{3}$ br olduğuna göre tan A değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $-\sqrt{3}$ **B)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C)** 1 **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $2+\sqrt{3}$

Örnek. ABC bir üçgen
$m(ABD) = m(C) = 15°$
$m(DBC) = 30°$
$|BC| = \sqrt{6}$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\sqrt{3}-1$ **E)** $2-\sqrt{3}$

Çözüm: ABD üçgeninin üç iç açısının da ölçüsü biliniyor. Eğer herhangi bir kenarının uzunluğu bilinseydi sinüs teoreminden x'i bulabilirdik. Şu aşamada dikkat edilirse ABC üçgeninin de üç iç açısının ölçüsü bilinmektedir. Hem de $|BC|$ değeri bilinmektedir. $[AB]$ kenarı her iki üçgende de ortak olduğundan birinden bulduğumuz değeri diğerinde yerine yazacağız. ABC üçgeninden başlıyoruz.

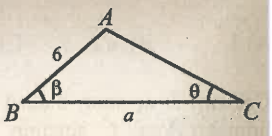
$$\frac{|AB|}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}$$
$$\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$|AB| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{3}-1$$

Şimdi de ABD üçgeninde sinüs teoremi yazıyoruz:

$$\frac{x}{\sin 15°} = \frac{|AB|}{\sin 45°}$$
$$x = \frac{|AB| \sin 15°}{\sin 45°}$$
$$x = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}-1}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2-\sqrt{3}$$

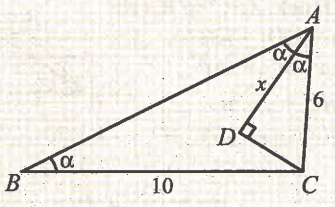
Doğru cevap: E.

11.
ABC bir üçgen
$m(B) = \beta$
$m(C) = \theta$
$\sin\theta = 0{,}4$
$\sin(\beta + \theta) = 0{,}\overline{6}$
olduğuna göre a kaçtır?



A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \perp DC$
$m(ABC) = \alpha$
$m(BAD) = \alpha$
$m(CAD) = \alpha$
$|BC| = 10$ br
$|CA| = 6$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 5 B) 4 C) $\sqrt{11}$ D) 3 E) 2

Çözüm: ABC üçgeninde sinüs teoremini uygulayacağız.

$$\frac{10}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{\sin \alpha}$$

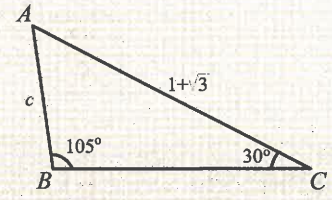
eşitliğinde $\sin 2\alpha$ yerine $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ yazarsak

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}$$

bulunur. ADC dik üçgenine bakılırsa $x = 5$ olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(B) = 105°$
$m(C) = 30°$
$|CA| = 1+\sqrt{3}$ br
olduğuna göre
$|AB| = c$ *kaç birimdir?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: B açısının ölçüsü ve b kenarının uzunluğu bilinmekteyken, C açısının ölçüsünü verip c kenarının uzunluğunu sorduğundan aklımıza hemen Sinüs Teoremi gelmelidir.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin 105°} = \frac{c}{\sin 30°}$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \sin 30° = c \cdot \sin 105°$$

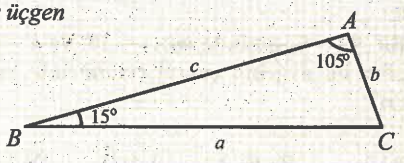
$$\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = c \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = c \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

eşitlişiğinden $c = \sqrt{2}$ olarak bulunur.

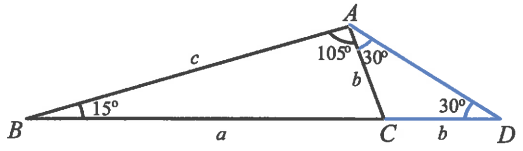
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 15°$
$m(CAB) = 105°$
olduğuna göre
$\frac{a+b}{c}$
oranı kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: $[BC]$ kenarını C yönünde B kadar uzatalım. Bittiği yere D diyelim.



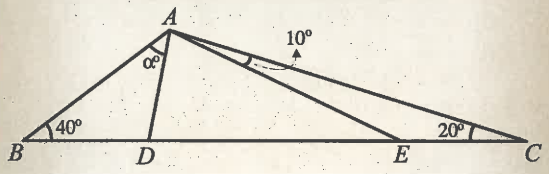
ABD üçgeninde sinüs teoreminden

$$\frac{a+b}{c} = \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{\sin 135°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

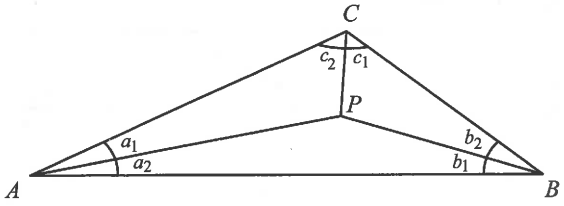
12.
B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla $40°$ ve $20°$ olan bir ABC üçgeninin $m(BAD) = \alpha°$ ve $m(CAE) = 10°$ olacak şekilde $[AD]$ ve $[AE]$ kesenleri çiziliyor.



$|BD| = |EC|$ olduğuna göre α kaçtır?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Teorem [Trigonometrik Ceva]. *Herhangi bir ABC üçgeni ve bu üçgenin iç bölgesinde herhangi bir P noktası verilsin.*



P noktası üçgenin köşelerine birleştirildiğinde oluşan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 açı ölçüleri için

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2}=1$$

eşitliği geçerlidir.

Eşitlik Giovanni Ceva'nın, üçgenin kenarları arasındaki meşhur bağıntısına benzediğinden, bu teorem **Trigonometrik Ceva Teoremi** olarak bilinir. Şimdi hep birlikte bu teoremin nelere gebe olduğuna tanıklık edeceğiz. Tabii ki önce bu teoremi kanıtlayacağız.

Kanıt: *APB*, *BPC* ve *APC* üçgenlerinde sırasıyla sinüs teoremleri uygulanırsa

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sin b_1}{\sin a_2},\quad \frac{|PB|}{|PC|}=\frac{\sin c_1}{\sin b_2},\quad \frac{|PC|}{|PA|}=\frac{\sin a_1}{\sin c_2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu üç oran çarpılırsa sonuç 1 olacağından

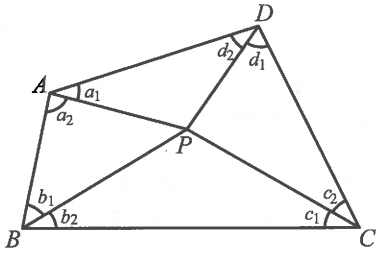
$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2}=1$$

yani

$$\sin a_1\cdot\sin b_1\cdot\sin c_1=\sin a_2\cdot\sin b_2\cdot\sin c_2$$

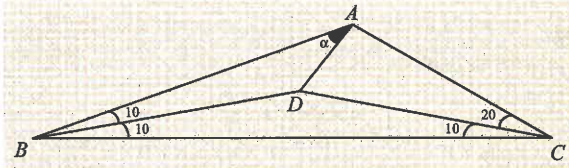
eşitliği kanıtlanmış olur.

Uyarı. Yukarıdaki işlemlerin aynısını herhangi bir çokgen için yaparsanız, bir şey değişmediğini fark edeceksiniz. Sözgelimi dörtgenler için Trigonometrik Ceva Teoremi aşağıdaki gibidir:



$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\cdot\frac{\sin c_1}{\sin c_2}\cdot\frac{\sin d_1}{\sin d_2}=1.$$

Örnek. *ABC üçgeninde*



m(ABD) = m(DBC) = m(BCD) = 10°,
m(DCA) = 20° ve m(DAB) = α° ise α kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Çözüm: Bir önceki derste anlattığımız Trigonometrik Ceva Teoremi'ni kullanacağız.

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}\cdot\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin(130^\circ-\alpha^\circ)}{\sin\alpha^\circ}=1$$

$$\frac{\sin(130^\circ-\alpha^\circ)}{\sin\alpha^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=2\cdot\cos 10^\circ$$

$$=\frac{\cos 10^\circ}{\sin 30^\circ}$$

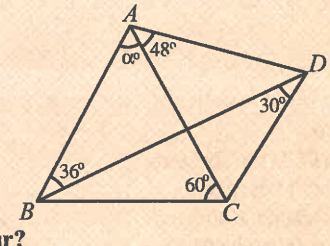
$$=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 30^\circ}$$

olduğundan $\alpha = 30$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

13.
ABCD bir dörtgen
[AC] ve *[BD]* köşegen
m(ABD) = 36°
m(BCA) = 60°
m(CDB) = 30°
m(DAC) = 48°
m(CAB) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 48 B) 54 C) 60 D) 66 E) 72

[MY]

Diğer sayfada Faruk Kaymak hocamın hazırladığı 6 güzel soru var, onları da çözüp konuya noktayı koyunuz.

14.
Bir ABC üçgeninde

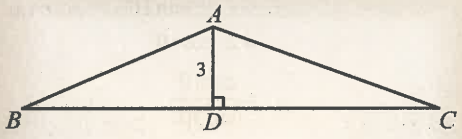
$$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$$

$$\sin(B+C)=\frac{1}{2}$$

olup $|AB|=4$ br olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?

A) 4 B) 5 **C)** 6 D) 7 E) 8

15.
ABC, A'ya ait yüksekliği 3 br olan bir üçgendir.



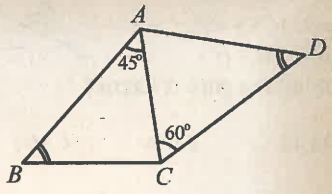
ADB ve ADC dik üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırasıyla 4,5 br ve 5 br olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı kaç br dir?

A) 16 **B)** 15 C) 14 D) 13 E) 12

16.
$ABCD$ bir dörtgen
$[AC]$ köşegen
$m(BAC)=45°$
$m(ACD)=60°$
$m(B)=m(D)$
olduğuna göre

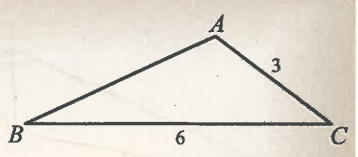
$$\frac{|BC|}{|AD|}$$

oranı kaçtır?



A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

17.
ABC bir üçgen
$|AC|=3$ br
$|BC|=6$ br
$m(A)=90°+m(B)$
olduğuna göre
cot B kaça eşittir?

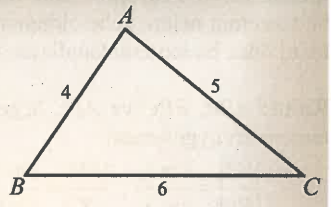


A) 5 B) 4 C) 3 **D)** 2 E) 1

18.
ABC bir üçgen
$|AB|=4$ br
$|BC|=6$ br
$|CA|=5$ br
olduğuna göre

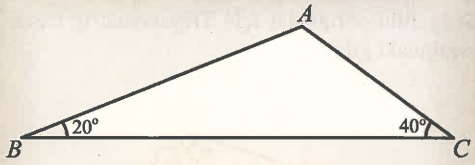
$$\frac{5\sin A+6\sin B}{3\sin C}$$

oranı kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 **E)** 5

19.
ABC üçgeninde $m(B)=20°$ ve $m(C)=40°$ veriliyor.



$|BA|+|AC|=4\cdot\sin 70°+2$ br olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

A) $2\sqrt{3}\cos 20°$ B) $2\sqrt{3}\sin 20°$ C) $\sqrt{3}\cos 20°$
D) $4\sqrt{3}\cos 20°$ E) $4\sqrt{3}\sin 20°$

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kosinüs Teoremi

Üçgenin temel elemanlarının açıları ile kenarları olduğunu biliyoruz. Açılarıyla kenarları arasındaki bağıntılar, hep trigonometri sayesinde gün ışığı görmüşler. Bunlardan en temeli şimdi vereceğimiz kosinüs teoremi olsa gerek. Hatta trigonometri bile bu teoremin bulunuşuyla başlamıştır dersek, sanırım yanılmış olmayız.

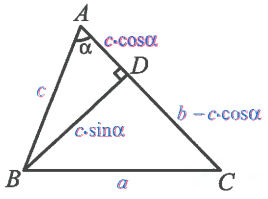
Teorem [Kosinüs]. *Kenar uzunlukları sırasıyla a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: Geometrinin en önemli teoremlerinden biri olduğu için iki farklı kanıt sunacağız.

Birinci kanıt. B'den A'ya indirilen dikme ayağı D olsun.



A açısının ölçüsüne α, $|AB|$'ye c br dersek,

$$|BD| = c\cdot\sin\alpha$$

ve

$$|AD| = c\cdot\cos\alpha$$

olur. $|AC| = b$ br ise

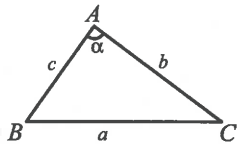
$$|DC| = b - c\cdot\cos\alpha$$

olur. Şimdi DBC dik üçgeninde Pisagor teoremi yazıyoruz:

$$a^2 = (c\cdot\sin\alpha)^2 + (b - c\cdot\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = c^2\cdot\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cdot\cos\alpha + c^2\cdot\cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

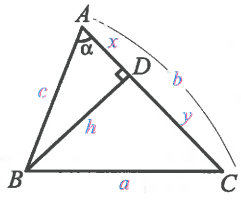
olduğundan kanıt biter.

İkinci kanıt. A açısının ölçüsüne α diyelim.



Eğer $\alpha = 90^\circ$ ise, kosinüs teoremi tam tamına Pisagor teoremidir. Bundan böyle $\alpha \neq 90^\circ$ olsun. α'nın 90°'den büyük ya da küçük olmasına göre iki şıkkımız var.

Birinci Şık. $\alpha < 90^\circ$. Aşağıdaki şekilden takip edelim.



ABC üçgeninde $[BD]$ yüksekliğine 'yükseklik teoremi' uygulanırsa

$$a^2 - c^2 = y^2 - x^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + y^2 - x^2 \\ &= c^2 + (y+x)(y-x) \\ &= c^2 + (y+x)(y+x-2x) \\ &= c^2 + (y+x)^2 - 2x(y+x) \\ &= c^2 + b^2 - 2bx \end{aligned}$$

Tanıma göre

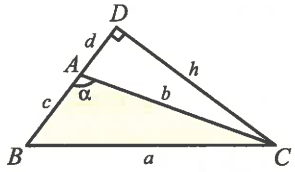
$$\cos\alpha = \frac{x}{c}$$

olduğundan $x = c\cdot\cos\alpha$ olur.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

elde ederiz ki, bu da bizim kanıtlamak istediğimiz eşitlik. □

İkinci Şık. $\alpha > 90^\circ$. Aşağıdaki şekilden takip edelim.



Tanımlardan dolayı,

$$\cos\alpha = -\frac{d}{b}.$$

Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. ADC'ye Pisagor teoremini uygularsak,

$$b^2 = h^2 + d^2$$

buluruz. Bunu da aklımızda tutalım, bu da gerekecek. Son olarak, DBC'ye Pisagor teoremi uygulayıp yukarda bulduğumuz iki eşitliği yerlerine koyalım:

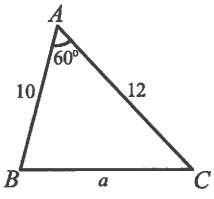
$$\begin{aligned} a^2 &= (c+d)^2 + h^2 \\ &= c^2 + d^2 + h^2 + 2cd \\ &= c^2 + b^2 + 2cd \\ &= c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha. \end{aligned}$$

Bu şıkta teoremimiz kanıtlanmıştır.

Örnek [1974 ÜSS]. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan ABC üçgeninde $m(A) = 60^\circ$, $b = 12$ br ve $c = 10$ br olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}\sqrt{31}$ B) $\sqrt{31}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{31}$ D) $2\sqrt{31}$ E) $3\sqrt{31}$

Çözüm: Verilen üçgende iki kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açı ölçüsü bilindiğinden kosinüs teoremi yazılabilir.

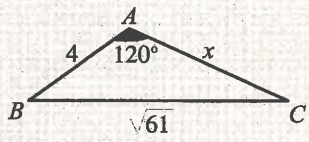


$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 12^2 + 10^2 - 2\cdot 12\cdot 10\cdot \cos 60^\circ \\ &= 144 + 100 - 120 = 124 \end{aligned}$$

olduğundan $a = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1997 ÖSS].
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 120^\circ$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = \sqrt{61}$ br
$|AC| = x$ br
Yukarda verilenlere göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Kosinüs Teoremi'ni kullanacağız.

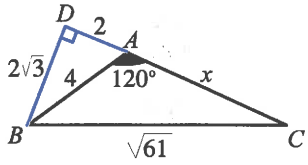
$$61 = 16 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot(-\frac{1}{2})$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$(x+9)(x-5) = 0$$

ve $x > 0$ olduğundan $x = 5$ olarak bulunur.

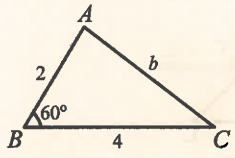
İkinci yol. Şu anki konumuz kosinüs teoremi olmasa, ilk yolu hiç göstermezdik.



120° özel bir açı olduğundan bütünleri de özel bir açıdır. B'den CA'ya dik indirirsek, $|DA| = 2$ ve $|DB| = 2\sqrt{3}$ olduğunu buluruz. BDC dik üçgeninde Pisagor Teoremi'yle de $|DC| = 7$ yani $|AC| = x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: A.

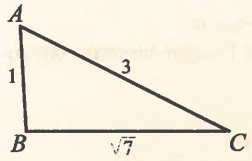
1.



b kaçtır?

$2\sqrt{3}$

2.



$m(A)$ kaç derecedir?

60

3.
Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde $c = \sqrt{7}b$ olup $m(C) = 120^\circ$ dir.

Buna göre $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ **D) 2** E) $\sqrt{5}$

Örnek. *Kenar uzunlukları 3-5-7 olan bir üçgenin en büyük ölçülü iç açısının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 75 B) 90 C) 105 D) 120 E) 135

Çözüm: Bir üçgenin en büyük ölçülü iç açısı, en uzun kenarın karşısındaki açıdır. Bu yüzden kosinüs teoremini uzunluğu 7 br olan kenara göre yazacağız.

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cdot\cos\alpha$$
$$49 = 9 + 25 - 30\cdot\cos\alpha$$
$$15 = -30\cdot\cos\alpha$$

olduğundan $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ olarak bulunur. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ olsaydı $\alpha = 60^\circ$ diyecektik, kosinüsün negatif çıkması bize açının geniş olduğunu anlatıyor, o halde $\alpha = 120^\circ$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki kenar uzunluğu 3 ve 8 birim olan bir üçgende, bu kenarların belirttiği açının ölçüsü 60° olduğuna göre üçüncü kenarın uzunluğu kaç birimdir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

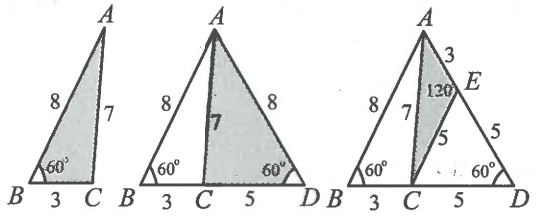
Çözüm: Üçüncü kenarın boyuna x br diyelim. Kosinüs teoreminden

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot3\cdot8\cdot\cos 60^\circ$$
$$= 9 + 64 - 24 = 49$$

diye $x = 7$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Okumadan Geçmeyin! Son örneğimizde 3-7-8 üçgeninde, uzunluğu 7 olan kenarın gördüğü açı ölçüsünün 60° olduğunu bulduk.

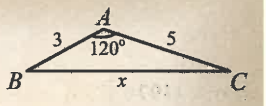


Şimdi yukardaki gibi bir ABC üçgeni çizelim. Kenar uzunlukları 3-7-8 olsun. $[BC]$'yi C yönünde 5 birim uzatalım. Oluşan ABD üçgeni tepe açısı 60° ve yan kenarları eşit uzunlukta diye eşkenar üçgen olur. O halde 5-7-8 üçgeninde de uzunluğu 7 olan kenarın gördüğü açı ölçüsünün 60° olduğunu anlarız.

Şimdi de C'den AB'ye paralel bir doğru çizelim. AD'yi E'de kessin. Görülüyor ki 3-5-7 üçgeninde de uzunluğu 7 olan kenarın gördüğü açı ölçüsü 120°'ymiş.

Notları okuyan öğrencilere bir tavsiyem olacak: Cevabın tam sayı çıkmasını isteyen birçok öğretmen sorusunu bu üçgenleri kullanarak hazırlar. Bu üç özel üçgeni ezbere bilmenizde fayda vardır! Kim oturup da kosinüs teoremini yazacak?

4.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 120^\circ$
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 5$ br



olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 **E) 7**

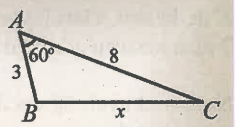
5.
$a = 9$ br, $b = 15$ br, $m(C) = 120^\circ$
olan bir ABC üçgeninde $|AB|$ kenarının uzunluğu kaç br olur?

A) 16 B) 17 C) 20 **D) 21** E) 24

6.
Kenar uzunlukları 6-10-14 olan bir üçgenin en büyük iç açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 120

7.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 60°$
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç br dir?

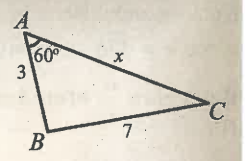


A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

8.
$a = 16$ br, $c = 6$ br, $m(B) = 60°$
olan bir ABC üçgeninde b kenarının uzunluğu kaç br olur?

A) 7 B) 10 C) 14 D) 16 E) 20

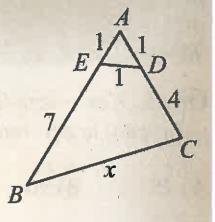
9.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 60°$
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 7$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

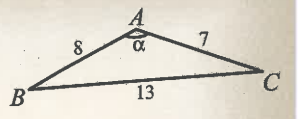
10.
ABC ve AED birer üçgen
$|AE| = |ED| = |DA| = 1$ br
$|DC| = 4$ br
$|EB| = 7$ br

olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

11.
ABC bir üçgen
$|AC| = 7$ br
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 13$ br



olduğuna göre $m(CAB) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

12.

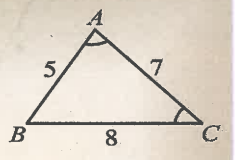
$a = 7\sqrt{2011}$ br
$b = 8\sqrt{2011}$ br
$c = 13\sqrt{2011}$ br

olan bir *ABC* üçgeninde $m(C)$ kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ **D)** $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

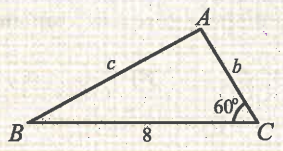
13.

ABC bir üçgen
$|AB| = 5$ br,
$|AC| = 7$ br,
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$\cos(A + C)$ kaça eşittir?



A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BC| = 8$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
$m(C) = 60°$
$b < c < 8$
b ve c tam sayı olduğuna göre b + c toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?



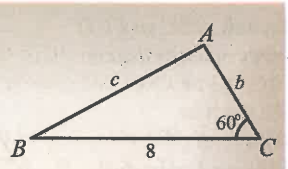
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: (*b*, *c*) ikilisi daha önce anlatıldığı üzere (3, 7) veya (5, 7)'dir. O halde $b + c$ toplamı en çok $5 + 7 = 12$ olabilir.

Doğru cevap: D.

14.

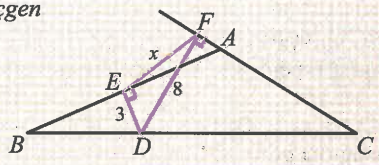
ABC bir üçgen
$|AB| = c$ br
$|AC| = b$ br
$|BC| = 8$ br
$m(BCA) = 60°$



b ve c birer tam sayı olduğuna göre $c - b$ en çok kaç olabilir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Örnek. *ABC bir üçgen*
$DE \perp AB$
$DF \perp CA$
$|DE| = 3$ br
$|DF| = 8$ br
$|EF| = x$ br
$|AB| : |BC| : |CA| = 8 : 13 : 7$ *olduğuna göre x kaçtır?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

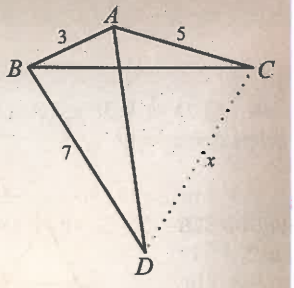
Çözüm: 7-8-13 üçgeninde geniş açı ölçüsü 120° olduğundan $m(EDF) = 60°$ olur. O halde *EDF*, 3-7-8 özel üçgeni çıkar. Yani $x = 7$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

15.

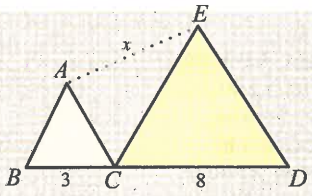
ABC ve *ABD* birer üçgen
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 7$ br
$|CA| = 5$ br
$|BD| = 7$ br
$|AD| = 8$ br
$|DC| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Örnek. *ABC ve ECD birer eşkenar üçgen*
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 8$ br
olduğuna göre
$|AE| = x$ *kaç* br *dir?*



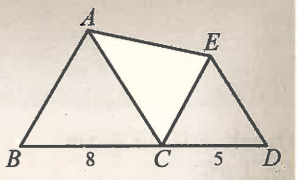
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $|AC| = 3$ br, $|CE| = 8$ br ve $m(ECA) = 60^\circ$ olduğundan $|AE| = x = 7$'dir. Bu notları okumayanlar ACE'de kosinüs teoremini yapadursunlar!

Doğru cevap: B.

16.
ABC ve ECD birer eşkenar üçgen

$|BC| = 8$ br
$|CD| = 5$ br

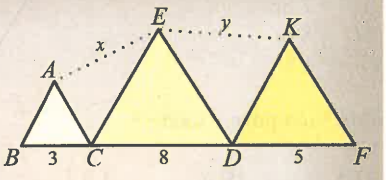


olduğuna göre ACE üçgeninin çevresi kaç br *dir?*

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 **E) 20**

17.
ABC, ECD ve KDF eşkenar üçgenlerinin B, C, D, F köşeleri doğrudaştır.

$|BC| = 3$ br
$|CD| = 8$ br
$|DF| = 5$ br
$|AE| = x$ br
$|EK| = y$ br

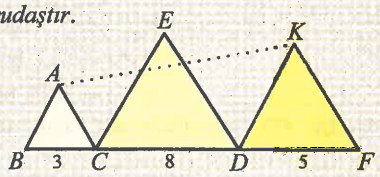


olduğuna göre $x - y$ farkı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

Örnek. *ABC, ECD ve KDF eşkenar üçgenlerinin B, C, D, F köşeleri doğrudaştır.*

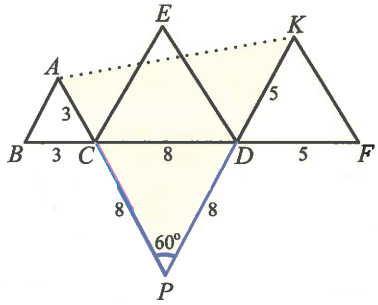
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 8$ br
$|DF| = 5$ br



olduğuna göre
A ile K köşeleri arasındaki uzaklık kaç br *dir?*

A) 15 B) 14 C) $8\sqrt{3}$ D) $7\sqrt{3}$ E) 9

Çözüm: $[AC]$'yi C yönünde, $[KD]$'yi D yönünde uzatarak kesiştirelim. Kesişim noktası P olsun.

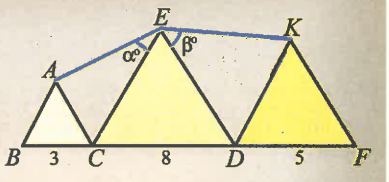


Böyle bir durumda CPD eşkenar üçgen olur. O halde $|PA| = 11$ br ve $|PK| = 13$ br olarak bulunur. APK üçgeninde kosinüs teoreminden $|AK| = 7\sqrt{3}$ br bulunur.

Doğru cevap: D.

18.
ABC, ECD ve KDF eşkenar üçgenlerinin B, C, D, F köşeleri doğrudaştır.

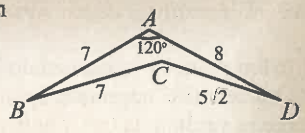
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 8$ br
$|DF| = 5$ br
$m(AEC) = \alpha^\circ$
$m(KED) = \beta^\circ$



olduğuna göre $\alpha + \beta$ toplamı kaçtır?

A) 45 **B) 60** C) 75 D) 90 E) 120

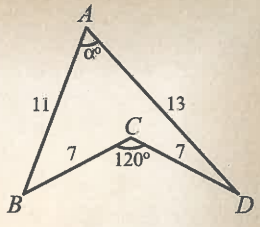
19.
$ABCD$ bir içbükey dörtgen
$|AB| = |BC| = 7$ br
$|AD| = 8$ br
$|CD| = 5\sqrt{2}$ br



olduğuna göre BCD açısının ölçüsü kaç derecedir?

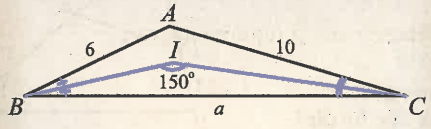
A) 105 B) 120 **C)** 135 D) 150 E) 165

20.
$ABCD$ bir içbükey dörtgen
$|AB| = 11$ birim
$|AD| = 13$ birim
$|BC| = |CD| = 7$ birim
$m(DCB) = 120°$
olduğuna göre
$m(DAB) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 105 B) 90 C) 75 **D)** 60 E) 45

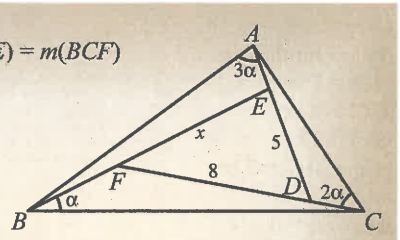
21.
ABC üçgeninde BI ve CI iç açıortay olup $m(BIC) = 150°$ veriliyor.



$|AB| = 6$ br ve $|AC| = 10$ br olduğuna göre $|BC| = a$ kaç br dir?

A) 11 B) 12 C) 13 **D)** 14 E) 15

22.
$m(CAD) = m(ABE) = m(BCF)$
$m(DAB) = 3\alpha$
$m(FCA) = 2\alpha$
$m(CBE) = \alpha$
$|ED| = 5$ br
$|DF| = 8$ br



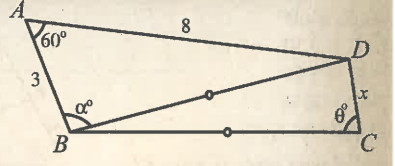
olduğuna göre $|EF|$ kaç br dir?

A) 5 B) 6 **C)** 7 D) 8 E) 9

23.
Kenar uzunlukları asal sayı olan çevrece en küçük çeşitkenar üçgenin bir iç açısının ölçüsü olabilir?

A) 60° B) 72° C) 90° **E)** 120° E) 135°

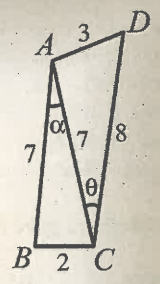
24.
$ABCD$ bir dörtgen
$m(BAD) = 60°$
$m(ABD) = \alpha°$
$m(BCD) = \theta°$
$\alpha + \theta = 180$
$|BD| = |BC|$
$|AB| = 3$ br
$|AD| = 8$ br



olduğuna göre $|CD| = x$ kaç br dir?

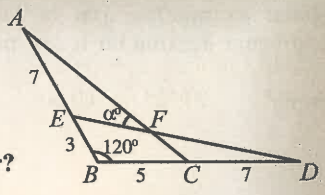
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{3}$ **D)** 2 E) $\sqrt{5}$

25.
$ABCD$ bir dörtgen
$|AD| = 3$ br
$|DC| = 8$ br
$|BC| = 2$ br
$|AB| = |AC| = 7$ br
$m(BAC) = \alpha$
$m(ACD) = \theta$
olduğuna göre $\alpha + 2\theta$ toplamı kaç derecedir?



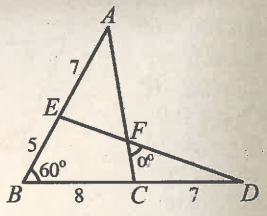
A) 45 **B)** 60 C) 75 D) 90 E) 120

26.
ABC ve EBD birer üçgen
$m(B) = 120°$
$|AE| = |CD| = 7$ br
$|EB| = 3$ br
$|BC| = 5$ br
$m(EFA) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 15 **B)** 30 C) 36 D) 40 E) 45

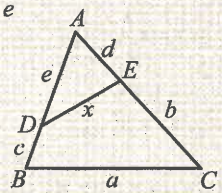
27.
ABC ve EBD birer üçgen
$m(B) = 60°$
$|AE| = |CD| = 7$ br
$|EB| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$m(DFC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



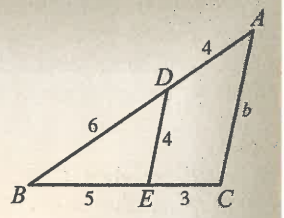
A) 30 B) 36 C) 45 **D)** 60 E) 75

Soru Tipi. *Yandaki gibi a, b, c, d, e değerleri verilip, x değeri sorulur.*

Çözüm yolu. Üç kenar uzunluğu da bilinen ABC üçgeninde kosinüs teoremi yardımıyla cos A bulunur, sonra DAE üçgenindeki kosinüs teoreminde yerine yazılarak x bulunur.



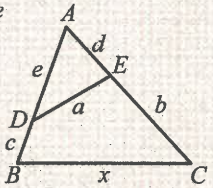
28.
ABC bir üçgen
$|AD| = |DE| = 4$ br
$|DB| = 6$ br
$|BE| = 5$ br
$|EC| = 3$ br
olduğuna göre
$|AC| = b$ kaç br dir?



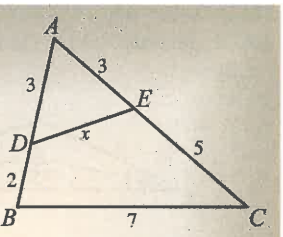
A) 5 B) 6 C) 7 **D)** $2\sqrt{11}$ E) $\sqrt{22}$

Soru Tipi. *Yandaki gibi a, b, c, d, e değerleri verilip, x değeri sorulur.*

Çözüm yolu. Üç kenar uzunluğu da bilinen ADE üçgeninde kosinüs teoremi yardımıyla cos A bulunur, sonra ABC üçgenindeki kosinüs teoreminde yerine yazılarak x bulunur.

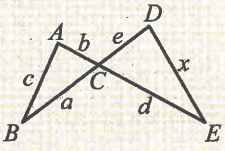


29.
ABC bir üçgen
$|AD| = |AE| = 3$ br
$|DB| = 2$ br
$|BC| = 7$ br
$|CE| = 5$ br
olduğuna göre
$|DE| = x$ kaç br dir?



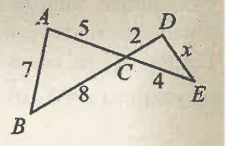
A) 2 **B)** 3 C) 4 D) 5 E) 6

Soru Tipi. *Aşağıdaki gibi bir şekilde a, b, c, d, e, x değerlerinden beşi verilir, altıncı sorulur.*



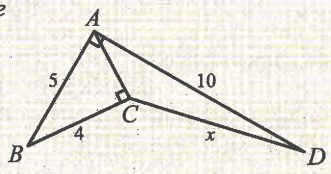
Çözüm yolu. Üç kenar uzunluğu da bilinen üçgende kosinüs teoremi yardımıyla cos *C* bulunur, bu değer diğer üçgende kosinüs teoreminde yerine yazılarak cevaba ulaşılır.

30.
Yandaki şekilde *A, C, E* ve *B, C, D* noktaları doğrusaldır.
$|CA| = 5$ br
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 2$ br
$|CE| = 4$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 **D)** $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

Örnek. *Yandaki şekilde*
$BA \perp AD$ *ve* $BC \perp CA$
$|CB| = 4$ br
$|BA| = 5$ br
$|AD| = 10$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ *kaç br olur?*



A) $\sqrt{51}$ B) $\sqrt{61}$ C) $\sqrt{71}$ D) $\sqrt{82}$ E) $\sqrt{93}$

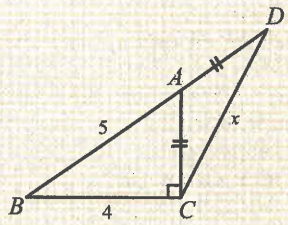
Çözüm: $|AC| = 3$ br olduğunu hemen yazalım. *x*'in bulunabilmesi, cos(*DAC*) değerinin bilinmesine bağlı. Diğer yandan $m(DAC) = m(ABC)$ olduğundan $\cos(ABC) = 4/5$ diye $\cos(DAC) = 4/5$ olur.

$$x^2 = 3^2 + 10^2 - 2\cdot 3\cdot 10\cdot \frac{4}{5} = 61$$

olduğundan $x = \sqrt{61}$ bulunur.

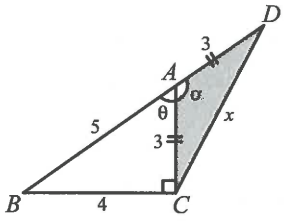
Doğru cevap: B.

Örnek. *DBC bir üçgen*
$AC \perp BC$
$|CA| = |AD|$
$|BC| = 4$ br
$|BA| = 5$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre
$x\sqrt{5}$ *kaçtır?*



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $m(DAC) = \alpha$ olsun. cos α değerini bulabilirsek, *DAC* üçgeninde kosinüs teoreminden soruyu çözeriz.



$m(CAB) = \theta$ olsun. α ile θ bütünler olduğundan

$$\cos\alpha = -\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

olur. O halde,

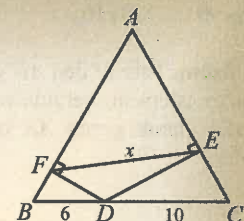
$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot(-\frac{3}{5}) = 18 + \frac{54}{5} = \frac{144}{5}$$

diye $x = \frac{12}{\sqrt{5}}$ yani $x\sqrt{5} = 12$ bulunur.

Direkt olarak, *DBC* üçgeninde *B* açısına bağlı bir kosinüs teoremi de yazabilirdik, daha kısa sürerdi ama bütünler açıların kosinüslerinin birbirlerinin zıt işaretlileri olduğunu da hatırlayalım istedim.

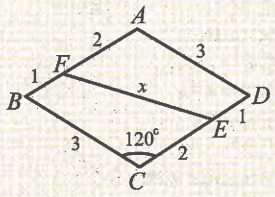
Doğru cevap: A.

31.
ABC bir eşkenar üçgen
$DF \perp AB$
$DE \perp AC$
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 10$ br
olduğuna göre
$|FE| = x$ kaç br dir?



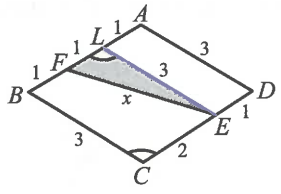
A) 14 B) $8\sqrt{3}$ C) $7\sqrt{3}$ D) 12 E) $4\sqrt{6}$

Örnek. *ABCD bir eşkenar dörtgen*
$|CE| = |FA| = 2$ br
$|BF| = |ED| = 1$ br
$m(BCD) = 120^\circ$
olduğuna göre
$|FE| = x$ *kaç br dir?*



A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{12}$ E) $\sqrt{13}$

Çözüm: E'den AD kenarına paralel olan EL doğrusunu çizelim.



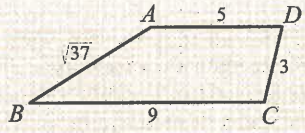
$|FL| = 1$ br ve $|LE| = 3$ br olur. ELF açısının ölçüsü de 120° olacağından ELF üçgeninde kosinüs teoreminden,

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot1\cdot3\cdot(-\frac{1}{2}) = 1 + 9 + 3 = 13$$

olur ki buradan $x = \sqrt{13}$ bulunur.

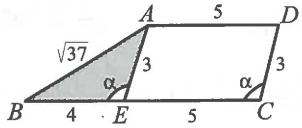
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABCD bir yamuk*
$|BC| = 9$ br
$|CD| = 3$ br
$|DA| = 5$ br
$|AB| = \sqrt{37}$ br
olduğuna göre $m(C)$ *kaç derecedir?*



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: İster D'den AB'ye paralel olarak geçen doğruyu çizin, isterseniz şekilde yaptığımız gibi A'dan DC'ye paralel olarak geçen AE doğrusunu. $AECD$ paralelkenar olur.



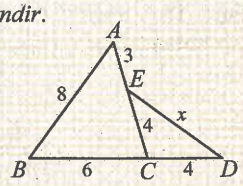
BEA üçgeninde kosinüs teoreminden,

$$37 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot3\cdot4\cdot\cos\alpha$$
$$37 = 25 - 24\cdot\cos\alpha$$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ olduğundan $\alpha = m(C) = 120^\circ$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC ve CDE birer üçgendir.*
$|EA| = 3$ br
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = |CE| = 4$ br
olduğuna göre $|ED| = x$ *kaç br dir?*



A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{10}$ E) 7

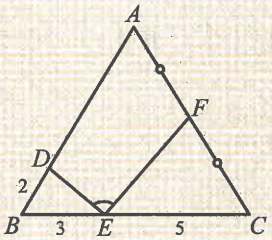
Çözüm: $m(ECD) = \alpha$ ve $m(BCA) = \theta$ olsun. α ile θ'nın bütünler olduğuna da dikkat edin. BCA üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos\theta$'yı bulacağız.

$$\cos\alpha = -\cos\theta$$

olduğundan bunu ECD üçgenindeki kosinüs teoremi uygulamasında yerine koyacağız.
Uzatmayayım, $\cos\theta = 1/4$ diye $\cos\alpha = -1/4$ olur. Yerine yazılırsa $x = 2\sqrt{10}$ olarak bulunur.

Doğru Cevap: D.

Örnek. *ABC eşkenar üçgen*
$|DB| = 2$ br
$|BE| = 3$ br
$|EC| = 5$ br
$|CF| = |FA|$
olduğuna göre
$m(DEF)$
kaç derecedir?



A) 60 B) 90 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: FDE üçgeninin kenar uzunluklarını hesaplayarak sonuca gitmeyi planlıyoruz.

$$|DE|^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot2\cdot3\cdot\cos 60^\circ = 7$$
$$|EF|^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cdot\cos 60^\circ = 21$$
$$|FD|^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot4\cdot6\cdot\cos 60^\circ = 28$$

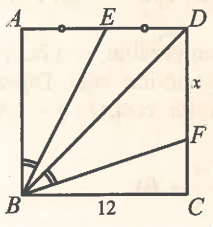
olduğunu not edelim.

$$|DE|^2 + |EF|^2 = |FD|^2$$

eşitliğini fark etmiş olmalısınız. Pisagor Teoremi sağlandığı için $m(DEF) = 90^\circ$'dir.

Doğru cevap: B.

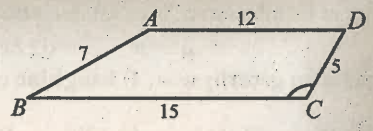
32.



x kaçtır?

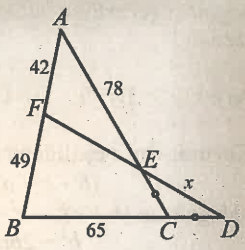
8

33.
$ABCD$ yamuk
$AD \parallel BC$
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 15$ br
$|CD| = 5$ br
$|DA| = 12$ br
olduğuna göre tan C kaça eşittir?



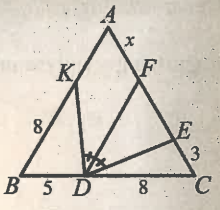
A) -1 B) $-\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) -2 E) $-\sqrt{5}$

34.
ABC ve FBD birer üçgen
$|EA| = 78$ br
$|AF| = 42$ br
$|FB| = 49$ br
$|BC| = 65$ br
$|CD| = |CE|$
olduğuna göre
$|ED| = x$ kaç br dir?



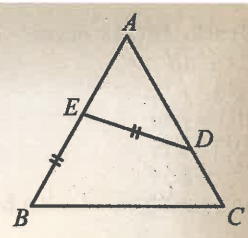
A) 26 B) 52 C) $26\sqrt{3}$ D) $13\sqrt{3}$ E) 13

35.
ABC bir eşkenar üçgen
$|KB| = |DC| = 8$ br
$|BD| = 5$ br
$|CE| = 3$ br
$m(KDF) = m(FDE)$
olduğuna göre
$|AF| = x$ kaç br dir?



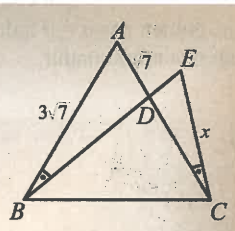
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

36.
ABC eşkenar üçgen
$|AD| = 2 \cdot |DC|$
$|BE| = |ED|$
olduğuna göre
$\frac{|AE|}{|EB|}$ **oranı kaçtır?**



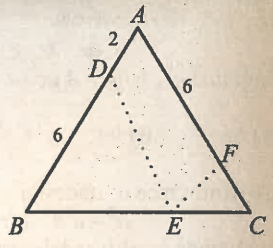
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{7}$

37.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(ABE) = m(ACE)$
$|AB| = 3\sqrt{7}$ br
$|AD| = \sqrt{7}$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ kaç br dir?



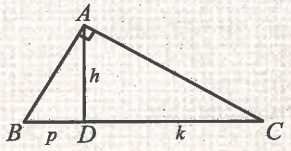
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

38.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [AB]$
$E \in [BC]$
$F \in [CA]$
$|AD| = 2$ br
$|DB| = 6$ br
$|AF| = 6$ br
Buna göre $|DE|^2 + |EF|^2$ toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?



A) 19 B) 25 C) 32 D) 36 E) 38

Örnek. *ABC bir üçgen*
$CA \perp AB$
$|AD| = h$ br
$|BD| = p$ br
$|DC| = k$ br
$h^2 = p \cdot k$
olduğuna göre m(ADC) kaç derecedir?



A) 60 B) 75 C) 90 D) 120 E) 135

Çözüm: BDA açısının ölçüsüne α diyelim. ADC açısının ölçüsü $180° - \alpha$ olacağından $\cos(ADC) = -\cos(ADB)$ olur. Şimdi ADB ve ADC üçgenlerinde kosinüs teoremi yazıp karşılaştığımız eşitlikleri toplayacağız.

$$|AB|^2 = h^2 + p^2 - 2ph\cos\alpha$$
$$|AC|^2 = h^2 + k^2 + 2hk\cos\alpha$$

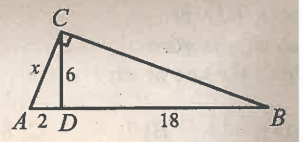
Toplayalım:

$$|BC|^2 = 2h^2 + p^2 + k^2 - 2ph\cos\alpha + 2hk\cos\alpha$$
$$(p+k)^2 = 2pk + p^2 + k^2 - 2ph\cos\alpha + 2hk\cos\alpha$$
$$2ph\cos\alpha = 2kh\cos\alpha$$

eşitliğinden $\cos\alpha = 0$ bulunur. Bu da ancak $\alpha = 90°$ olduğunda mümkündür.

Doğru cevap: C.

39.
ABC bir üçgen
$BC \perp CA$
$|CD| = 6$ br
$|AD| = 2$ br
$|DB| = 18$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) $\sqrt{30}$ C) 6 **D)** $2\sqrt{10}$ E) 7

Örnek. *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları olan a, b ve c değerleri arasında*

$$a^2 \cdot (a - b - c) = a^3 - b^3 - c^3$$

bağıntısı geçerliyse A açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B) 90 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: Önce a^2 ifadesini parantez içine dağıtalım.

$$a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$a^2 \cdot (b + c) = (b + c) \cdot (b^2 - bc + c^2)$$

çıkar. Bu da $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ demektir. Üst soruda yaptığımız gibi

$$-bc = -2bc \cdot \cos A$$

dersek, $\cos A = \frac{1}{2}$ çıktığından $m(A) = 60°$ bulunur.

Doğru cevap: A.

40.
Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde

$$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,bc$$

bağıntısı geçerliyse $m(A)$ hangisine eşittir?

A) 30° B) 45° C) 120° **D)** 135° E) 150°

Örnek. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde*

$$b + c - a = \frac{bc}{a+b+c}$$

bağıntısı geçerliyse bu üçgenin A açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B) 90 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: Önce eşitliği bir düzenleyelim:

$$(b + c - a) \cdot (b + c + a) = bc$$

olduğundan $(b + c)^2 - a^2 = bc$ olur.

$$b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = bc$$

eşitliğinden

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

bulunur ki, kosinüs teoremi gereği

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

olduğunu bildiğimizden $bc = -2bc \cdot \cos A$ bulunur.

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

çıktığından $m(A) = 120°$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

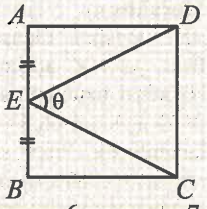
41.
Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

bağıntısı geçerliyse $m(A)$ hangisine eşittir?

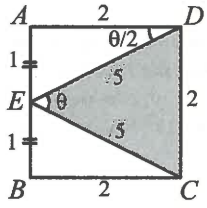
A) 30° **B)** 60° C) 90° D) 120° E) 150°

Örnek. *ABCD bir kare*
$E \in [AB]$
$|AE| = |EB|$
$m(DEC) = \theta$
olduğuna göre
$\tan\theta$ *kaçtır?*



A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

Çözüm: Karenin bir kenar uzunluğu 2 br olsun.



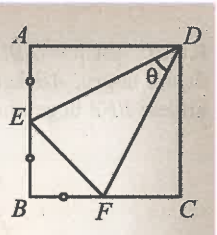
$|AE| = |EB| = 1$ br olur. $|ED| = |EC| = \sqrt{5}$ br olduğundan DEC üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos\theta$'yı bulup, oradan $\tan\theta$ değerini bulacağız.

$$2^2 = 5 + 5 - 2\cdot5\cdot\cos\theta$$

eşitliğinden $\cos\theta = \frac{3}{5}$ bulunur. Uygun dik üçgeni çizerek, θ dar açı olduğundan, $\tan\theta = \frac{4}{3}$ olduğu rahatlıkla bulunabilir. EDA üçgeninde $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ olduğundan, yarım açı formüllerini kullanarak da $\tan\theta$'ya ulaşılabilirdi, tavsiyemiz odur, ilerde göreceğiz.

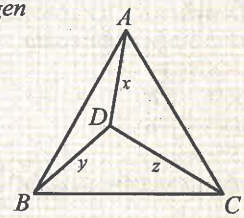
Doğru cevap: B.

42.
ABCD bir kare
$|AE| = |EB| = |BF|$
$m(EDF) = \theta$
olduğuna göre
tan θ kaça eşittir?



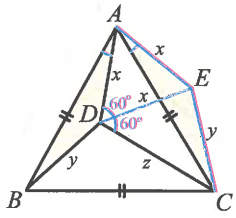
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Soru Tipi. *ABC bir eşkenar üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$|DA| = x$ br
$|DB| = y$ br
$|DC| = z$ br
$y^2 = x^2 + z^2 - xz$
olduğuna göre
$m(ADC)$ *kaç derecedir?*



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

Çözümü: $[AD]$ kenarı üzerine üçgenin dışına doğru şekildeki gibi bir eşkenar üçgen çizelim.



$m(BAD) = m(CAE)$, $|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |AE|$ olduğundan BAD ile CAE eş olur. O halde $|EC| = y$ br olur. Şimdi EDC üçgeninin kenarları x br, z br ve y br olduğuna dikkat ediniz. Kosinüs teoremi gereği

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cdot\cos(EDC)$$

olmalıdır. Soruda bu değer $y^2 = x^2 + z^2 - xz$ olarak verildiğinden

$$-2xz\cos(EDC) = -xz$$

olmalıdır ki buradan $\cos(EDC) = 1/2$ çıktığından

$$m(EDC) = 60^\circ$$

olduğu anlaşılır. Şu durumda

$$m(ADC) = m(ADE) + m(EDC) = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

bulunur.

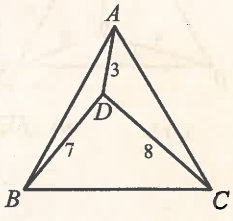
Doğru cevap: C.

Bu teoremin tersi de doğrudur. Yani ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde alınan bir D noktası için ADC açısının ölçüsü 120° ise

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - |AD|\cdot|CD|$$

olur. Kanıt nerdeyse aynı, aşağıdaki sorudan sonraki çözümlü örneği inceleyiniz.

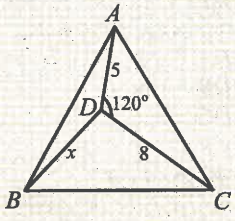
43.



ABC eşkenar üçgeninin çevresi kaç br dir?

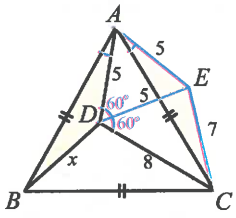
$3\sqrt{97}$

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$m(ADC) = 120^\circ$
$|AD| = 5$ br
$|DC| = 8$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 12 E) 13

Çözüm: Her zamanki gibi *ADE* eşkenar üçgenimizi oluşturalım.



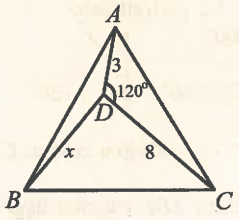
$m(ADE) = 60^\circ$ olduğundan $m(EDC) = 60^\circ$ olacaktır. *EDC* üçgeninde kosinüs teoreminden $|EC| = 7$ br bulunur. Aslında özel üçgenler dersini iyi hatırlayanlar bu değerin 7 olduğunu kafadan bulmuşlardır. Diğer yandan

$m(BAD) = m(CAE)$, $|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |AE|$

olduğundan *BAD* ile *CAE* eş olur. Öyleyse $|BD| = |EC| = 7$ br olmalıdır.

Doğru cevap: A.

44.

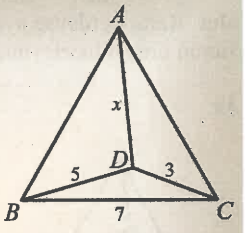


ABC eşkenar üçgen ise *x* kaçtır?

7

45.
ABC bir eşkenar üçgen
$|CD| = 3$ birim
$|DB| = 5$ birim
$|BC| = 7$ birim

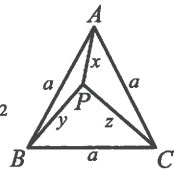
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç birimdir?



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) $\sqrt{19}$

Meraklısına. Verdiğim son iki soru tipine ait şekilde *ADC* açısının ölçüsünün nasıl bulunduğunu öğrendik. Peki, ya *ADC* açısının ölçüsü değil de eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu sorulsaydı? O zaman, *ADC* üçgeninde *D* açısının ölçüsü bilindiğinden kosinüs teoremi kullanabilirdik. Peki, ya değerler *ADC* açısının ölçüsünü rasyonel çıkartmasaydı? O halde ne yapacaktık? Gerçi kosinüs teoremini uygulamak için illa tepe açısının ölçüsünün rasyonel olması gerekmiyor, kosinüsünün bilinmesi yetiyor ama işlemler bayağı bir uzayacak ve karışacaktı. *Gardner* 1977'de verdiği bir formül ile bizi bu dertlerden kurtarmış.

Şöyle ki;
Bir kenarı a br *olan bir eşkenar üçgen içinde alınan isteksel bir P noktasının köşelere uzaklıkları x, y, z br ise*
$3(x^4 + y^4 + z^4 + a^4) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2$
eşitliği geçerlidir.

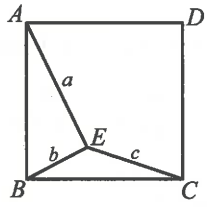


Teorem. *Bir ABCD karesinin iç bölgesinde alınan E noktası için $|EA|^2 = 2\cdot|EB|^2 + |EC|^2$ ise $m(BEC) = 135^\circ$.*

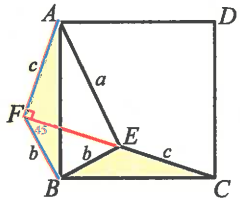
Yani, yandaki şekle göre

$a^2 = 2b^2 + c^2$

ise $m(BEC) = 135^\circ$.



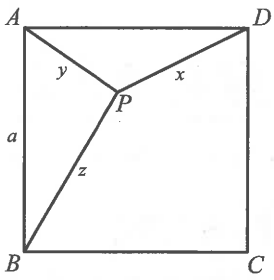
Kanıt: $|BC| = |AB|$ olduğundan *BEC* üçgenini, karenin dışına doğru, *AB* kenarı üzerine yapıştırabiliriz. Alt şekildeki *BFA* üçgeninden bahsediyorum.



FBA ile *EBC* açıları eş olduğundan *FBE* açısı da dik olur. O halde *FBE* üçgeni ikizkenar dik üçgendir. Bu yüzden $|FE| = b\sqrt{2}$'dir. Bize teoremde verilen

$$a^2 = 2b^2 + c^2$$

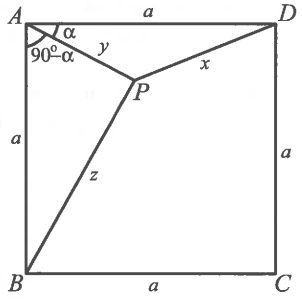
eşitliğiyse, Pisagor teoreminin karşıtı gereği *AFE* üçgeninin dik olduğunu anlatır. Sonuçta $m(AFB) = 135^\circ$ bulunduğundan $m(BEC) = 135^\circ$ olmalıdır.



Eğer yukarıdaki soruda x, y, z değerleri verilip karenin bir kenarı olan a sorulsaydı PAB üçgeninde kosinüs teoremi uygulayıp a'yı bulabilirdik. Fakat ya x, y, z değerleri APB açısını rasyonel çıkartmasaydı? O zaman ne yapacaktık? Elbet trigonometri, uzun da olsa işimizi görür fakat x, y, z, a arasında çok ilginç bir bağıntı var. Şimdi onu bulacağız.

Bu soru Matematik Dünyası dergisinin 2006-I nolu sayısında tarafımdan ödüllü olarak sorulmuştu. Ödülü kazanan Eray Kanpak'ın harikulade çözümü aşağıdadır:

Çözüm: Aşağıdaki şekilden takip edelim.



$m(DAP) = \alpha$ olsun. $m(PAB) = 90^\circ - \alpha$ olur. DAP üçgeninde kosinüs teoreminden

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + y^2 - x^2}{2ay}$$

ve PAB üçgeninde kosinüs teoreminden

$$\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{2ay}$$

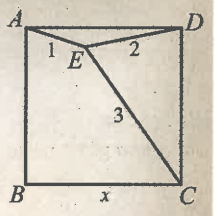
bulunur. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olduğundan

$$\left(\frac{a^2 + y^2 - x^2}{2ay}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + y^2 - z^2}{2ay}\right)^2 = 1$$

olur. Şöyle de yazılabilir:

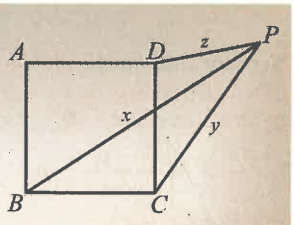
$$(a^2 + y^2 - x^2)^2 + (a^2 + y^2 - z^2)^2 = (2ay)^2$$

46.
$ABCD$ bir kare
E iç bölgede bir nokta
$|EA| = 1$ br
$|ED| = 2$ br
$|EC| = 3$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre $m(AED)$ kaç derecedir?



A) 105 B) 120 **C) 135** D) 150 E) 165

47.
$ABCD$ bir kare
P dış bölgede bir nokta
$|PB| = x$ br
$|PC| = y$ br
$|PD| = z$ br
$x^2 = 2y^2 + z^2$



olduğuna göre $m(DPC)$ kaç derecedir?

A) 30 **B) 45** C) 60 D) 67,5 E) 75

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Stewart Teoremi

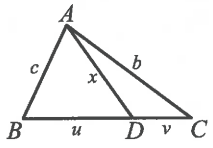
Bir üçgenin yardımcı elemanlarının yükseklik, kenarortay ve açıortay olduğunu biliyoruz. Bu yardımcı elemanların boylarını hesaplamaya geldi sıra. Her biri için ayrı ayrı formüller vakti gelince verilecektir ama hepsinde de birazdan öğreneceğimiz Stewart teoremine atıfta bulunulacaktır. Bu yüzden kulaklarımızı dört açmalıyız.

Yardımcı elemanların ortak özelliği üçgene ait bir kesen olmalarıdır. Peki kesen ne demektir? Kesen, bir üçgenin herhangi bir köşesini karşısındaki kenar üzerindeki bir noktaya birleştiren doğru parçasıdır. İşte Stewart teoremi üçgende herhangi bir kesenin boyunu hesaplamaya yarayan bir formüldür. Onu bildiğiniz zaman açıortay veya kenarortay boylarını veren formülleri unutsanız bile Stewart teoremi imdadınıza koşacaktır. Lafı fazla uzatmadan teoremi verelim.

Teorem [Stewart]. *ABC bir üçgen, [AD] bu üçgene ait herhangi bir kesen olsun. $|AD| = x$ için*

$$x^2 = \frac{b^2u + c^2v}{u+v} - uv$$

eşitliği geçerlidir.



Kanıt: ADB ve ADC üçgenlerinin D açıları birbirlerinin bütünleri olduğundan birinin kosinüsü diğerinin kosinüsünün ters işaretlisidir. Önce $\cos ADB$ ifadesini bulalım.

$$c^2 = x^2 + u^2 - 2xu\cos ADB$$

$$\cos ADB = \frac{x^2+u^2-c^2}{2xu}$$

olduğundan

$$\cos ADC = -\frac{x^2+u^2-c^2}{2xu}$$

olmalıdır. Bu değeri ADC üçgenindeki kosinüs teoreminde yerine yazacağız.

$$b^2 = x^2 + v^2 - 2xv\cos ADC$$

$$= x^2 + v^2 - 2xv\left(-\frac{x^2+u^2-c^2}{2xu}\right)$$

$$= x^2 + v^2 + 2xv\left(\frac{x^2+u^2-c^2}{2xu}\right)$$

$$= x^2 + v^2 + v\left(\frac{x^2+u^2-c^2}{u}\right)$$

Şimdi eşitliğin her iki yanını u ile çarpalım:

$$b^2u = x^2u + v^2u + v\left(x^2+u^2-c^2\right)$$

$$b^2u = x^2u + v^2u + x^2v + u^2v - c^2v$$

Geriye sadece x^2 ifadesini çekmek kaldı.

$$x^2u + x^2v = b^2u + c^2v - u^2v - v^2u$$

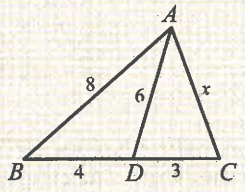
$$x^2(u+v) = b^2u + c^2v - uv(u+v)$$

$$x^2 = \frac{b^2u+c^2v}{u+v} - uv.$$

Evlere şenlik bu ifadenin harflerle ezberlenmesi ilerde karışıklığa yol açacaktır. Siz gelin şöyle ezberleyin:

''Kesenin karesi ***eşittir*** *yan kenarın karesi çarpı çaprazı* ***artı*** *diğer yan kenarın karesi çarpı çaprazı* ***bölü*** *tabanların toplamı* ***eksi*** *tabanların çarpımı!''*

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 8$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 3$ br
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre
$|AC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Soruda kesenin boyu sorulmuyor ama kesenin boyu verilerek kenar boyu sorulmuş. Fark etmez, Stewart teoremi her halükarda çözer. Uygulayalım:

$$6^2 = \frac{8^2\cdot 3 + x^2\cdot 4}{3+4} - 3\cdot 4$$

$$36 = \frac{192+4x^2}{7} - 12$$

$$\frac{192+4x^2}{7} = 48$$

$$192 + 4x^2 = 336$$

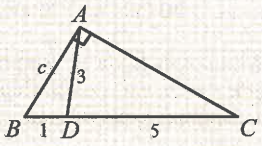
$$4x^2 = 144$$

$$x^2 = 36$$

olduğundan $x = 6$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp BA$
$|BD| = 1$ br
$|AD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
olduğuna göre
$|AB| = c$ *kaç br dir?*



A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{11}$ E) $2\sqrt{3}$

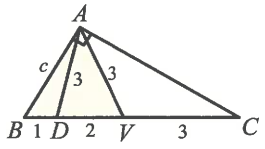
Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Pisagor Teoremi'nden $|AC| = \sqrt{36-c^2}$ br olduğunu bulabiliriz. Şekildeki tüm uzunluklarda sadece tek bir bilinmeyen olduğundan Stewart teoremi uygulanabilir. Kareköklü ifade sizi korkutmasın, formülümüzde o uzunluğun karesi alınacağından sorun ortadan kalkacak.

$$3^2 = \frac{c^2 \cdot 5 + (36-c^2)\cdot 1}{6} - 5$$
$$4c^2 + 36 = 84$$
$$c^2 = 12$$

olduğundan $c = 2\sqrt{3}$ bulunur.

İkinci yol. A'dan BC'ye kenarortay indirirsek, muhteşem üçlü gereği $|VA| = |VC| = 3$ br ve $|DV| = 2$ br olur.



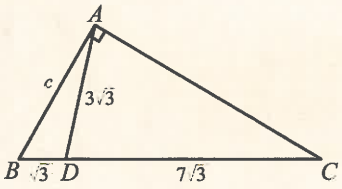
Dikkat edilecek olursa ABV üçgeninde AD kesenine Stewart teoremi uygulanabilir.

$$3^2 = \frac{c^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 1}{3} - 2$$
$$2c^2 + 9 = 33$$
$$c^2 = 12$$

eşitliğinden $|AB| = c = 2\sqrt{3}$ bulunur. ADV ikizkenar üçgen olduğundan tabana dik indirerek de bulabilirdik ama başlığın hakkını verelim dedik. ☺

Doğru cevap: E.

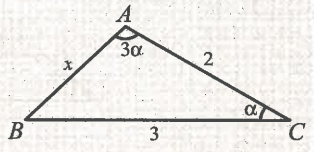
1.



c kaçtır?

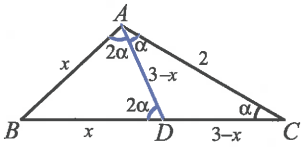
$4\sqrt{2}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BCA) = \alpha$
$m(CAB) = 3\alpha$
$|BC| = 3$ br
$|CA| = 2$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdaki üçüncü dereceden denklemlerden hangisinin reel köküdür?



A) $x^3 - 3x^2 - 13x - 27 = 0$
B) $x^3 - 3x^2 + 13x + 27 = 0$
C) $x^3 + 3x^2 - 13x + 27 = 0$
D) $x^3 - 3x^2 + 13x - 27 = 0$
E) $x^3 - 3x^2 - 13x + 27 = 0$

Çözüm: CAB açısının ölçüsünü 2α ve α olarak ayıran $[AD]$ kesenini çizelim.

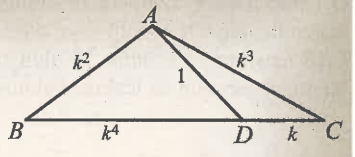


Hem ADC hem de ABD üçgenlerinin ikizkenar olduğunu görerek $|BD| = x$ br ve $|DC| = |AD| = 3 - x$ br olduğunu yazalım. Şimdi Stewart teoremini yazacağız.

$$(3-x)^2 = \frac{x^2(3-x) + 2^2 x}{x + (3-x)} - x(3-x)$$
$$(3-x)^2 + x(3-x) = \frac{x^2(3-x) + 4x}{3}$$
$$9(3-x) = -x^3 + 3x^2 + 4x$$
$$x^3 - 3x^2 - 13x + 27 = 0$$

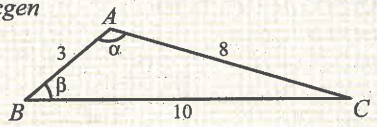
Doğru cevap: E.

2.
ABC bir üçgen
$|AD| = 1$ br
$|DC| = k$ br
$|AB| = k^2$ br
$|CA| = k^3$ br
$|BD| = k^4$ br
olduğuna göre $k^4 - k^3$ farkı kaçtır?



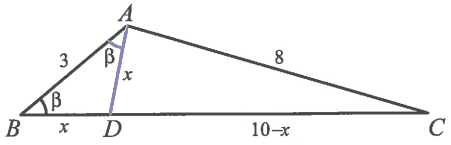
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 10$ br
$|CA| = 8$ br
$m(CAB) = \alpha$
$m(ABC) = \beta$
olduğuna göre α, β*'nın kaç katıdır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: BC üzerinde ADB ikizkenar üçgen olacak şekilde bir D noktası alıp $[AD]$'yi çizelim.



ABD üçgeninde A açısının ölçüsü de B açısının ölçüsü gibi β olur. Şu durumda CAD açısının ölçüsünü β cinsinden bulabilirsek soru çözülmüş olacak. Bu da CAD üçgeninin özel bir üçgen olmasıyla olabilecek ancak. Kenar uzunluklarını bulalım bakalım ne özelliği varmış? Stewart teoremini uyguluyoruz:

$$x^2 = \frac{3^2\cdot(10-x)+8^2\cdot x}{10} - x\cdot(10-x)$$

$$x^2 = \frac{3^2\cdot(10-x)+8^2\cdot x}{10} - 10x + x^2$$

$$10x = \frac{3^2\cdot(10-x)+8^2\cdot x}{10}$$

$$100x = 3^2\cdot(10-x)+8^2\cdot x$$

$$100x = 90-9x+64x$$

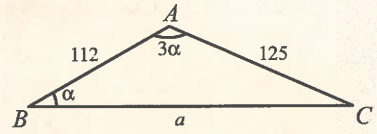
$$45x = 90$$

$$x = 2$$

O halde $|DC| = |CA| = 8$ br olduğundan CAD ikizkenar üçgendir. $m(ADC) = 2\beta$ diye $m(CAD) = 2\beta$ olur. Bu da CAB açısının ölçüsünün 3β olduğunu söyler. Böylelikle bu güzel sorunun da icabına bakmış olduk.

Doğru cevap: C.

3.

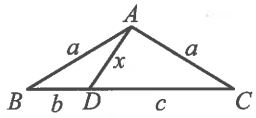


a kaçtır?

İkizkenar Üçgenlerde Stewart Teoremi

Altın kıymetinde bir formüle geldi sıra. İnanın çok ama çok işinize yarayacak. Hatta bu sayede gıcık Stewart formülünden bile istersek kurtulabileceğiz. Önce teoremi verelim.

Yandaki ikizkenar üçgenin ikizkenar olduğunu sanki hiç fark etmemişiz gibi bir Stewart formülü yazalım bakalım ne çıkacak?



$$x^2 = \frac{a^2\cdot b + a^2\cdot c}{b+c} - b\cdot c = \frac{a^2\cdot(b+c)}{b+c} - b\cdot c$$

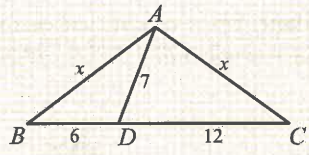
eşitliğinde $b + c$ ifadesi sadeleştirilirse

$$x^2 = a^2 - b\cdot c$$

gibi çok sade bir eşitlik elde edilir.

Bu formülü ''*Kesenin karesi eşittir yanların çarpımı eksi tabanların çarpımı*'' diye akılda tutarız.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = 7$ br
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 12$ br
olduğuna göre
$|AB| = |AC| = x$
kaç br *dir?*

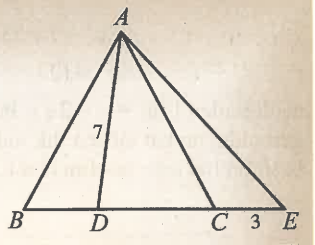


A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: $7^2 = x^2 - 6\cdot12$ eşitliğinden $x^2 = 121$ yani $x = 11$ olarak bulunur.

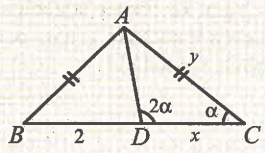
Doğru cevap: C.

4.
ABC bir eşkenar üçgen
B, D, C, E doğrudaş
$|AD| = 7$ br
$|CE| = 3$ br
$|DE| = |AB|$
olduğuna göre
$|AC|$ kaç br dir?



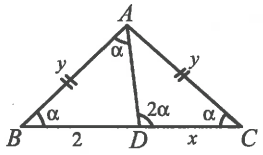
A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{13}$ **D) 8** E) $6\sqrt{2}$

Örnek [1994 Tübitak].
ABC bir üçgen
$m(C) = \alpha$
$m(ADC) = 2\alpha$
$|BD| = 2$ br
$|DC| = x$ br
$|CA| = |AB| = y$ br
olduğuna göre $y^2 - 2x$ *farkı kaçtır?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

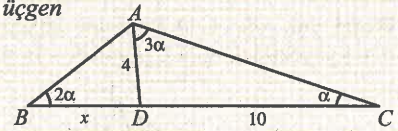
Çözüm: Soruda verilenlere bakınca *CAB* üçgeniyle birlikte *BDA* üçgeninin de ikizkenar olduğunu görüyoruz.



O halde $|AD| = 2$ br olur. Şimdi Stewart Teoremi'nden
$$2^2 = y^2 - 2x$$
olduğu rahatlıkla görünür.

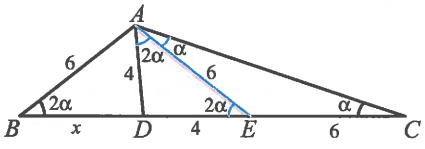
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(C) = \alpha$
$m(B) = 2\alpha$
$m(CAD) = 3\alpha$
$|AD| = 4$ br
$|DC| = 10$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

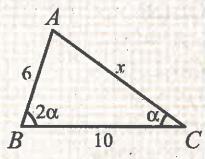
Çözüm: $[DC]$ üzerinde, $m(CAE) = \alpha$ olacak şekilde bir E noktası alıp $[AE]$'yi çizelim.



Bu durum, şekilden de görüleceği üzere hem *AEC* üçgenini hem *EAB* üçgenini hem de *ADE* üçgenini ikizkenar yapacaktır. $|AD| = 4$ br diye $|DE| = 4$ br olur. O halde $|EC| = 6$ br dir. Bu da $|EA| = |AB| = 6$ br anlamına gelir. Gerisi *EAB* ikizkenar üçgeninde Stewart teoremine kalıyor:
$$4^2 = 6^2 - 4 \cdot x$$
eşitliğinden $x = 5$ bulunur.

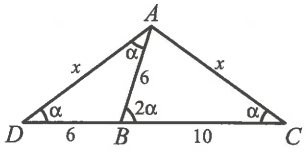
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 2 \cdot m(BCA) = 2\alpha$
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 8 B) $6\sqrt{2}$ C) 9 D) $4\sqrt{6}$ E) 10

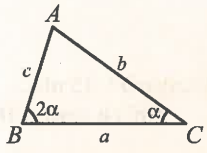
Çözüm: $[BC]$ kenarını B yönünde 6 br uzatalım.



Bu sayede hem *ABD* üçgeni ikizkenar üçgen olur hem de *CAD* üçgeni. Formül uygulanırsa zormuş gibi görünen bu soru hemencecik çözülmüş olur:
$$6^2 = x^2 - 6 \cdot 10$$
$$x^2 = 96$$
eşitliğinden $x = 4\sqrt{6}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

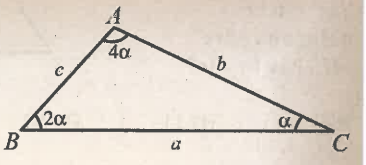
5.



$b^2 - c^2$ farkı neye eşittir?

ac

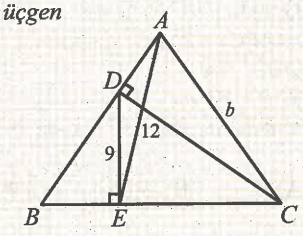
6.
ABC bir üçgen
$m(C) = \alpha$
$m(B) = 2\alpha$
$m(A) = 4\alpha$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br



olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi *ABC* üçgeninin çevresine eşittir?

A) $\frac{c^2}{a}$ B) $\frac{a^2}{c}$ C) $\frac{b^2}{c}$ D) $\frac{c^2}{b}$ E) $\frac{a^2}{b}$

Örnek. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC| = b$ br
$CD \perp AB$
$DE \perp BC$
$|DE| = 9$ br
$|AE| = 12$ br
olduğuna göre b kaçtır?

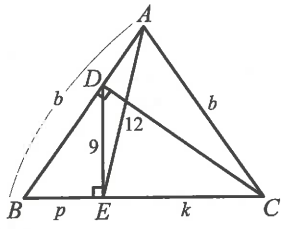


A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $|BE| = p$ br ve $|EC| = k$ br olsun. ABC üçgeninde kibar Stewart formülüne göre

$$12^2 = b^2 - pk$$

eşitliği geçerlidir.



Diğer yandan DBC dik üçgeninde Öklit teoreminden

$$pk = 81$$

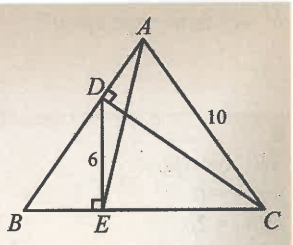
olduğundan bulduğumuz ilk eşitlik

$$144 = b^2 - 81$$

halini alır ki buradan $b^2 = 225$ olduğundan $b = 15$ olur.

Doğru cevap: D.

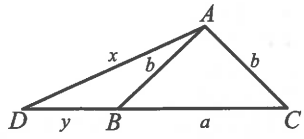
7.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC| = 10$ br
$CD \perp AB$
$DE \perp BC$
$|DE| = 6$ br
olduğuna göre
$|AE|$ kaç br dir?



A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 **E) 8**

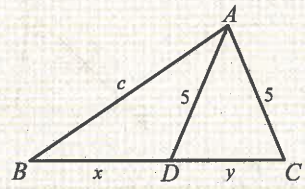
Uyarı. İkizkenar üçgenlerdeki bu zarif Stewart formülü, kesen karşıdaki kenarı değil de onun uzantısını keserse şöyle bir hal alır:

$$x^2 = b^2 + y \cdot (a + y)$$



Anlaşılan o ki; $y \cdot (a + y)$ çarpımını kesme noktasının ikizkenar üçgenin taban köşelerine uzaklıkları olarak algılarsak; kesen üçgenin içindeyken ezberlediğimiz formüldeki sadece $-$ işareti $+$ oluyor.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| = |AC| = 5$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
$|AB| = c$ br
$x \cdot (x + y) = 24$
olduğuna göre c kaçtır?



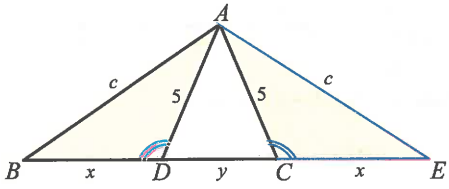
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Farklıymış gibi görünen aslında aynı olan iki yoldan çözeceğiz. İkinci yol, birinci yolun kanıtıdır.
Birinci yol. Derhal yukardaki formülü tatbik edelim.

$$c^2 = 5^2 + x \cdot (x + y)$$
$$c^2 = 25 + 24 = 49$$

olduğundan $c = 7$ olmalıdır.

İkinci yol. $x \cdot (x + y)$ ifadesine anlam verebilmek için $[DC]$'yi şekildeki gibi C yönünde x br uzatalım.



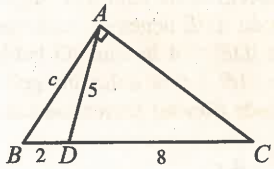
ADB ile ACE üçgenlerinin K.A.K. gereğince eş olacağını görünüz. O halde $|AE| = c$ br olmalıdır. Şimdi oluşan ABE ikizkenar üçgeninde ikizkenar Stewart formülünü kullanacağız:

$$5^2 = c^2 - x \cdot (x + y)$$
$$25 = c^2 - 24$$

eşitliğinden $c^2 = 49$ yani $c = 7$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

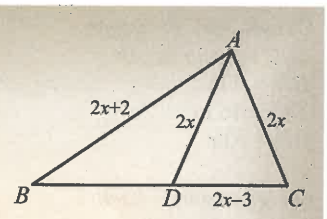
11.



x kaçtır?

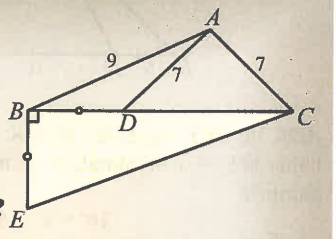
$\sqrt{35}$

8.
ABC bir üçgen
$|AD| = |AC| = 2x$ br
$|DC| = 2x - 3$ br
$|AB| = 2x + 2$ br
olduğuna göre
$|BD|$ kaç br dir?



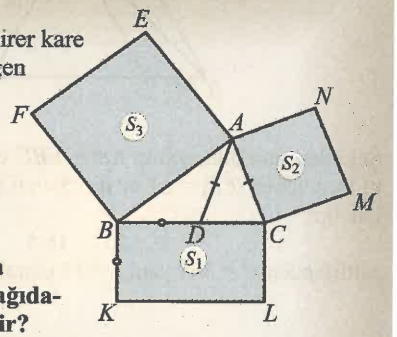
A) 2 B) 3 **C) 4** D) 5 E) 6

9.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BC]$ köşegen
$EB \perp BC$
$|EB| = |BD|$
$|AD| = |AC| = 7$ br
$|AB| = 9$ br
olduğuna göre
Alan(CBE) kaç br^2 dir?



A) 12 **B) 16** C) 24 D) 32 E) 36

10.
ABC bir üçgen
$AEFB$ ve $CMNA$ birer kare
$BKLC$ bir dikdörtgen
$|AD| = |AC|$
$|BD| = |BK|$
Alan($BKLC$) = S_1
Alan($CMNA$) = S_2
Alan($AEFB$) = S_3
olduğuna göre
S_1, S_2, S_3 arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



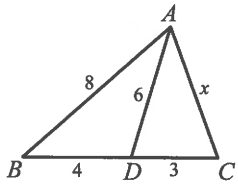
A) $S_1 + S_2 = S_3$ B) $S_1 + 2S_2 = S_3$ C) $S_1 \cdot S_2 = S_3$
D) $S_1 \cdot S_2 = S_3^2$ E) $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2$

Stewart Teoremi'ne Pratik Bir Yol. Genel Stewart formülünün

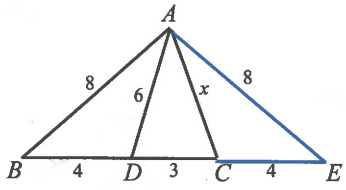
$$x^2 = \frac{b^2u + c^2v}{u+v} - uv$$

şeklinde gıcık mı gıcık, ikizkenar üçgenlerdeki Stewart formülünün de $x^2 = a^2 - b \cdot c$ şeklinde kibar mı kibar olduğunu gördük. Şimdi öyle bir teknik göstereceğiz ki kibar formül sayesinde gıcık formüle artık hiç ihtiyaç duymayacağız. Uygun bir ek çizimle ikizkenar olmayan üçgeni ikizkenar yapıp, kibar formülü iki kere kullanacağız. Şöyle yani:

Daha önce çözdüğümüz bir soruda tatbikatı yapalım da cevabı kontrol etme imkanımız da olsun.



Yukardaki üçgende x'in sorulduğunu farz edelim. Üçgen ikizkenar değil diye genel Stewart formülünü uygulamıştık. Şimdi aşağıdaki gibi $[AE]$ kenarını çizip ABE ikizkenar üçgenini oluşturalım.

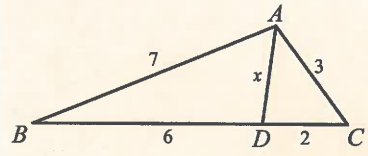


$6^2 = 8^2 - 4 \cdot (3 + |CE|)$ eşitliğinden $|CE| = 4$ br olarak bulunur. Diğer yandan ABE ikizkenar üçgeninde AC kesenine göre Stewart formülü yazılırsa

$$x^2 = 8^2 - 7 \cdot 4$$

eşitliğinden $x^2 = 36$ yani $x = 6$ olarak bulunur.

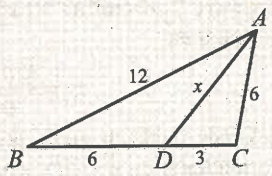
12.



x kaçtır?

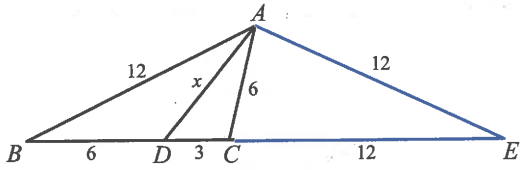
$\sqrt{7}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 12$ br
$|BD| = |AC| = 6$ br
$|DC| = 3$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $2\sqrt{10}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 7 D) $4\sqrt{6}$ E) 8

Çözüm: İleriki derslerde verilen değerlerin iç açıortay teoremini sağladığını görerek, x'i iç açıortay teoreminden bulacağız ama şimdilik bu yolla gösterelim.
AE ve CE doğru parçalarını çizerek ABE ikizkenar üçgenini oluşturalım.



Bu üçgende AC kesenine göre Stewart teoremi yazılırsa

$$6^2 = 12^2 - 9\cdot|CE|$$

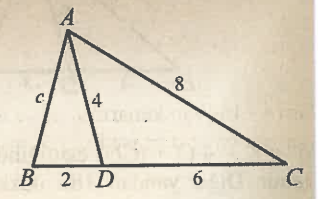
eşitliğinden $|CE| = 12$ bulunur. Şimdi de aynı üçgende AD kesenine göre Stewart teoremi yazacağız:

$$x^2 = 12^2 - 6\cdot 15$$

eşitliğinden $x^2 = 54$ yani $x = 3\sqrt{6}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

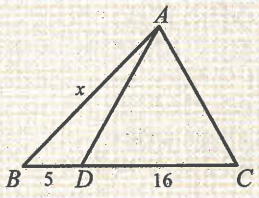
12.
ABC bir üçgen
$|AD| = 4$ br
$|BD| = 2$ br
$|DC| = 6$ br
$|CA| = 8$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre
c kaçtır?



A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
ADC eşkenar üçgen
$|BD| = 5$ br
$|DC| = 16$ br
$|AB| = x$ br

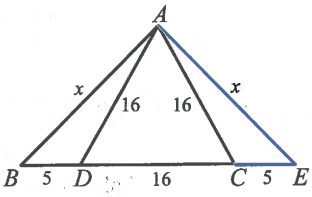
olduğuna göre x kaçtır?



A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

Çözüm: Her ne kadar ADB üçgeninde kosinüs teoreminden cevabı bulmak çok kolay olsa da üç farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. DC'yi C yönünde 5 br uzatalım. Uzandığımız noktaya E diyelim.

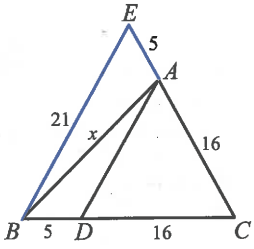


ADB ile ACE üçgenleri K.A.K. gereğince eş olurlar. O halde $|AE| = x$ br olmalıdır. Şimdi güzel formülü kullanabiliriz:

$$16^2 = x^2 - 5\cdot 21$$

eşitliğinden $x^2 = 361$ yani $x = 19$ olarak bulunur.

İkinci yol. CA'yı A yönünde 5 br uzatarak, vardığımız noktayı B ile birleştirelim.



Şekilden görebileceğiniz üzere EBC eşkenar üçgen olur ki bu yüzden $|EB| = 21$ br dir. Şimdi güzel formülü kullanalım:

$$x^2 = 21^2 - 16\cdot 5$$

eşitliğinden $x^2 = 361$ yani $x = 19$ olarak bulunur.

Üçüncü yol. Kesen, ikizkenar üçgenin dışında da olsa uygulayacak bir formül bulmuştuk. Onu kullanalım:

$$x^2 = 16^2 + 5\cdot 21 = 361$$

olduğundan $x = 19$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Benzerlik

Elimizde, neye bakarsak bakalım, baktığımız şeyin her zerresini sabit bir oranda büyüten bir büyütecin olduğunu (küçülteç de olabilir) ve onla bir nesneye baktığımızı hayal edelim. İşte böyle bir büyüteçte görünen şekille asıl şekle **benzer şekiller** diyeceğiz.

Bu benzerlik, günlük hayatta kullandığımız benzerlikle birçok yönden ayrılır. Matematikteki benzerlikte "andırmak" yetmez. Birbirine çok benzeyen iki kardeş matematikte asla benzer değildir. Hatta tek yumurta ikizi olsalar bile!

Örneğin, bir insanla onun vesikalık fotoğrafında görünen insan matematikte benzer değildir. Diğer yandan, hani şimdilerde, o an kaydetmekte olduğunuz görüntüyü küçük ekranında gösteren bir dijital kameramız olsaydı, gözümüzün bir ucuyla o insana diğer ucuyla da ekrandakine baksaydık işte o zaman matematik benzerliğe daha yaklaşmış olurduk. İşte matematik benzerlik o kameranın ekranındaki "şey"le gerçek "şey" arasındadır denilebilir. Çok eşersek orada da bir hata bulabiliriz belki ama dediğimiz gibi açıklamalarımız sezgisel manada.

Matematiksel manada bir açıklamayı ancak eşleme yapma kavramıyla yapabiliyoruz. Eşleme yapma kavramını daha önce eşlik dersinden biliyoruz.

İki çokgenin köşeleri arasında bire-bir eşleme yapılırsa eşleştirilen köşelere **karşılıklı köşeler**, bu köşeleri oluşturan kenarların belirttiği açılara **karşılıklı açılar** ve eşlenen ardışık köşelerin belirttikleri kenarlara da **karşılıklı kenarlar** diyelim. O zaman çokgenlerde benzerliği şöyle tanımlayabiliriz:

Aralarında bire-bir eşleme yapılan iki çokgenin karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılıysa bu eşlemeye **benzerlik**, çokgenlere de **benzer çokgenler** denir.

Kenar uzunluklarıyla kurulan orantının orantı sabitine de **benzerlik oranı** denir.

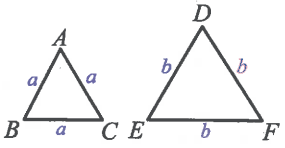
İki çokgenin benzerliği $\sim$ sembolüyle gösterilir. Yalnız eşlikte olduğu gibi benzerlikte de benzer olan çokgenlerin köşelerini yazarken sıra önemlidir.

$A \overset{a}{—} B \qquad C \overset{b}{—} D$

İki farklı doğru parçası benzerdir.

$[AB] \sim [CD]$

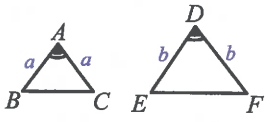
Birinin boyu a br diğerinin boyu b br ise benzerlik oranı $a:b$ dir.



İki farklı eşkenar üçgen benzerdir.

$ABC \sim DEF$

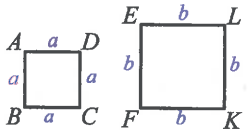
Birinin bir kenarının boyu a br diğerinin bir kenarının boyu b br ise benzerlik oranı $a:b$ dir.



Tepe açıları eş olan iki farklı ikizkenar üçgen benzerdir.

$ABC \sim DEF$

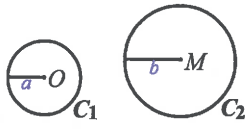
Birinin bir yan kenarının boyu a br diğerinin bir yan kenarının boyu b br ise benzerlik oranı $a:b$ dir.



İki farklı kare benzerdir.

$ABCD \sim EFKL$

Birinin bir kenarının boyu a br diğerinin bir kenarının boyu b br ise benzerlik oranı $a:b$ dir.



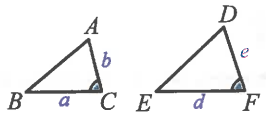
İki farklı çember benzerdir.

$C_1(O, a) \sim C_2(M, b)$

Birinin yarıçapının boyu a br diğerinin yarıçapının boyu b br ise benzerlik oranı $a:b$ dir.

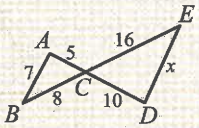
Üçgenlerde Benzerlik Aksiyomu. İki üçgenin köşeleri arasında yapılan bir eşlemede karşılıklı birer açıları eş ve bu açıyı belirten kenarların uzunlukları karşılıklı olarak orantılı ise bu üçgenler benzerdir.

Bu aksiyoma **Kenar-Açı-Kenar benzerlik aksiyomu** denir ve kısaca **K.A.K. benzerliği** olarak ifade edilir.



Örneğin yukardaki ABC ve DEF üçgenlerinde C ve F açıları eş olup, bu açıyı belirten kenarların uzunlukları arasında $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$ eşitliği geçerliyse $ABC \sim DEF$ olur. Bu orantının sabiti de benzerlik oranıdır.

Örnek. $AD \cap BE = \{C\}$
$|AC| = 5$ br
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 10$ br
$|CE| = 16$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ *kaç* br *dir?*

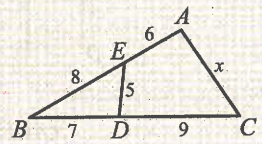


A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: Şekildeki ABC ve DEC üçgenlerinin C açıları ters açıların eşliği gereği eş olup $\frac{|AC|}{|DC|}=\frac{5}{10}=\frac{8}{16}=\frac{|BC|}{|EC|}$ olduğundan K.A.K. benzerliği gereğince $ABC \sim DEC$ dir. Yukardaki orantının sabiti 1/2 olduğundan sağdaki üçgenin soldaki üçgenin 2 katı olduğunu anlıyoruz. Bu durumda $|DE| = 2\cdot|AB|$ olacağından $|DE| = 14$ br olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AE| = 6$ br
$|EB| = 8$ br
$|BD| = 7$ br
$|DC| = 9$ br
$|ED| = 5$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ *kaç* br *dir?*



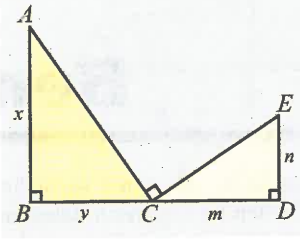
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Şekildeki ABC ve DBE üçgenlerinin B açıları eş olup $\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{|BE|}{|BC|}$ olduğundan K.A.K. benzerliği gereğince $ABC \sim DBE$ dir. Yukardaki orantının sabiti 1/2 olduğundan büyük üçgenin küçük üçgenin 2 katı olduğunu anlıyoruz. Bu durumda $|AC| = 2\cdot|DE|$ olacağından $|AC| = 10$ br olur.

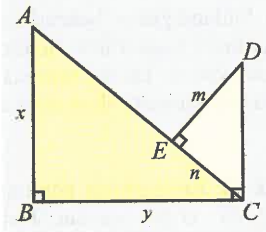
Doğru cevap: C.

Aşağıdaki şekillerde benzer üçgenleri belirtip, isimlendirilmiş kenar uzunlukları arasında geçerli bağıntıyı yazınız.

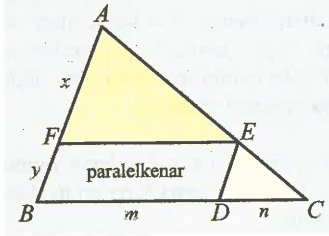
1.



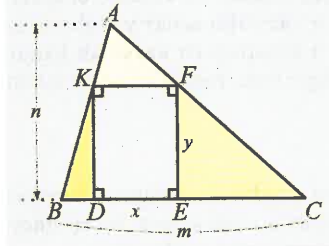
2.



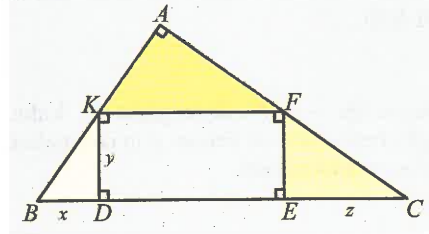
3.



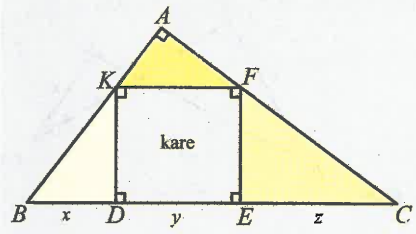
4.



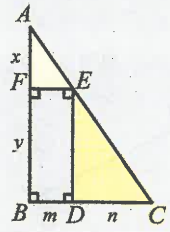
5.



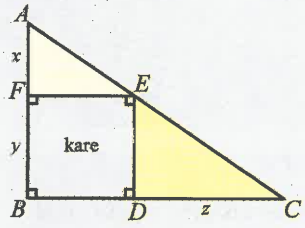
6.



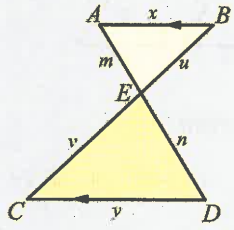
7.



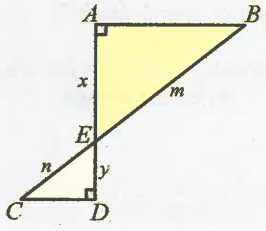
8.



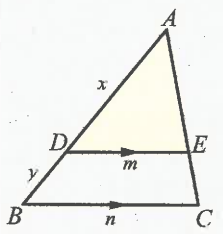
9.



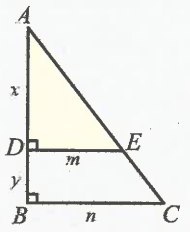
10.



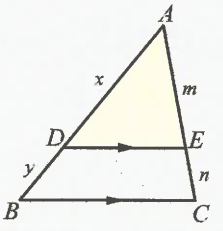
11.



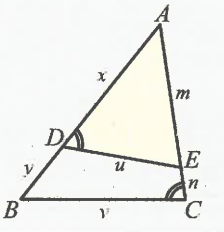
12.



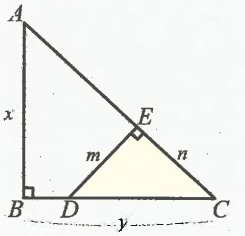
13.



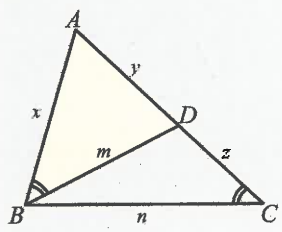
14.



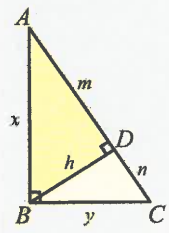
15.



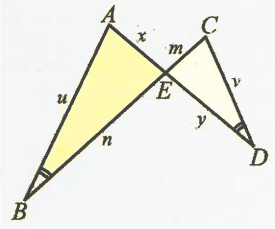
16.



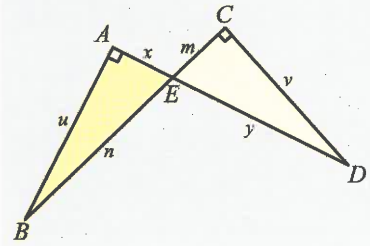
17.



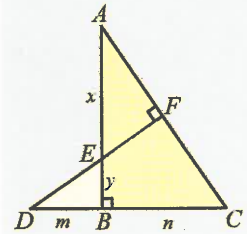
18.



19.

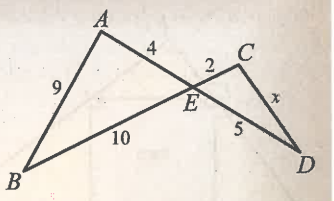


20.



21.

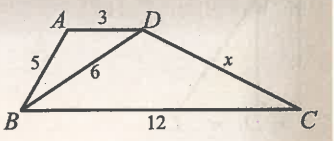
$AD \cap BC = \{E\}$
$|EA| = 4$ br
$|AB| = 9$ br
$|BE| = 10$ br
$|EC| = 2$ br
$|ED| = 5$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) 3,5 C) 4 **D)** 4,5 E) 5

22.

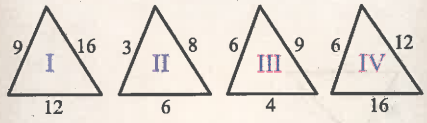
$ABCD$ bir dörtgen
$AD \,//\, BC$
$|AD| = 3$ br
$|AB| = 5$ br
$|BD| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 **E)** 10

23.

Kenar uzunlukları belli olan dört üçgen aşağıdaki gibi numaralandırılmıştır.



Buna göre hangi iki üçgen benzerdir?

A) I-II B) II-III **C)** II-IV D) I-IV E) III-IV

24.

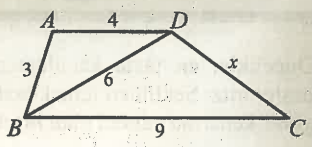
Aşağıdakilerden hangisi daima benzer değildir?

A) İki doğru B) İki çember C) İki kare
D) İki doğru parçası **E)** İki dikdörtgen

25.
Aşağıdakilerden hangisi daima benzerdir?

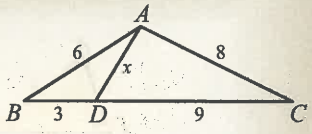
A) İki dik üçgen B) İki paralelkenar C) İki çember
D) İki ikizkenar üçgen E) İki eşkenar dörtgen

26.
$ABCD$ bir yamuk
$AD \parallel BC$
$|DA| = 4$ br
$|AB| = 3$ br
$|BD| = 6$ br
$|BC| = 9$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



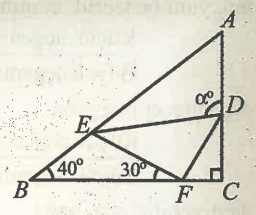
A) 6 B) 5,5 C) 5 **D)** 4,5 E) 4

27.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 9$ br
$|CA| = 8$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



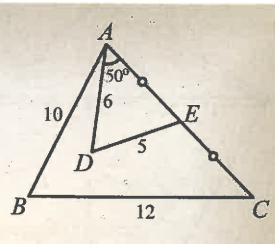
A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 7

28.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$ABC \cong DEF$
$m(B) = 40°$
$m(EFB) = 30°$
$m(ADE) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 120 B) 110 C) 105 **D)** 100 E) 95

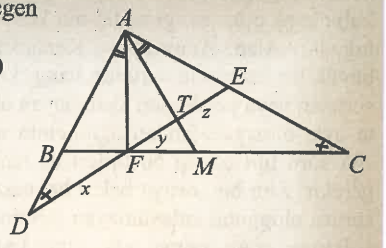
29.
BC bir üçgen
$|AB| = 10$ br
$|BC| = 12$ br
$|AD| = 6$ br
$|DE| = 5$ br
$|AE| = |EC|$
$m(EAD) = 50°$
olduğuna göre $m(C)$ kaçtır?



A) 50° B) 55° C) 60° D) 65° E) 80°

30.
ABC ve ADE bir üçgen
$|BM| = |MC|$
$m(CAM) = m(DAF)$
$m(ADE) = m(ACB)$

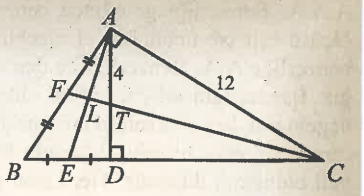
$|DF| = x$ br
$|FT| = y$ br
$|TE| = z$ br



olduğuna göre x, y ve z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 = yz$ B) $y^2 = xz$ C) $z^2 = xy$
D) $x = y + z$ E) $x + y = 2z$

31.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AF| = |FB|$
$|BE| = |ED|$
$|AT| = 4$ br
$|AC| = 12$ br
olduğuna göre $\frac{|LC|}{|LA|}$ oranı kaçtır?



A) 2 **B)** 3 C) 4 D) 5 E) 6

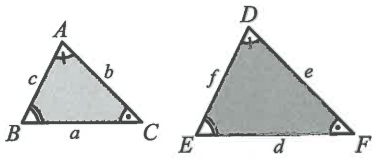
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

A. A. Benzerliği

Daha önce ne olduğunu anlattığımız Açı-Açı Benzerliği kavramını şimdi detaylı olarak işleyecek ve bol bol örnek vereceğiz. Bu konuda örnekleri bol tutmamızın nedeni, diğer konulardaki nedenimizden biraz daha farklı ve anlamlıdır. Zira bana göre benzerlik dersini diğer derslerden ayıran en önemli özellik, benzerlik sorularının %99'undan büyük bir kısmında sorunun içinde benzerlik kelimesi geçmemesi ve öğrencinin o soruyu benzerlik kullanarak çözmesi gerektiğinin kendi anlaması zorunluluğudur. Alan, Açıortay ve Kenarortay sorularının çok büyük bir kısmında sorunun hangi konuyla ilgili olduğu sorudan veya verilerden ayan beyan ortada olur. Bu derste öyle olmayacağından öğrencinin mümkün olduğunca çok soru tipi çözüp bu tipleri de hafızasına kaydetmesi gerekir. Zira bir soruya bakar bakmaz sorunun benzerlik sorusu olduğunu anlayamayan birinin o sorunun altından kalkması çoğu zaman güç olur. Lafı fazla uzatmadan başlayalım, siz de çözdüğümüz her soru kalıbını hafızaya almaya çalışın. Önce şu benzerliği tekrar hatırlayalım:

ABC ve DEF iki farklı üçgen olsun.

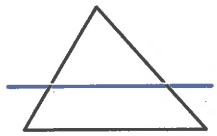


Eğer bu iki üçgenin iç açı ölçüleri aynıysa, üçgenlere A.A.A. Benzerliği gereğince benzerlerdir denir. İki açı ölçüsü eşit ise üçüncüsü el mecbur eşit olacağından bu benzerliğe A.A. Benzerliği de denir. Biz de öyle yapacağız. Benzerliğin sebebi her ne olursa olsun, benzer olan üçgenlerin kenar uzunlukları orantılıdır. Böyle bir durumda üçgenin birinin, diğerinin büyüteçle büyültülmüş hali olduğunu düşünün. Her kenar aynı oranda büyümüş ki açı ölçüleri bozulmamış, yoksa biri diğerinden daha çok ya da daha az büyüseydi şekil deforme olurdu, açı ölçüleri değişmek zorunda kalırdı. Yalnız, benzerlikten doğan eşlemeyi yaparken dikkatli olmak lazımdır. Üçgenin birinde örneğin α ölçülü açının gördüğü kenarı seçtiysek, diğerinde de α ölçülü açının karşısındaki kenarı seçmeliyiz. Rastgele alınırsa olmaz.

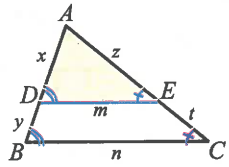
Yukardaki iki üçgen için doğru eşleme şöyle olmalıdır:

$$ABC \sim DEF \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}.$$

Öncelikle, en fazla karşılaşacağınız benzerlik şekliyle başlıyoruz. Şeklin en temel özelliği, bir üçgenin, herhangi bir kenarına paralel olan bir doğruyla kesilmesi...



Bir üçgeni böyle bir doğruyla keserseniz, üçgen iki parçaya ayrılır. Parçalardan biri üçgen, diğeri yamuk olur. İlk teoremimiz şunu söylüyor: *Küçük üçgen ile ilk üçgen benzerdir*. Öncelikle neden benzer olduklarını açıklayalım, ardından benzerliğin doğurduğu bağıntıyı verelim.



Benzerlik tabii ki yöndeş açılardan dolayı oluşmaktadır. ADE ile ABC üçgenlerinde A açısı ortak iken D ve B ($aynı$ zamanda E ve C) açıları da eş çıktığından, ADE ile ABC üçgenleri A.A. gereğince benzerdirler. O halde kenarları karşılıklı olarak orantılı olmalıdır. Benzerlik oranını bulmanın en ideal yolu şudur: Küçük üçgende nereyi aldıysanız, büyük üçgende de orayı alıp birbirine bölün, yani benzerlik oranına

$$\frac{\text{Küçük üçgenin sol kenar uzunluğu}}{\text{Büyük üçgenin sol kenar uzunluğu}}$$

diyebileceğiniz gibi,

$$\frac{\text{Küçük üçgenin sağ kenar uzunluğu}}{\text{Büyük üçgenin sağ kenar uzunluğu}}$$

da diyebilirsiniz, hatta

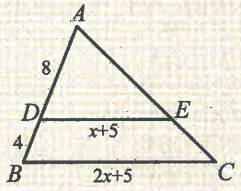
$$\frac{\text{Küçük üçgenin taban uzunluğu}}{\text{Büyük üçgenin taban uzunluğu}}$$

da diyebilirsiniz. Bu üç oran her daim eşittir. Şekilde verilen değerlere göre yazmamız gereken eşitlikse

$$\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+t}=\frac{m}{n}$$

eşitliğidir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
DE // BC
$|AD| = 8$ br
$|DB| = 4$ br
$|DE| = x + 5$ br
$|BC| = 2x + 5$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

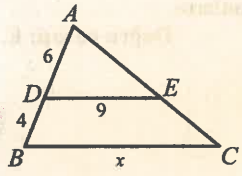
Çözüm: Az önce de anlattığımız üzere *ADE* ile *ABC* üçgenleri benzerdir. Küçüğün sol kenarı 8 br, büyüğün sol kenarı 12 br olduğundan benzerlik oranı 2 : 3 olur. O halde bu oran benzer üçgenleri taban uzunluklarında da vardır.

$$\frac{x+5}{2x+5} = \frac{2}{3}$$

orantısında içler-dışlar çarpımı yapılır $3x + 15 = 2x + 10$ elde edilirse buradan $x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: D.

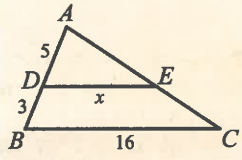
1.



DE // BC ise *x* kaçtır?

15

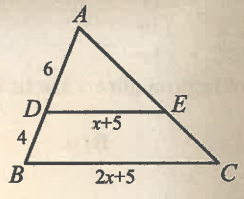
2.



DE // BC ise *x* kaçtır?

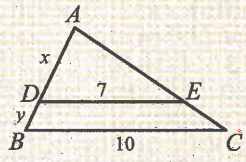
10

3.
ABC bir üçgen
DE // BC
$|AD| = 6$ br
$|DB| = 4$ br
$|DE| = x + 5$ br
$|BC| = 2x + 5$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Örnek. *ABC bir üçgen*
DE // BC
$|DE| = 7$ br
$|BC| = 10$ br
$|AD| = x$ br
$|DB| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*

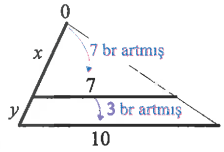


A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{7}{3}$ C) 2 D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{10}{7}$

Çözüm: İki yol göstereceğiz, siz ikincisini kullanın!

Birinci yol. *ADE* ile *ABC* üçgenlerinin benzer olduğunu biliyoruz. Tabanları oranı 7 : 10 olduğundan benzerlik oranı da 7 : 10 olmalıdır. Bu da *ADE* üçgeninin sol kenarı 7 br ise *ABC* üçgeninin sol kenarının 10 br olacağını söyler. O halde $|DB|$'ye 3 br kalır. Bu yüzden cevabımız 7 : 3 olmalıdır.

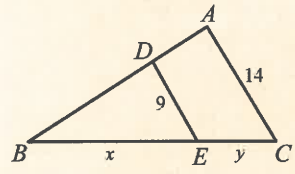
İkinci yol. $[DE]$'yi BC'ye paralelliği bozulmayacak şekilde yukarı kaydırdığınızı düşünün. Boyu devamlı kısalmayacak mı? Hatta kaydıra kaydıra *A* noktasına geldiğimizde boyu 0 olacak!



İşte *A* noktasını 0 gibi düşünüp artış miktarlarına bakın, o size *x* ile *y*'nin oranını verir. Demek ki $x : y = 7 : 3$.

Doğru cevap: B.

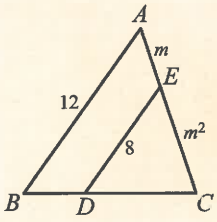
4.



DE // AC ise $x : y$ oranı kaçtır?

9:5

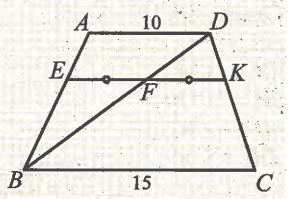
5.



DE // BA ise *m* kaçtır?

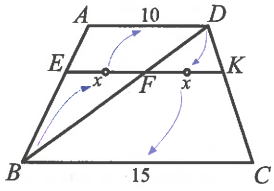
2

Örnek. *ABCD bir yamuk*
[BD] köşegen
EK ∩ BD = {F}
AD // EK // BC
|EF| = |FK|
|AD| = 10 br
|BC| = 15 br
olduğuna göre |EK| kaç br dir?



A) 11 B) 12 C) 12,5 D) 13 E) 14

Çözüm: $|EF| = |FK| = x$ br olsun. ABD üçgeninde B'ye 0 diyerek artış miktarından $BF : FD$'yi bulacağız. Daha sonra DBC üçgeninde D'ye 0 diyerek artış miktarından $DF : FB$'yi bulacağız. Bu oranlar birbirinin tersi olduğundan çarpımları 1 olmalıdır.



Söylenenler yapılınca

$$\frac{x}{10-x}\cdot\frac{x}{15-x}=1$$

eşitliği çıkıyor. Düzenlenirse

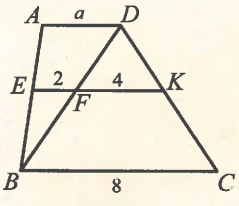
$$x^2 = 150 - 25x + x^2$$

denkleminden $x = 6$ yani $|EK| = 12$ br bulunur.

Doğru cevap: B.

Not: $|EF| = |FK|$ iken $|EK|$ tabanların harmonik ortası olur.

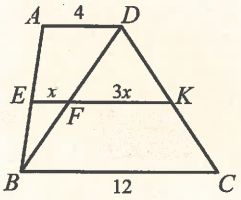
6.



AD // EK // BC ise *a* kaçtır?

4

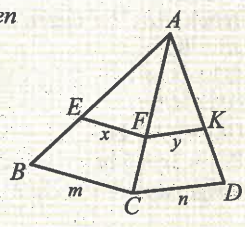
7.



AD // EK // BC ise *x* kaçtır?

2

Örnek. *ABC ve ACD birer üçgen*
EF // BC
FK // CD
|EF| = x br
|FK| = y br
|BC| = m br
|CD| = n br
olduğuna göre x, y, m, n
arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x + n = y + m$ B) $x - n = y - m$ C) $x \cdot m = y \cdot n$
D) $x \cdot y = n \cdot m$ E) $x \cdot n = y \cdot m$

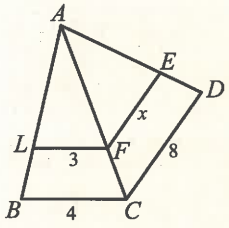
Çözüm: AEF ile ABC ve AFK ile ACD üçgenlerinin benzer olduklarını biliyoruz. Bu sorunun esprisi, her iki benzerlik için yapılan eşlemede $AF : AC$ oranının kullanılmasıdır. Yani AC'nin solunda kalan küçük üçgen ile büyük üçgen de bu oranda benzerdir, sağında kalan küçük üçgenle büyük üçgen de... Diğer yandan $AF : AC$ değeri sol tarafta $x : m$ iken sağ tarafta $y : n$ olduğundan

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$$

orantısından $x \cdot n = y \cdot m$ olduğunu anlarız.

Doğru cevap: E.

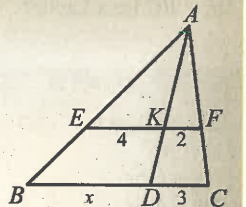
8.



LF // BC ve *EF // CD* ise *x* kaçtır?

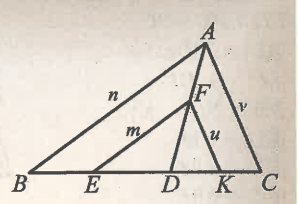
6

9.
ABC bir üçgen
EF // BC
AD ∩ EF = {K}
|EK| = 4 br
|KF| = 2 br
|DC| = 3 br
|BD| = x br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

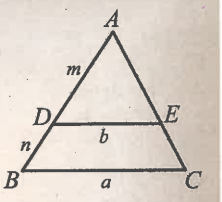
10.
ABC bir üçgen
$F \in [AD]$
$EF \parallel BA$
$FK \parallel AC$
$|EF| = m$ br
$|BA| = n$ br
$|FK| = u$ br
$|AC| = v$ br



olduğuna göre m, n, u, v arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $mn = uv$ B) $mu = nv$ C) $mv = un$
D) $m + v = n + u$ E) $m + n = u + v$

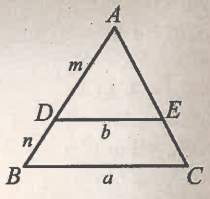
11.
ABC bir üçgen
$DE \parallel BC$
$|BC| = a$ br
$|DE| = b$ br
$|AD| = m$ br
$|DB| = n$ br
$m^2 - mn - 6n^2 = 0$



olduğuna göre $\frac{b}{a}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

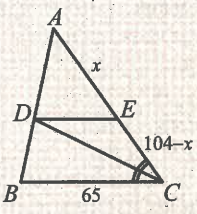
12.
ABC bir üçgen
$DE \parallel BC$
$|BC| = a$ br
$|DE| = b$ br
$|AD| = m$ br
$|DB| = n$ br
$4b^2 + 5ab - 6a^2 = 0$



olduğuna göre $m^2 + (2 - k)mn - 2kn^2 = 0$ eşitliğinde k kaç olmalıdır?

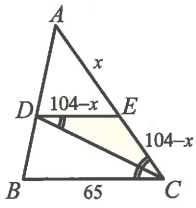
A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

Örnek. *ABC bir üçgen*
[CD] iç açıortay
$DE \parallel BC$
$|BC| = 65$ br
$|AE| = x$ br
$|EC| = 104 - x$ br
olduğuna göre $|DE|$ kaç br *dir?*



A) 40 B) 42 C) 44 D) 45 E) 52

Çözüm: Sorunun çözülebilmesi için x'in bulunması gerekiyor. Bunun için de DEC üçgeninin ikizkenar olduğunu görmek gerekiyor.



ADE ile ABC üçgenlerinin benzerliğinden doğan

$$\frac{x}{104} = \frac{104 - x}{65}$$

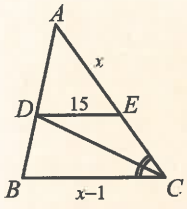
eşitliği çözülürse $x = 64$ çıkar. Buradan da

$$|DE| = 104 - x = 104 - 64 = 40$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

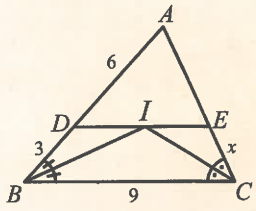
13.



$DE \parallel BC$ ise x kaçtır?

25

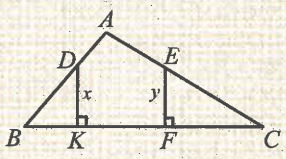
14.



$DE \parallel BC$ ise x kaçtır?

3

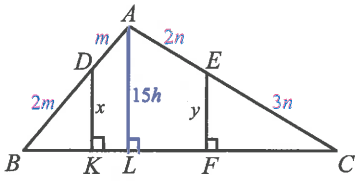
Örnek. *ABC bir üçgen*
DK ⊥ BC, EF ⊥ BC
$|BD| = 2\cdot|DA|$
$3\cdot|AE| = 2\cdot|EC|$
$|DK| = x$ br
$|EF| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*

A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{10}{9}$ E) $\frac{11}{10}$

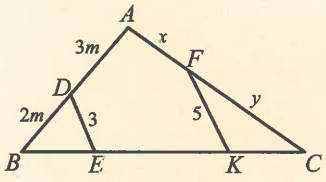
Çözüm: $|AD| = m$ br dersek, $|BD| = 2m$ br olur. Aynı zamanda $|AE| = 2n$ br dersek, $|EC| = 3n$ br olur. Şimdi A'dan BC'ye bir dik indirelim. Ayağı L olsun.



BDK ile BAL üçgenlerinin 2: 3 oranında ve CEF ile CAL üçgenlerinin 3 : 5 oranında benzer olduğuna dikkat ediniz. Hem 3'e hem de 5'e bölünebilmesi için $|AL|$'ye $15h$ br diyelim. $x : 15h = 2 : 3$ ve $y : 15h = 3 : 5$ orantılarından $x = 10h$ ve $y = 9h$ olarak bulunur. O halde sorulan oran 10/9 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

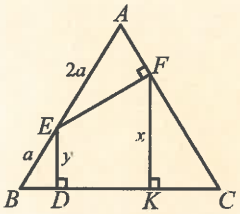
15.



DE // FK ise *x/y* oranı kaçtır?

1/2

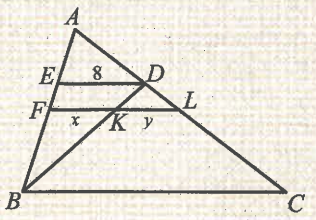
16.



ABC eşkenar üçgen ise *y/x* oranı kaçtır?

1/2

Örnek. *ABC bir üçgen*
ED // FL // BC
$|AD| = 2\cdot|DL|$
$|LC| = 3\cdot|DL|$
$BD \cap FL = \{K\}$
$|ED| = 8$ br
$|FK| = x$ br
$|KL| = y$ br
olduğuna göre $x - y$ *kaçtır?*



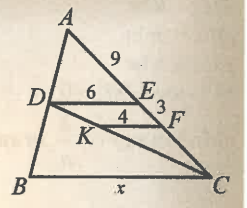
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $|DL| = k$ br denirse $|AD| = 2k$ br ve $|LC| = 3k$ br olur. Bu da ABC üçgeninde $[FL]$'nin orta taban olduğunu anlatır.

AED ile AFL üçgenleri 2:3 oranında benzer olduklarından $|FL| = x + y = 12$ olmalıdır. Şu durumda $|BC| = 24$ br dir. Diğer yandan DKL ile DBC üçgenleri de 1:4 oranında benzer olduklarından $y = 6$ çıkar. O halde x de 6'dır. Demek ki $x - y = 0$.

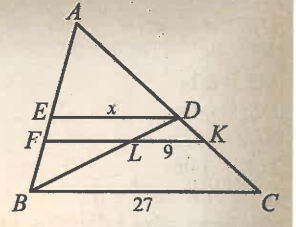
Doğru cevap: C.

17.
ABC bir üçgen
DE // KF // BC
$|AE| = 9$ br
$|EF| = 3$ br
$|DE| = 6$ br
$|KF| = 4$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ **kaçtır?**



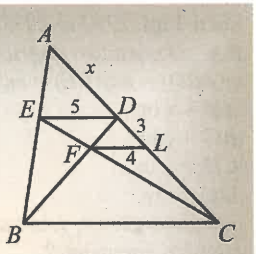
A) 10 **B)** 12 C) 13 D) 15 E) 18

18.
ABC bir üçgen
ED // FK // BC
$|AD| = 3\cdot|KC|$
$|ED| = x$ br
$|LK| = 9$ br
$|BC| = 27$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



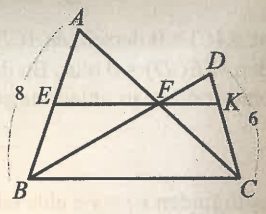
A) 13,5 B) 15 **C)** 18 D) 20 E) 21

19.
ABC bir üçgen
ED // *FL* // *BC*
$|FL| = 4$ br
$|ED| = 5$ br
$|DL| = 3$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



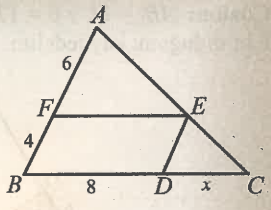
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

20.
ABC ve *DBC* birer üçgen
$AC \cap BD \cap EK = \{F\}$
EK // *BC*
$|EF| = 2 \cdot |FK|$
$|AB| = 8$ br
$|DC| = 6$ br
ise $\frac{|AE|}{|DK|}$ **kaçtır?**



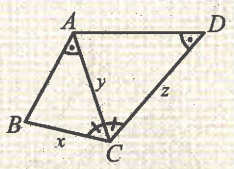
A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) 2 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

21.
ABC bir üçgen
BDEF bir paralelkenar
$|AF| = 6$ br
$|FB| = 4$ br
$|BD| = 8$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre $3x$ kaçtır?



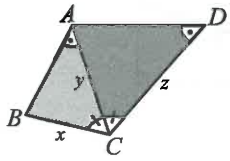
A) 13 B) 14 C) 16 D) 17 E) 20

Soru Tipi. *ABCD bir dörtgen*
$m(BCA) = m(ACD)$
$m(CAB) = m(CDA)$
$|BC| = x$ br
$|CA| = y$ br
$|CD| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $y^2 = x \cdot z$ C) $z^2 = x \cdot y$
D) $x + z = 2y$ E) $x \cdot z = 2y$

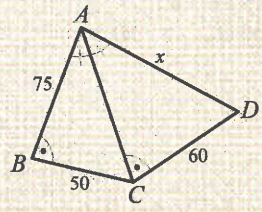
Çözümü: *ABC* ile *DAC* üçgenlerinin ikişer açısı eşit ölçülü olduğundan A.A. Benzerliği gereğince benzerdirler.



Hemen eşleme kuralım: $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ olduğundan geçerli bağıntı $y^2 = x \cdot z$ olmalıdır.

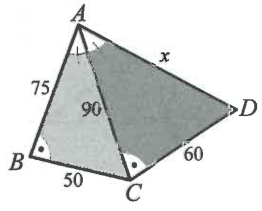
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$m(BAC) = m(CAD)$
$m(ABC) = m(ACD)$
$|AB| = 75$ br
$|BC| = 50$ br
$|CD| = 60$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 96 B) 100 C) 105 D) 108 E) 120

Çözüm: *ABC* ile *ACD* üçgenlerinin ikişer açısı eş olduğundan, bu üçgenler benzerdir.



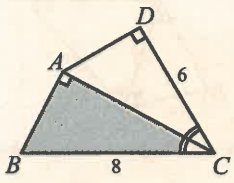
Eşleme yapılırsa $\frac{75}{50} = \frac{|AC|}{60}$ eşitliğinden $|AC| = 90$ br bulunur. Şimdi yukarda bulduğumuz formülü kullanabiliriz:

$$90^2 = 75 \cdot x$$

eşitliğinden $x = 108$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

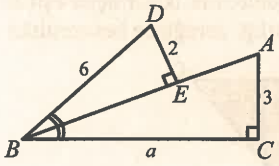
22.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

$8\sqrt{3}$

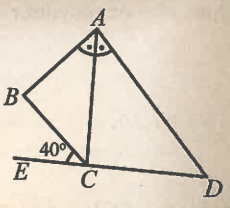
23.



a kaçtır?

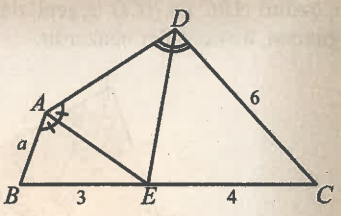
$6\sqrt{2}$

24.
$ABCD$ bir dörtgen
$[AC]$ köşegen
$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
$m(DAC) = m(CAB)$
D, C, E doğrudaş
$m(BCE) = 40°$
olduğuna göre $m(DAC)$ kaçtır?



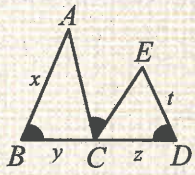
A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

25.
$ABCD$ bir dörtgen
AE ve DE iç açıortay
$m(B) = m(C)$
$|AB| = a$ br
$|BE| = 3$ br
$|EC| = 4$ br
$|CD| = 6$ br
olduğuna göre
a kaçtır?



A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

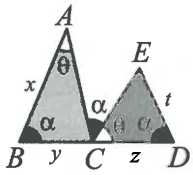
Soru Tipi. *ABC ve CDE birer üçgen*
B, C, D noktaları doğrusal
$m(ABD) = m(ACE) = m(BDE)$
$|AB| = x$ br
$|BC| = y$ br
$|CD| = z$ br
$|DE| = t$ br



olduğuna göre x, y, z, t arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x \cdot t = y \cdot z$ B) $x \cdot z = y \cdot t$ C) $x \cdot y = t \cdot z$
D) $x + t = y + z$ E) $x - t = y - z$

Çözümü: $m(ABD) = m(ACE) = m(BDE) = \alpha$ olsun.



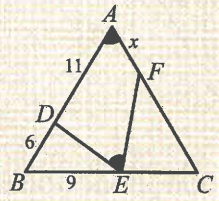
$m(BAC) = \theta$ dersek, $m(ACD) = \alpha + \theta$ olması gerektiğinden $m(ECD) = \theta$ olur. Bu da ABC ile CDE üçgenlerinin benzer olmaları anlamına gelir. Eşleme kurulursa

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$$

eşitliğinden $x \cdot t = y \cdot z$ elde edilir.

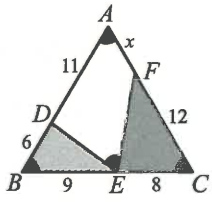
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$m(FAD) = m(DEF)$
$|EB| = 9$ br
$|BD| = 6$ br
$|DA| = 11$ br
olduğuna göre
$|FA| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

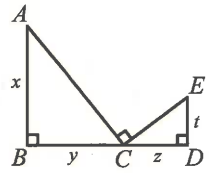
Çözüm: $|AB| = 11 + 6 = 17$ br olduğundan hemen $|EC| = 8$ br olduğunu kaydedelim.



Soruda verilen $m(FAD) = m(DEF)$ bilgisi de aslında $m(DEF) = 60°$ demektir. Bu da $m(DBE) = m(DEF) = m(ECF)$ demek olur. O halde sorumuz yukarda verdiğimiz özelliğin $\alpha = 60°$ durumudur. Bu yüzden bulduğumuz formül burada da sağlanıyor olmalıdır. $6 \cdot |FC| = 9 \cdot 8$ eşitliğinden $|FC| = 12$ br olarak bulunur.
O halde $|FA| = x = 5$ olmalıdır.

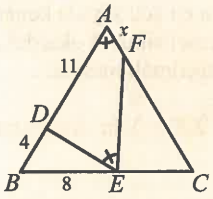
Doğru cevap: C.

Bu özellik karşımıza aşağıdaki şekilde de çıkabilir.



Bu durum, yukarıdaki verdiğimiz teoremin $\alpha = 90°$ durumu olduğundan, bağıntı hala geçerliliğini korur. Yani ne zaman yandaki şekli görsek $x \cdot t = y \cdot z$ diyeceğiz.

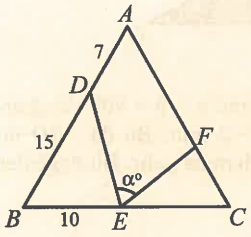
26.



ABC eşkenar üçgen ise x kaçtır?

1

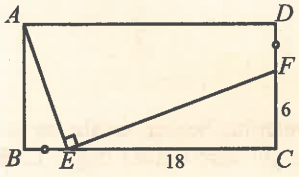
27.



ABC eşkenar üçgen ise α kaçtır?

60

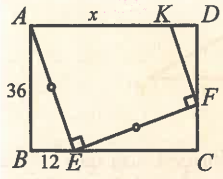
28.



ABCD dikdörtgeninin çevresi kaç br dir?

60

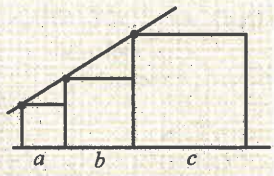
29.



ABCD dikdörtgen ise x kaçtır?

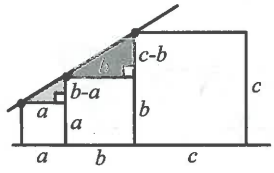
40

Soru Tipi. *Yanda verilmiş üç karenin işaretlenmiş üç köşesi doğrusaldır. Karelerin kenarları sırasıyla a* br, *b* br *ve c* br *olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $b^2 = a \cdot c$ B) $2b = a + c$ C) $c^2 = a^2 + b^2$
D) $b^2 = a \cdot (a + c)$ E) $c^2 = a \cdot (a + b)$

Çözümü: Karelerin karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olduğundan taranan üçgenler birbirlerine benzerdir.



Eşleme yapılırsa

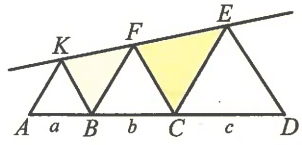
$$\frac{c-b}{b} = \frac{b-a}{a}$$

$$b^2 - ab = ac - ab$$

eşitliğinden $b^2 = a \cdot c$ bulunur.

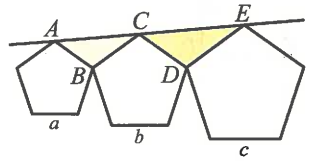
Doğru cevap: A.

Yukardaki soru eşkenar üçgenlerle de sorulabilir.



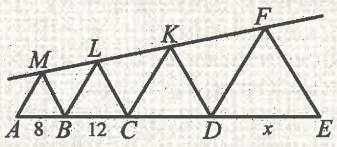
KBF ve *FCE* üçgenleri yine benzer çıkacağından $b^2 = a \cdot c$ halen sağlanır.

Hatta herhangi bir düzgün çokgen kullanılarak da bu tarz bir soru üretmek mümkündür.



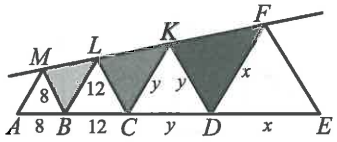
Burada da *ABC* ile *CDE* üçgenleri benzer olur ki eşleme yapılırsa yine $b^2 = a \cdot c$ eşitliğine erişilir.

Örnek. *ABM, BCL, CDK ve DEF birer eşkenar üçgen*
A, B, C, D, E doğrusal
M, L, K, F doğrusal
|AB| = 8 br
|BC| = 12 br
olduğuna göre
|DE| = x kaç br dir?



A) 18 B) 21 C) 24 D) 27 E) 36

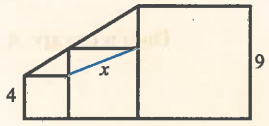
Çözüm: Herhangi bir eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu, komşu eşkenar üçgenlerin bir kenar uzunluğunun geometrik ortası çıktığından ardışık kenarların geometrik dizi oluşturduğunu anlıyoruz.



$|CD| = y$ br olsun. $12^2 = 8 \cdot y$ eşitliğinden $y = 18$ bulunur. Diğer yandan $y^2 = 12 \cdot x$ eşitliğinden de $x = 27$ bulunur.

Doğru cevap: D.

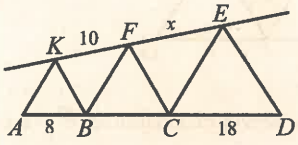
30.



Şekildeki üç karenin sol üst köşeleri doğrusalsa x kaçtır?

$2\sqrt{10}$

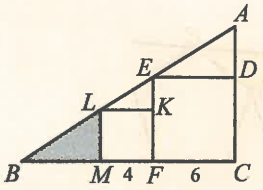
31.



Şekildeki üç eşkenar üçgenin tepeleri doğrusalsa x kaçtır?

15

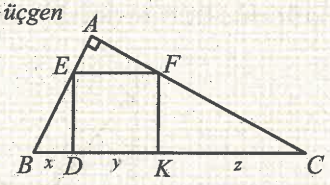
32.



ABC bir dik üçgen, *CDEF* ve *FKLM* birer kare ve *B, L, E, A* doğrusalsa Alan(*LBM*) kaç br^2 dir?

16

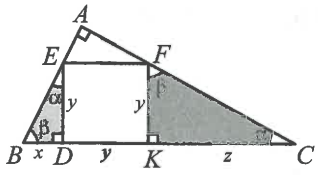
Soru Tipi. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
DKFE bir kare
|BD| = x br
|DK| = y br
|KC| = z br
olduğuna göre x, y, z
arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $y^2 = x \cdot z$ C) $z^2 = x \cdot y$
D) $x^2 = y \cdot (y + z)$ E) $y^2 = x \cdot (x + z)$

Çözüm: Böyle şekillerde, dikkat ederseniz 4 tane benzer dik üçgen vardır. Bu 4 benzer üçgenin hangi ikisinde eşleme yapacağınıza karar vermek için en çok sayıda kenar uzunluğu bulunan 2 dik üçgeni seçmelisiniz. Yukarıdaki soruda *EBD* ile *FKC* dik üçgenleri seçilmeli mesela...

EDKF bir kare olduğundan $|DE| = |KF| = y$ br olduğunu hemen not edelim.



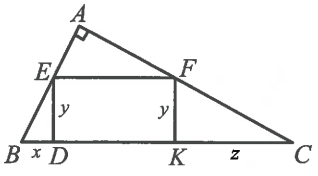
$m(ABC) = \beta$ ve $m(BCA) = \alpha$ olsun. $\alpha + \beta = 90°$ olduğundan $m(DEB) = \alpha$ ve $m(CFK) = \beta$ olur. Bu da *EBD* ile *CFK* üçgenlerinin benzerliği anlamına gelir. Bu üçgenler arasında eşleme yapılırsa

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

orantısından $y^2 = x \cdot z$ elde edilir.

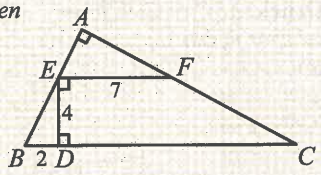
Doğru cevap: B.

Ayrıca, *EBD* ile *CFK* üçgenlerinin benzer olmalarına sebep olan şey *DKFE* dörtgenin kare olması değil, *CAB* açısının dik olmasıdır.



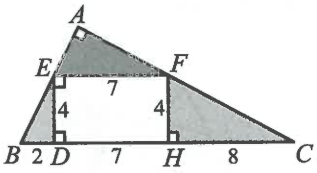
Demek istediğimiz *DKFE* bir dikdörtgen olsa da $y^2 = x \cdot z$ eşitliği geçerlidir. Ama y'nin neresi olduğuna dikkat edin!

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
FE ⊥ ED
ED ⊥ BC
|BD| = 2 br
|DE| = 4 br
|EF| = 7 br
olduğuna göre |DC| kaç br dir?



A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: *F*'den *BC*'ye dik indirerek *EDHF* dikdörtgenini oluşturalım.



Taralı üçgenlerin hepsi birbiriyle benzer olur ama biz *EBD* ile *CFH* arasında eşleme yapacağız. Hatta yapılmışı var, onu kullanacağız.

$$4^2 = 2 \cdot |HC|$$

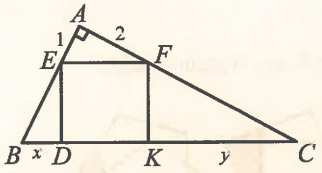
eşitliğinden $|HC| = 8$ br bulunur, o halde

$$|DC| = 7 + 8 = 15 \text{ br}$$

olur.

Doğru cevap: E.

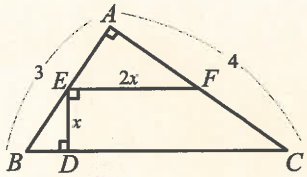
33.



DKFE bir kareyse *x·y* çarpımı kaçtır?

5

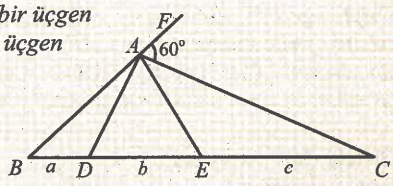
34.



x kaçtır?

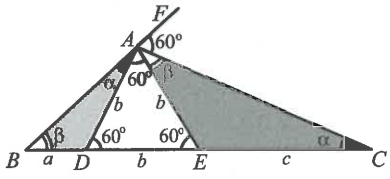
60/49

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
ADE bir eşkenar üçgen
B, A, F doğrusal
m(CAF) = 60°
|BD| = a br
|DE| = b br
|EC| = c br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $b^2 = a \cdot c$ B) $2b = a + c$ C) $c^2 = a^2 + b^2$
D) $b^2 = a \cdot (a + c)$ E) $c^2 = a \cdot (a + b)$

Çözümü: Hemen eşkenar üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini şekil üzerine yazalım.



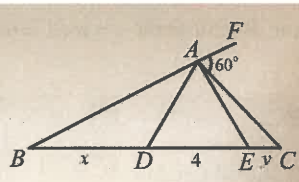
Verilere göre $m(BAD) = \alpha$ ve $m(EAC) = \beta$ olsun. $m(ABD) = \beta$ ve $m(BCA) = \alpha$ olduğunu görmek zor olmasa gerek. O halde taralı üçgenler yani *ABD* ile *CAE* benzerdir. Eşleme yapılırsa

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

eşitliğinden $b^2 = a \cdot c$ bulunur.

Doğru cevap: A.

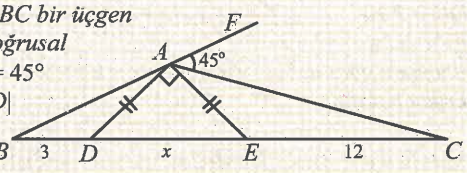
35.
ABC bir üçgen
ADE bir eşkenar üçgen
m(CAF) = 60°
|DE| = 4 br
|BD| = x br
|EC| = y br
x ve y birer tam sayı olduğuna göre |BC| kaç farklı değer alabilir?



A) 3 B) 4 C) 9 D) 10 E) 11

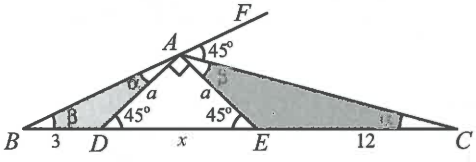
Kuralın geçerli olması için ADE üçgeninin eşkenar olmasına gerek yoktur. $|AD| = |AE|$ olacak şekilde ikizkenar olsun ve CAF açısının ölçüsü bu ikizkenar üçgenin bir taban açısının ölçüsüne eşit olsun yeter.

Örnek. *ABC bir üçgen*
B, A, F doğrusal
$m(CAF) = 45°$
$|EA| = |AD|$
$EA \perp AD$
$|BD| = 3$ br
$|EC| = 12$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) $6\sqrt{2}$

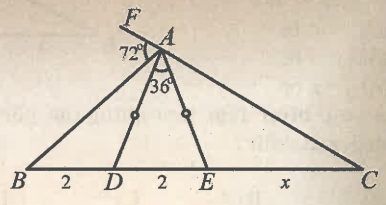
Çözüm: $m(ADE) = m(AED) = 45°$ olduğunu hemen not edelim. Ayrıca $|AD| = |AE| = a$ br olsun.



Diğer yandan $m(BAD) = \alpha$ ve $m(EAC) = \beta$ olsun. $m(ABD) = \beta$ ve $m(BCA) = \alpha$ olduğunu görmek zor olmasa gerek. O halde taralı üçgenler yani ABD ile CAE benzerdir. Eşleme yapılırsa $\frac{a}{3} = \frac{12}{a}$ eşitliğinden $a = 6$ bulunur. Bu durumda $x = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ olmalıdır.

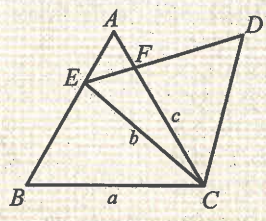
Doğru cevap: E.

36.
ABC bir üçgen
C, A, F doğrudaş
$m(EAD) = 36°$
$m(BAF) = 72°$
$|BD| = |DE| = 2$ br
$|AD| = |AE|$
olduğuna göre
$|EC| = x$ **kaç br dir?**



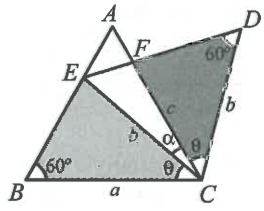
A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{5}+2$ E) $\sqrt{5}+3$

Örnek. *ABC ve CDE birer eşkenar üçgen*
$E \in [AB]$
$|CB| = a$ br
$|CE| = b$ br
$|CF| = c$ br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $b^2 = a \cdot c$ B) $2b = a + c$ C) $c^2 = a^2 + b^2$
D) $b^2 = a \cdot (a + c)$ E) $c^2 = a \cdot (a + b)$

Çözüm: $m(ECA) = \alpha$ ve $m(BCE) = \theta$ dersek $\alpha + \theta = 60°$ olduğundan $m(FCD) = \theta$ olur.



EBC ve FDC açıları da eş olduğundan EBC ile FDC üçgenleri benzerdir. Bu üçgenlerde eşleme kurulursa

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

eşitliğinden $b^2 = a \cdot c$ bulunur.

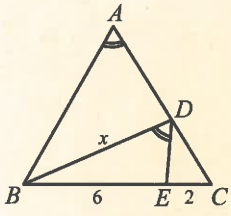
Doğru cevap: A.

Böyle bir durum sadece eşkenar üçgende değil,



diğer düzgün çokgenlerde de vardır. Taralı üçgenler daima benzerdir.

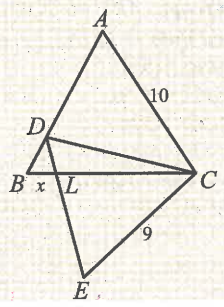
37.



ABC eşkenar üçgen ise x kaçtır?

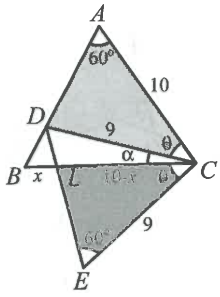
$4\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$D \in [AB]$
CDE bir eşkenar üçgen
$|CA| = 10$ br
$|CE| = 9$ br
$|BL| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1,2 B) 1,5 C) 1,6
D) 1,9 E) 2,4

Çözüm: $m(BCD) = \alpha$ ve $m(DCA) = \theta$ dersek $\alpha + \theta = 60°$ olduğundan $m(ECB) = \theta$ olur.



CAD ve *CEL* açıları da eş olduğundan *CAD* ile *CEL* üçgenleri benzerdir. Bu üçgenlerde eşleme kurulursa

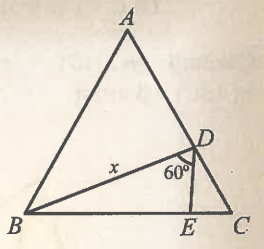
$$\frac{9}{10-x} = \frac{10}{9}$$
$$100 - 10x = 81$$
$$10x = 19$$

eşitliğinden $x = 1,9$ olarak bulunur. Siz benim uzun uzadıya çözdüğüme bakmayıp $9^2 = 10 \cdot (10 - x)$ diyerek sonuca ulaşın.

Doğru cevap: D.

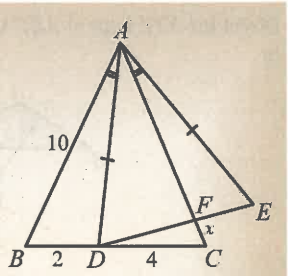
38.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [AC]$
$E \in [BC]$
$m(BDE) = 60°$
$|BD| = x$ br
$|AB| \cdot |BE| = 48$ br^2

olduğuna göre x kaçtır?



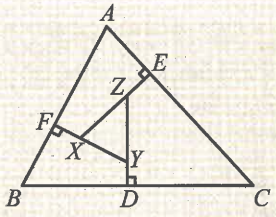
A) $4\sqrt{2}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) 7 E) 8

39.
ABC ve *ADE* birer üçgen
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |AE|$
$|AB| = 10$ br
$|BD| = 2$ br
$|DC| = 4$ br
$|CF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



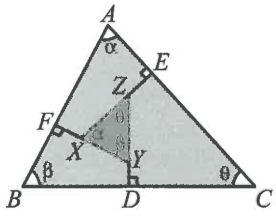
A) 0,6 **B)** 0,8 C) 1 D) 1,2 E) 1,4

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$FX \perp AB$
$DY \perp BC$
$EZ \perp CA$
olduğuna göre XYZ üçgeni için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?



A) Eşkenar üçgendir. B) İkizkenar üçgendir.
C) *ABC* ile benzerdir. D) *BCA* ile benzerdir.
E) *CAB* ile benzerdir.

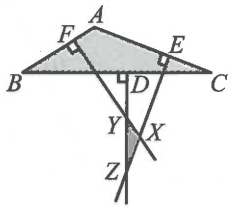
Çözümü: *ABC* üçgeninde *A*, *B*, *C* açılarının ölçüleri sırasıyla α, β, θ olsun.



AFXE, *BDYF* ve *CEZD* dörtgenlerinin iç açılarının ölçülerini toplarsak *XYZ* üçgeninin de *X*, *Y*, *Z* açılarının ölçülerini α, β, θ olarak buluruz. O halde *XYZ* üçgeni *ABC* ile benzerdir.

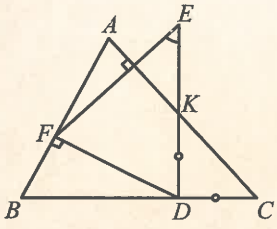
Doğru cevap: C.

Böyle bir XYZ üçgeni ABC üçgeninin dışında da oluşabilir.



$m(CAB) = m(ZXY)$
$m(ABC) = m(XYZ)$
$m(BCA) = m(YZX)$
olduğundan $XYZ \sim ABC$ olur.

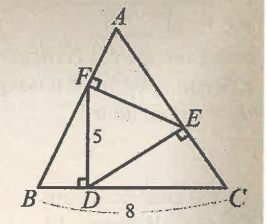
40.



$ABC \sim FDE$ ise $m(E)$ kaç derecedir?

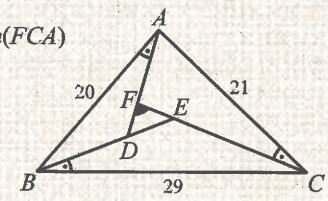
45

41.
ABC bir üçgen
$FD \perp BC$
$DE \perp CA$
$EF \perp AB$
$|FD| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$|ABC| = 32$ br^2
olduğuna göre
Alan(DEF) kaç br^2 dir?



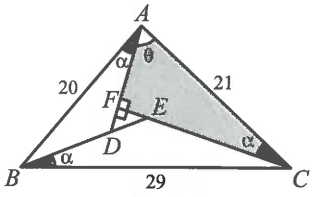
A) 10 **B) 12,5** C) 15 D) 20 E) 25

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(DAB) = m(EBC) = m(FCA)$
$|AB| = 20$ br
$|AC| = 21$ br
$|BC| = 29$ br
olduğuna göre EFD açısının ölçüsü kaç derecedir?



A) 60 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

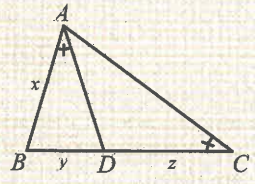
Çözüm: Soruda verilen eş açıların ölçülerine α diyelim. Ayrıca $m(CAF) = \theta$ olsun. 20-21-29 üçgeni bir Pisagor üçgeni olduğundan $\alpha + \theta = 90°$ olmalıdır.



O halde AFC üçgeninde F açısı da 90° dir. Sonuç olarak $CF \perp AD$ bulunduğundan $m(EFD) = 90°$ çıkar. ABC ile FDE üçgenlerinin benzer olduğunu da unutmayın!

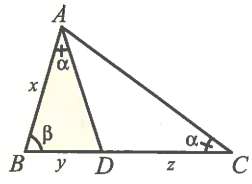
Doğru cevap: C.

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$m(DAB) = m(ACB)$
$|AB| = x$ br
$|BD| = y$ br
$|DC| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $y^2 = x \cdot z$ C) $z^2 = x \cdot y$
D) $x^2 = y \cdot (y + z)$ E) $y^2 = x \cdot (x + z)$

Çözümü: $m(DAB) = m(ACB) = \alpha$ diyelim. Ayrıca $m(ABC) = \beta$ olsun.



Taralı olan DAB üçgeni ile ACB üçgeninin ikişer açısı eş olduklarından benzerlerdir. Eşleme yapılırsa

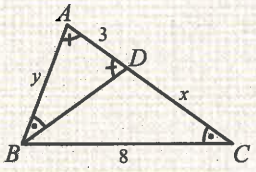
$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x}$$

çıkar ki düzenlenirse $x^2 = y \cdot (y + z)$ elde edilir.

Doğru cevap: D.

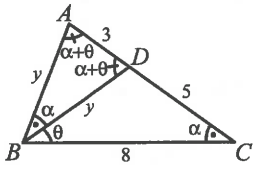
Bana, en değer verdiğim veya en sık karşılaştığım 3 tane özellik sorsalar, söyleyeceklerimden biri mutlaka yukardaki özellik olur. Bu yüzden bu bağıntıyı özellikle hafızanızda tutmanızı isteyeceğim. İlerde bu kuralı detaylı olarak işleyecek ve nerelerde karşılaşıldığına dair çarpıcı örnekler vereceğiz. Şimdilik sade bir örnekle geçiştiriyoruz.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BAC) = m(ADB)$
$m(ACB) = m(ABD)$
$|AD| = 3$ br
$|BC| = 8$ br
$|DC| = x$ br
$|AB| = y$ br
olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?



A) 12 B) 24 C) 36 D) $10\sqrt{6}$ E) $12\sqrt{6}$

Çözüm: $m(ACB) = m(ABD) = \alpha$ ve $m(CBD) = \theta$ olsun. $m(BDA) = m(CAB) = \alpha + \theta$ olur. O halde $|CA| = |CB|$'dir. Buradan $x = 5$ bulunur.



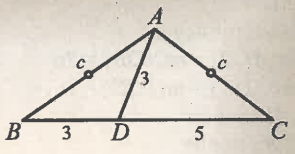
Diğer yandan *ABD* ile *ACB* üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{8}{y} = \frac{y}{3}$$

olur ki (bizim formüle göre $y^2 = 3 \cdot (3 + 5)$ buradan $y = 2\sqrt{6}$ çıkar. O halde $x \cdot y = 10\sqrt{6}$ olarak bulunur.

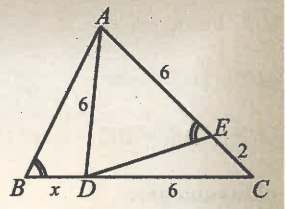
Doğru cevap: D.

42.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|DC| = 5$ br
$|BD| = |DA| = 3$ br
$|AB| = |AC| = c$ br
olduğuna göre c kaçtır?



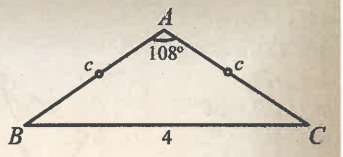
A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 5 E) $2\sqrt{7}$

43.
ABC bir üçgen
$m(B) = m(DEA)$
$|AE| = |AD| = |DC| = 6$ br
$|EC| = 2$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



A) 2 B) 1,8 C) 1,5 D) 1,2 E) 1

44.
ABC bir üçgen
$m(A) = 108°$
$|BC| = 4$ br
$|AB| = |AC| = c$ br
olduğuna göre
c kaçtır?

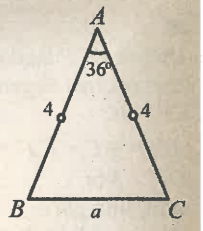


A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}+1$ C) 3 D) $2\sqrt{5}-2$ E) $\sqrt{7}$

45.
ABC bir üçgen
$m(A) = 36°$

$|AB| = 4$ br
$|AC| = 4$ br
$|BC| = a$ br

olduğuna göre a kaçtır?



A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}+1$ C) 3 D) $2\sqrt{5}-2$ E) $\sqrt{7}$

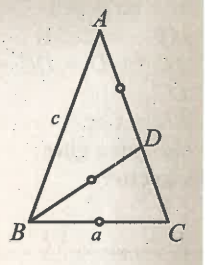
46.
ABC bir üçgen

$|AB| = |AC| = c$ br

$|AD| = |DB| = |BC| = a$ br

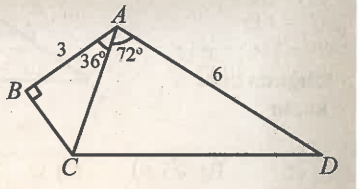
olduğuna göre

$\frac{2c}{a}$ **oranı kaçtır?**



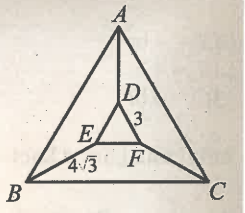
A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{5}-1$ E) 3

47.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$m(CAB) = 36°$
$m(DAC) = 72°$
$|AB| = 3$ br
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre
$m(CDA) = \alpha$ **kaç derecedir?**



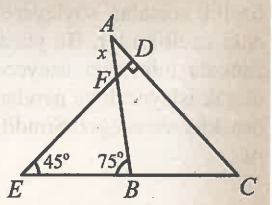
A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 72

48.
ABC ve DEF merkezleri çakışık birer eşkenar üçgen
$EF \,//\, BC$
$|AD| = |BE| = |CF| = 4\sqrt{3}$ br
$|DF| = 3$ br
olduğuna göre
$|AC|$ **kaç birimdir?**



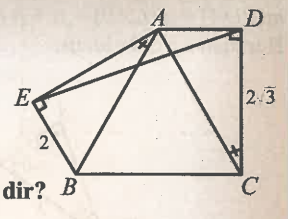
A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

49.
$BD \perp AC$
$|EB| = |BC|$
$m(ABE) = 75°$
$m(DEC) = 45°$
$|EC| = 2\sqrt{6}$ br
olduğuna göre
$|AF| = x$ **kaç br dir?**



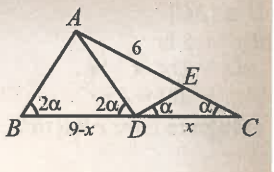
A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}-2$ E) $2\sqrt{3}+2$

50.
ABC eşkenar üçgen
$AD \perp DC$
$AE \perp EB$
$m(EAB) = m(DCA)$
$|EB| = 2$ br
$|CD| = 2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|ED|$ **kaç br dir?**



A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{7}$ D) 5 E) $2\sqrt{6}$

51.
ABC bir üçgen
$m(ABD) = m(ADB) = 2\alpha$
$m(EDC) = m(ECD) = \alpha$
$|AE| = 6$ br
$|DC| = x$ br
$|BD| = 9 - x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



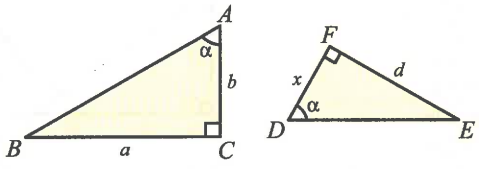
A) 4,8 B) 5,4 C) 6 D) 6,4 E) 7,2

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dik Üçgen Benzerlikleri

Benzer iki üçgende eşleme yapmayı öğrenmiştik. O halde şu an için, yeteri kadar veriye sahip iki dik üçgen benzerse sorulan değeri bulabilecek durumdayız. Fakat bu dersimizde dik üçgenlerde eşleme yapmaktan daha kısa sürede sonuç veren teknikler göstererek, sıkça karşılaşılan soru tiplerini de formülize edeceğiz.



Örneğin yukarda verilen birbirine benzer iki dik üçgeni ele alalım. Benzer olduklarını nerden mi anladık? Hem ikisi de dik üçgen hem de ikisinin α ölçülü birer dar açısı var. Zaten bu durumda diğer dar açı da eşit ölçülü olmak zorunda olduğundan A.A. benzerliği gereğince öyle dedik. Neyse devam edelim:

Eski bilgilerle sorumuzu çözecek olursak, ''soldakinde α'nın karşısındaki kenar (*a*) bölü sağdakinde α'nın karşısındaki kenar (*d*) eşittir soldakinde diğer dar açının karşısındaki kenar (*b*) bölü sağdakinde diğer dar açının karşısındaki kenar (*x*)'' diyerek, çıkan

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{x}$$

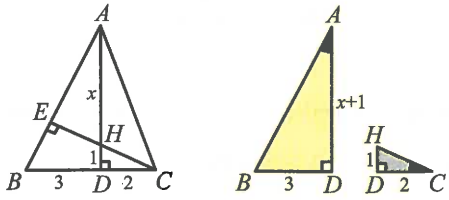
orantısını çözecektik. Kimse bunun zor bir iş olduğunu söylemez ama şekle en az 4 kere dönmek gerekiyor orantıyı yazabilmek için.

Tavsiyemiz şudur:

Her iki dik üçgende de tan α değerlerini birbirlerine eşitleyin (Tabii eğer hipotenüs uzunlukları verilmiş ya da soruluyorsa sin α veya cos α değerlerini eşitlememiz gerekiyor):

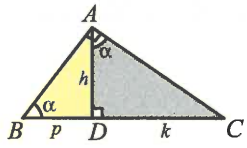
$$\frac{a}{b}=\frac{d}{x}.$$

Bir örnekle derdimiz daha iyi anlatırız sanırım. Örneğin,



soldaki üçgende x değerinin sorulduğunu farzedelim. *DAB* açısıyla *DCH* açısının aynı ölçülü olduklarını biliyoruz. *DCH* üçgeninde tan(*DCH*) = 1/2 olduğundan tan(*DAB*) değeri de 1/2 olmalıdır. Yani $|DA| = x + 1 = 6$ olmalıdır. Buradan $x = 5$ bulunur.

Sadece soru çözerken değil, teorem kanıtlarken bile bu metotlar işimizi kolaylaştırır. Örneğin daha önce Öklit Teoremi'ni vermiş ve kanıtını üç adet Pisagor Teoremi birden kullanarak yapmıştık. Halbuki;



yukardaki *ABC* dik üçgeninde

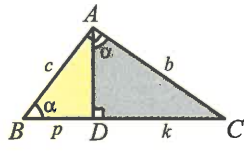
$$m(ABC) = m(CAD) = \alpha$$

olduğundan *ABD* ile *CAD* üçgenleri benzer olup,

$$\tan\alpha=\frac{h}{p}=\frac{k}{h}$$

eşitliğinden hemencecik $h^2 = p\cdot k$ eşitliğine ulaşabilirdik.

Dahası da var:



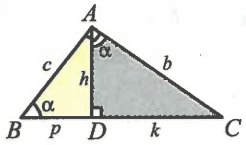
ABD ve *ABC* üçgenlerinden

$$\cos\alpha=\frac{p}{c}=\frac{c}{p+k}$$

yazarak $c^2 = p\cdot(p+k)$ eşitliğine, ADC ve ABC üçgenlerinden

$$\sin\alpha = \frac{k}{b} = \frac{b}{p+k}$$

yazarak $b^2 = k\cdot(p+k)$ eşitliğine ulaşabilirdik. Hatta bu sayede daha önceden bilmediğimiz başka eşitlikler de bulmak mümkün oluyor. Örneğin,



ADB ve ADC üçgenlerinden $\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{k}{b}$ yazarak $b\cdot h = c\cdot k$ eşitliğine, aynı üçgenlerden

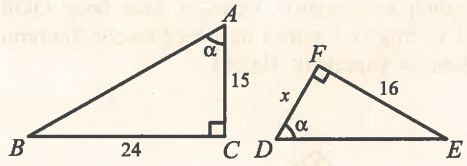
$$\sin\alpha = \frac{p}{c} = \frac{h}{b}$$

yazarak $c\cdot h = b\cdot p$ eşitliğine ulaşıyoruz. Bizim için yeni olan bu iki eşitliği birbirine bölersek de

$$\frac{p}{k} = \frac{c^2}{b^2}$$

elde ediliyor. Ne güzel değil mi?

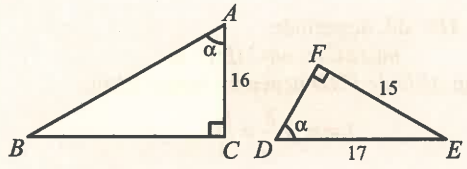
1.



x kaçtır?

10

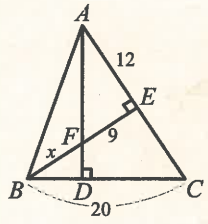
2.



Alan(ABC) kaç br^2 dir?

240

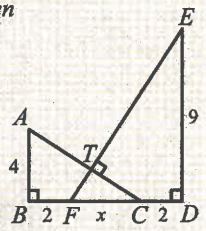
3.



x kaçtır?

7

Örnek. *ABC ve FDE birer dik üçgen*
$AB \perp BD$
$BD \perp DE$
$AC \perp EF$
$|BF| = |CD| = 2$ br
$|AB| = 4$ br
$|DE| = 9$ br
olduğuna göre $|FC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

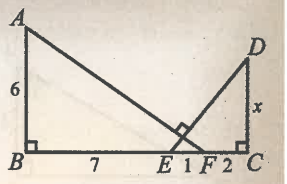
Çözüm: ABC ile FDE üçgenlerinin benzer olduklarını biliyoruz. O halde $\tan A = \tan F$ olmalıdır.

$$\frac{x+2}{4} = \frac{9}{x+2}$$

denkleminden $(x+2)^2 = 36$ yani $x = 4$ bulunur.

Doğru cevap: C.

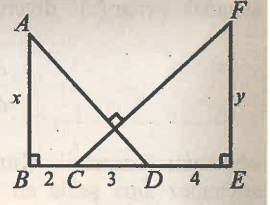
4.
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$AF \perp DE$
$|AB| = 6$ br
$|BE| = 7$ br
$|EF| = 1$ br
$|FC| = 2$ br



olduğuna göre $|CD| = x$ kaç br dir?

A) 3 **B) 4** C) 5 D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

5.
$AB \perp BE$
$BE \perp EF$
$AD \perp CF$
$|BC| = 2$ br
$|CD| = 3$ br
$|DE| = 4$ br
$|AB| = x$ br
$|EF| = y$ br

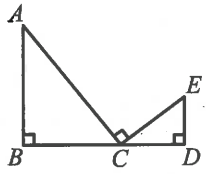


olduğuna göre $x\cdot y$ kaç br^2 dir?

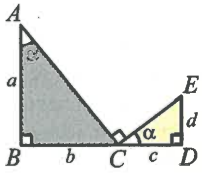
A) 12 B) 24 C) 28 D) 32 **E) 35**

Şimdi benzer dik üçgenlerin kullanıldığı ilk teoremle derse başlıyoruz:

Teorem. *Yandaki şekilde*
$AB \perp BD$
$BD \perp DE$
$AC \perp CE$
ise $|AB|\cdot|ED| = |BC|\cdot|CD|$ *dir.*



Kanıt: $|AB| = a$ br, $|BC| = b$ br, $|CD| = c$ br ve $|DE| = d$ br diyelim.

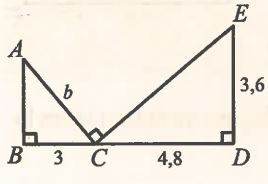


$m(CAB) = \alpha$ dersek $m(ECD) = \alpha$ olur. O halde ABC ile CDE üçgenleri benzerdir.

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

olduğundan $a\cdot d = b\cdot c$ olmalıdır. O halde teorem kanıtlanmış demektir.

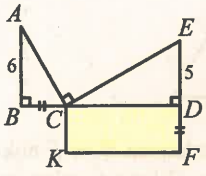
6.



b kaçtır?

5

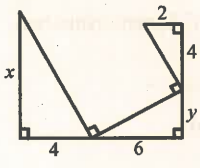
7.



$CKFD$ dikdörtgeninin alanı kaç br^2 dir?

30

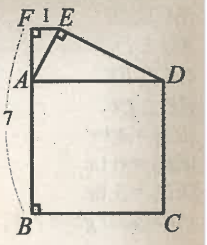
8.



$x - y$ kaçtır?

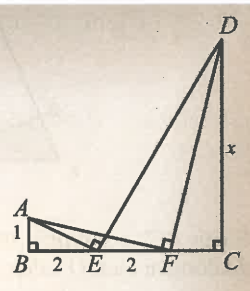
5

9.
$ABCD$ bir kare
DEA bir dik üçgen
$DE \perp EA$
$EF \perp FB$
F, A, B doğrudaş
$|EF| = 1$ br
$|FB| = 7$ br
olduğuna göre karenin bir kenarı kaç br dir?



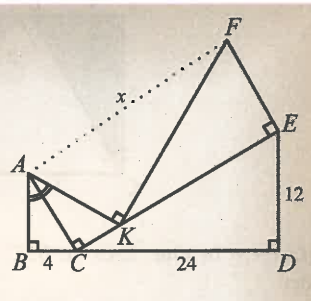
A) 4 B) 4, 5 C) 5 D) 5,5 E) 6

10.
$AB \perp BC$
$AE \perp ED$
$AF \perp FD$
$BC \perp CD$
$|AB| = 1$ br
$|BE| = |EF| = 2$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



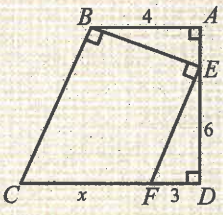
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11.
$AB \perp BD$
$BD \perp DE$
$AC \perp CE$
$CE \perp EF$
$AK \perp KF$
$m(BAC) = m(KAC)$
$|BC| = 4$ br
$|CD| = 24$ br
$|DE| = 12$ br
olduğuna göre $|AF| = x$ kaç br dir?



A) 20 B) 22 C) $5\sqrt{29}$ D) 29 E) $6\sqrt{29}$

Örnek. *ABCD bir dik yamuk*
$BA \perp AD$
$AD \perp DC$
$CB \perp BE$
$BE \perp EF$
$|BA| = 4$ br
$|ED| = 6$ br
$|FD| = 3$ br
olduğuna göre $|CF| = x$ *kaç* br *dir?*



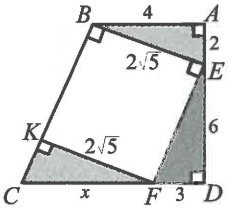
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz. İlki biraz önce verdiğimiz teoremi 1 kez kullanacak, ikincisi 2 kez.

Birinci yol. BAE ile EDF üçgenlerinin benzerliğinden

$$4 \cdot 3 = |AE| \cdot 6$$

eşitliğinden $|AE| = 2$ br olduğunu hemen not edelim.



F'den BC'ye indirilen dikme ayağı K olsun. $EBKF$ bir dikdörtgen olur. O halde

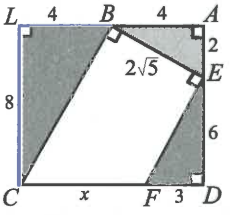
$$|KF| = |BE| = 2\sqrt{5} \text{ br}$$

olur. KCF üçgeni diğer taralı üçgenlerle benzer olduğundan

$$|KC| = \sqrt{5} \text{ br}$$

ve $|CF| = x = 5$ olur.

İkinci yol. $|AE| = 2$ br olduğunu bulduktan sonra şekildeki gibi $CDAL$ dikdörtgenini oluşturalım.



$|LC| = 8$ br olur. EAB ve BLC üçgenlerinin benzerliğinden

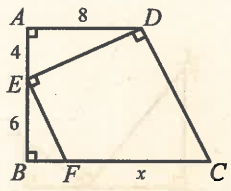
$$8 \cdot 2 = 4 \cdot |LB|$$

yani $|LB| = 4$ br bulunur.

$|LA| = 8$ br çıktığından $|CD| = 8$ br olur. O halde $x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: A.

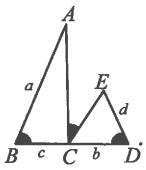
12.



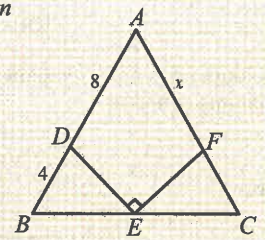
x kaçtır?

10

Ek bilgi olarak şunu verelim: $a \cdot d = b \cdot c$ eşitliğinin sağlanması için verilen üç dik açının eş olması şart ama dik olması şart değildir. Bunu daha önce bulmuştuk hatırlarsanız. Yani sağdaki şekilde de $a \cdot d = b \cdot c$ eşitliği sağlanmaktadır.

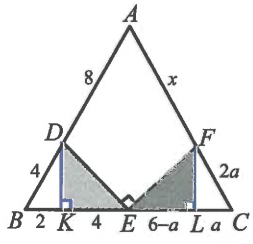


Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$DE \perp EF$
$|BE| = |EC|$
$|AD| = 8$ br
$|DB| = 4$ br
olduğuna göre
$|AF| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 7 B) 7,2 C) 7,4
D) 7,8 E) 8

Çözüm: $|BE| = |EC| = 6$ br olduğunu yazdıktan sonra kıpırdayamıyoruz.



DEF dik açısı bize son teoremi hatırlatınca D ve F noktalarından BC'ye dikmeler iniyoruz. Dikme ayakları sırasıyla K ve L olsun. $|FC| = 2a$ br diyelim. DBK ve FCL üçgenlerinin birer 30°-60°-90° üçgeni oldukları fark edilirse $|BK| = 2$ br ve $|LC| = a$ br olarak bulunur.

O halde $|KE| = 4$ br, $|KD| = 2\sqrt{3}$ br, $|FL| = a\sqrt{3}$ br ve tabii ki $|EL| = 4 - a$ br dir. DKE ve ELF üçgenlerinin benzer olmalarının gereğini yaparsak,

$$2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 4 \cdot (6 - a)$$

$$6a = 24 - 4a$$

$$10a = 24$$

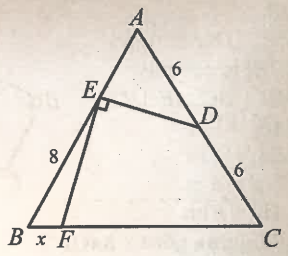
eşitliğinden $a = 2{,}4$, dolayısıyla $x = 7{,}2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

13.
ABC bir eşkenar üçgen
$DE \perp EF$

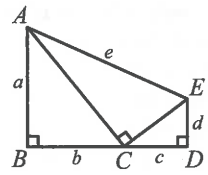
$|CD| = |DA| = 6$ br
$|EB| = 8$ br
$|BF| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



A) 0,8 B) 1 C) 1,2 D) 1,4 **E) 1,6**

Teorem. *Yandaki şekilde*
$AB \perp BD$, $BD \perp DE$, $AC \perp CE$
$|AB| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|DE| = d$ br
$|EA| = e$ br
ise $e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *dir.*

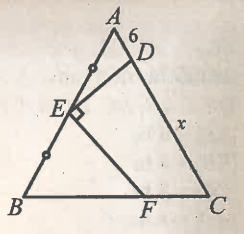


Kanıt: ABC bir dik üçgen olduğundan Pisagor Teoremi gereği $|AC|^2 = a^2 + b^2$ olur. Aynı zamanda CDE de bir dik üçgen olduğundan $|CE|^2 = c^2 + d^2$ olur. Sıra son dik üçgene geldi. ACE dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

$$|AE|^2 = |AC|^2 + |CE|^2$$
$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

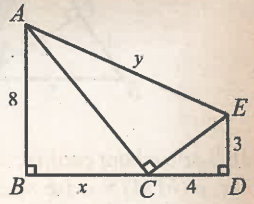
14.
ABC bir eşkenar üçgen
$FE \perp ED$
$|BF| = 2 \cdot |FC|$
$|AE| = |EB|$
$|AD| = 6$ birim
olduğuna göre
$|DC| = x$ kaç br dir?



A) 30 B) 32 **C) 36** D) 42 E) 48

16.
$ABDE$ bir dik yamuk
$AB \perp BD$, $BD \perp DE$
$AC \perp CE$
$|AB| = 8$ br
$|CD| = 4$ br
$|DE| = 3$ br
$|BC| = x$ br
$|AE| = y$ br

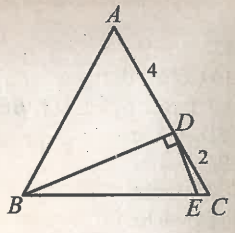
olduğuna göre $xy = k\sqrt{5}$ eşitliğini sağlayan k kaçtır?



A) 20 **B) 30** C) 40 D) 50 E) 60

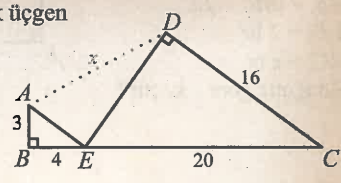
15.
ABC bir eşkenar üçgen
$BD \perp DE$
$|AD| = 4$ birim
$|DC| = 2$ birim

olduğuna göre
$|EC|$ kaç br dir?



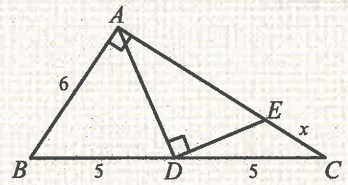
A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 **D) 0,4** E) 0,5

17.
ABE ve CDE birer dik üçgen
B, E, C doğrudaş
$AB \perp BE$
$CD \perp DE$
$|AB| = 3$ br
$|BE| = 4$ br
$|CD| = 16$ br
$|EC| = 20$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



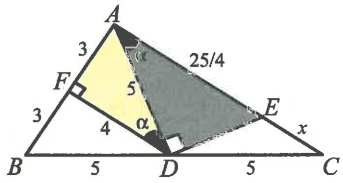
A) 12 **B) 13** C) 14 D) 15 E) 16

Örnek. *ABC ve ADE birer dik üçgen*
CA ⊥ AB
AD ⊥ DE
$|AB| = 6$ br
$|BD| = |DC| = 5$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) 2 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: *ABC* üçgeninde muhteşem üçlü gereği $|AD| = 5$ br dir.



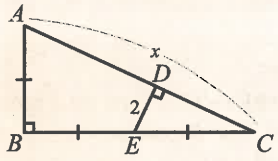
$[DF]$ orta tabanı çizilirse $|BF| = |FA| = 3$ br ve $|DF| = 4$ br olur. $m(FDA) = \alpha$ ise $m(DAC) = \alpha$ olacağından *AFD* ile *EDA* üçgenlerinin benzerliği görülür. *AFD* üçgeninde $\cos\alpha = 4/5$ olduğundan *ADE* üçgeninde de öyle olmalıdır. Buradan $|AE| = 25/4$ br bulunur ki, $|AC| = 8$ br olduğundan

$$|EC| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$$

olmalıdır.

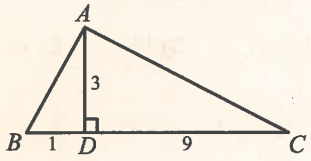
Doğru cevap: B.

18.
ABC bir dik üçgen
AB ⊥ BC
CD ⊥ DE
$|AB| = |BE| = |EC|$
$|ED| = 2$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



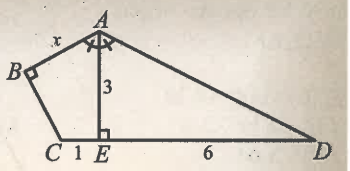
10

19.
ABC bir dik üçgen
AD ⊥ BC
$|AD| = 3$ br
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 9$ br
olduğuna göre
$m(CAB)$ kaç derecedir?



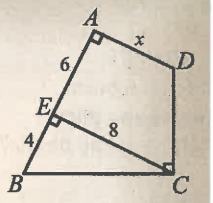
90

20.
ABCD bir dörtgen
[AE] iç açıortay
AB ⊥ BC, AE ⊥ CD
$|AE| = 3$ br
$|CE| = 1$ br
$|ED| = 6$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



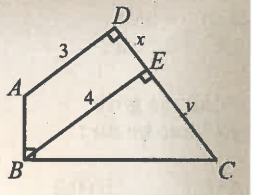
A) 2 **B)** $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

21.
ABCD bir dörtgen
DA ⊥ AB, BC ⊥ CD, CE ⊥ AB
$|AE| = 6$ br
$|EB| = 4$ br
$|EC| = 8$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



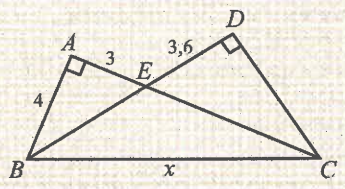
A) 7 B) $\frac{13}{2}$ C) 6 D) $\frac{11}{2}$ E) 5

22.
ABCD bir dörtgen
AB ⊥ BC, CD ⊥ DA, BE ⊥ CD
$|AD| = 3$ br
$|BE| = 4$ br
$|DE| = x$ br
$|EC| = y$ br
olduğuna göre $x \cdot y$ kaçtır?



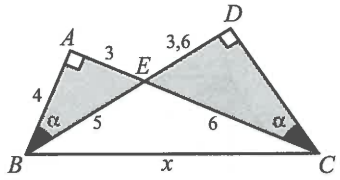
A) 3 **B)** 4 C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 8

Örnek. *CAB ve CDB birer dik üçgen*
$CA \perp AB$
$CD \perp DB$
$|BA| = 4$ br
$|AE| = 3$ br
$|ED| = 3{,}6$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 8 B) $\sqrt{73}$ C) 9 D) $\sqrt{97}$ E) 10

Çözüm: Hemen $|BE| = 5$ br olduğunu not edelim.

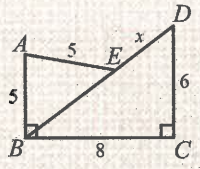


$m(ABE) = \alpha$ ise $m(DCA) = \alpha$ olacağını ve bundan dolayı taralı dik üçgenlerin benzer olduğunu biliyoruz. Soldaki üçgende α'nın karşısındaki kenar uzunluğu 3 br, sağdakindeyse 3,6 br olduğundan sağdakinin soldakinin 1,2 katı olduğunu anlamalıyız. O zaman hipotenüsü de 1,2 katı olmalıdır. Bu durumda $|EC| = 5 \cdot (1{,}2) = 6$ br olarak bulunur. Geriye sadece *CAB* dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygulamak kalır:

$$|BC| = x = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}\,.$$

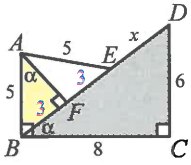
Doğru cevap: D.

Örnek. *DBC bir üçgen*
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$|AB| = |AE| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 6$ br
olduğuna göre $|ED| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

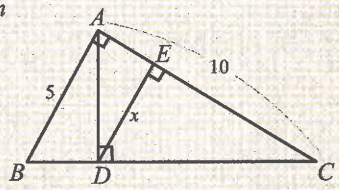
Çözüm: Ne zaman ikizkenar üçgen gördünüz mü taban dik indirin demiştik. İndirin.



$m(DBC) = \alpha$ ise $m(BAF) = \alpha$ olur. Bu da taralı üçgenlerin benzerliği anlamına gelir. *BCD* dik üçgeninde $\sin\alpha = 3/5$ olduğundan $|BF| = 3$ br olur. *EAB* ikizkenar olduğundan $|FE|$ de 3 br uzunluktadır. O halde $x = 4$ olmalıdır.

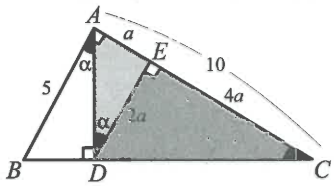
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC dik üçgen*
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$DE \perp AC$
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre
$|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) 4 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

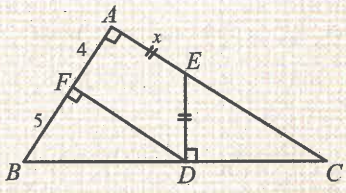
Çözüm: *AED*, *DEC* ve *BAC* üçgenleri benzerdir.



BAC üçgeninin dik kenarlarının oranı 1:2 olduğundan diğerlerinde de öyle olmalıdır. O halde $|AE| = a$ br ise $|DE| = 2a$ br ve $|EC| = 4a$ br olur. $|AC| = 5a = 10$ olduğundan $a = 2$ ve $x = 2a = 4$ bulunur.

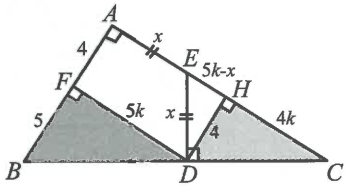
Doğru cevap: C.

Örnek. *BAC üçgen*
$CA \perp AB$
$DF \perp AB$
$ED \perp BC$
$|BF| = 5$ br
$|FA| = 4$ br
olduğuna göre
$|AE| = |ED| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\frac{6}{7}\sqrt{14}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\frac{8}{7}\sqrt{14}$ D) $\frac{9}{7}\sqrt{14}$ E) $2\sqrt{14}$

Çözüm: *D*'den *AC*'ye indirilen dikme ayağı *H* olsun.



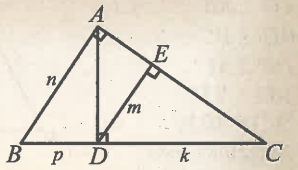
AFDH bir dikdörtgen ve $|DH| = 4$ br olur. Taralı üçgenlerin benzerliğinden $|FD| = 5k$ br ise $|HC| = 4k$ br ve $|EH| = 5k - x$ br olur. Öklit Teoremi'nden

$$x^2 = (5k - x)(9k - x)$$

olur ki $\frac{k}{x} = \frac{14}{45}$ olur. İşlemler yapılırsa $x = \frac{9}{7}\sqrt{14}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

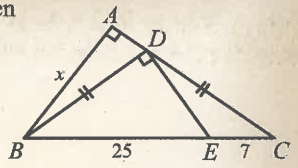
23.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$DE \perp CA$
$|AB| = n$ br
$|ED| = m$ br
$|BD| = p$ br
$|DC| = k$ br



olduğuna göre m, n, p, k arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $mn = pk$ B) $mp = nk$ C) $mk = np$
D) $m + n = p + k$ E) $m + k = n + p$

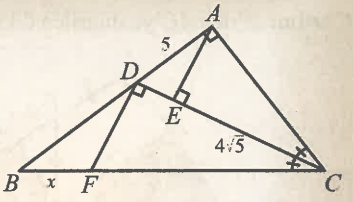
24.
CAB ve EDB birer dik üçgen
$CA \perp AB$
$ED \perp DB$
$|BD| = |DC|$
$|BE| = 25$ birim
$|EC| = 7$ birim



olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?

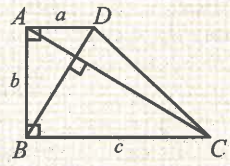
A) 19,2 B) 19,4 C) 19,6 D) 19,8 E) 20

25.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AE \perp CD$
$CD \perp DF$
$|AD| = 5$ br
$|EC| = 4\sqrt{5}$ br
olduğuna göre
$|BF| = x$ kaç br dir?



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4 **D)** $\frac{25}{6}$ E) $\frac{75}{17}$

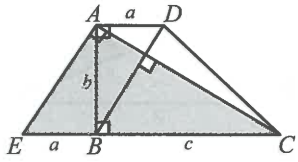
Örnek. *ABCD bir dik yamuk*
$AD \,//\, BC$
$AB \perp BC, AC \perp BD$
$|AD| = a$ br
$|AB| = b$ br
$|BC| = c$ br



olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a^2 = b \cdot c$ B) $b^2 = a \cdot c$ C) $c^2 = a \cdot b$
D) $b = a \cdot c$ E) $b = 2 \cdot a \cdot c$

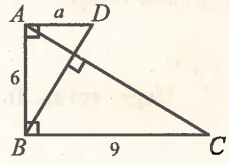
Kanıt: $[CB]$'yi B yönünde uzatarak yandaki $AEBD$ paralelkenarını oluşturalım.



$BD \,//\, AE$ olduğundan $EA \perp AC$ olur. Öklit Teoremi'nden $b^2 = a \cdot c$ bulunur.

Doğru cevap: B.

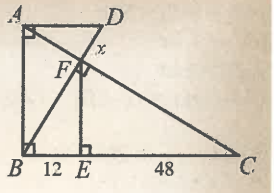
26.



a kaçtır?

4

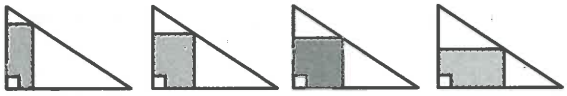
27.
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$AC \perp BD$
$FE \perp BC$
$|BE| = 12$ br
$|EC| = 48$ br
olduğuna göre
$|FD| = x$ kaç br dir?



A) $3\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

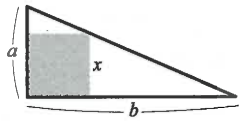
Dersimizin bu safhasında, içine kare ve dikdörtgen çizilmiş dik üçgenleri inceleyeceğiz. Öyle güzel sonuçlar elde edeceğiz ki eminim en az benim kadar şaşıracak ve hayret edeceksiniz. Başlayalım:

Bir dik üçgen içine, köşeleri üçgen üstünde olup dik kenarlara oturacak şekilde sonsuz farklı sayıda dikdörtgen çizilebilir. Fakat bunlardan sadece 1 tanesi karedir.

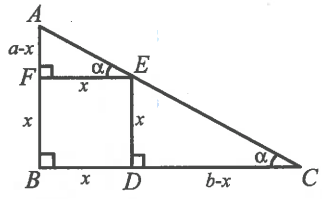


İlk olarak bu kareye yoğunlaşacağız.

Teorem. *Dik kenar uzunlukları a br ve b br olan bir dik üçgenin içine, dik kenarlara oturacak şekilde çizilebilecek en büyük karenin bir kenarının uzunluğu* $\frac{a\cdot b}{a+b}$ *dir.*



Kanıt: Karenin karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olduğundan $m(AEF)=\alpha$ dersek $m(ACB)=\alpha$ olur.



Bu da *AFE* ile *ABC* üçgenlerinin benzerliği anlamına gelir. Karenin bir kenar uzunluğuna x br deyip, bu üçgenleri kullanarak

$$\tan\alpha=\frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}$$

orantısını kurarsak

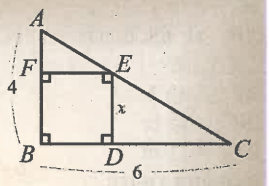
$$ax=ab-bx$$
$$ax+bx=ab$$
$$(a+b)x=ab$$

dolayısıyla da

$$x=\frac{a\cdot b}{a+b}$$

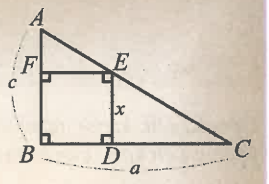
bulunur.

28.
ABC bir dik üçgen
BDEF bir kare
$|AB|=4$ br
$|BC|=6$ br
$|DE|=x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2,6 **B)** 2,4 C) 2,2 D) 2 E) 1,8

29.
ABC bir dik üçgen
$AB\perp BC$
BDEF bir kare
$|AB|=c$ br
$|BC|=a$ br
$|ED|=x$ br

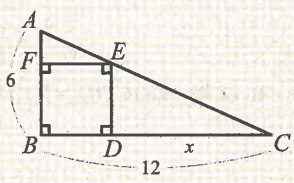


olduğuna göre a, c, x arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ B) $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$ C) $x=\frac{a+c}{a\cdot c}$

D) $x=\frac{2ac}{a+c}$ **E)** $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BDEF bir kare
$|AB|=6$ br
$|BC|=12$ br
olduğuna göre
$|DC|=x$ *kaç* br *dir?*



A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm: $|BD|$ ve $|ED|$ değerlerini x cinsinden yazıp *EDC* ve *ABC* üçgenlerinin benzerliğinden faydalanarak soruyu çözmek mümkün ama onları yapacak yerlerimiz ağrıyor! Bakın yukarda çıkardığımız formül sayesinde nasıl da suya sabuna dokunmadan cevabı bulacağız.

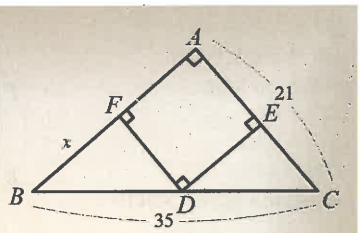
Karenin bir kenarının uzunluğu

$$\frac{6\cdot 12}{6+12}=\frac{72}{18}=4$$

birim olduğundan $x=12-4=8$ olarak bulunur.

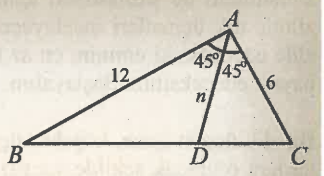
Doğru cevap: D.

30.
$[ABC]$ bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AFDE$ bir kare
$|BC| = 35$ br
$|CA| = 21$ br
olduğuna göre
$|FB| = x$ **kaç br dir?**



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 **E)** 16

31.
$[ABC]$ bir üçgen
$m(BAD) = 45°$
$m(CAD) = 45°$
$|AB| = 12$ br
$|AC| = 6$ br
$|AD| = n$ br
olduğuna göre n **kaçtır?**

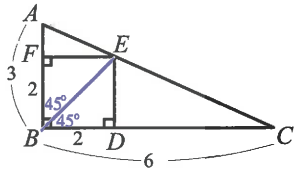


A) 4 B) $3\sqrt{2}$ **C)** $4\sqrt{2}$ D) 6 E) 8

Örnek. *Dik kenar uzunlukları* 3 br *ve* 6 br *olan bir dik üçgenin en kısa iç açıortayının boyu kaç* br *dir?*

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 3

Çözüm: En kısa iç açıortayın en uzun kenara giden olduğunu biliyoruz. O halde hipotenüse inen iç açıortayın boyunu aradığımızı unutmayın.



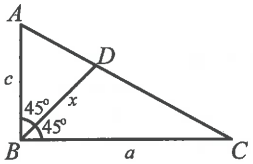
Bu iç açıortayın hipotenüsü kestiği nokta E olsun. E'den dik kenarlar dikmeler inerseniz, $[BE]$'nin aslında meşhur karemizin köşegeni olduğunu anlarsınız. Karenin bir kenar uzunluğu

$$\frac{3\cdot 6}{3+6} = \frac{18}{9} = 2$$

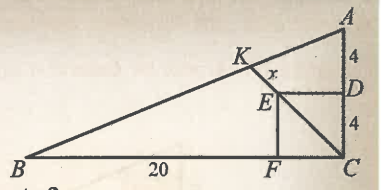
birim olduğundan $|BE| = 2\sqrt{2}$ br olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Uyarı. Dik üçgende, dik açıya ait iç açıortayın boyunu bulmanın çoğu zaman sevimsiz rakamlar içerdiğini biliriz. Problem kolaydır ama işlemler adamı çıldırtır. İşte yukarda kanıtladığımız bu eşitlik sayesinde o sevimsiz eşitliklerden kurtulmuş oluruz. Dik kenar uzunlukları a br ve c br olan bir dik üçgenin dik açısına ait açıortayın boyu, bahsi geçen karenin köşegen uzunluğuna eşittir. Yani; $x = \frac{a\cdot c}{a+c}\sqrt{2}$ dir.

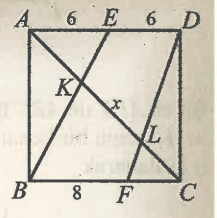


32.
$[ABC]$ bir dik üçgen
$CDEF$ bir kare
$CE \cap AB = \{K\}$
$|AD| = |DC| = 4$ br
$|BF| = 20$ br
$|KE| = x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



A) $6-4\sqrt{2}$ B) $8-4\sqrt{2}$ C) $10-4\sqrt{2}$ **D)** $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

33.
$[ABCD]$ bir kare
$[AC]$ köşegen
$BE \cap AC = \{K\}$
$DF \cap AC = \{L\}$
$|AE| = |ED| = 6$ br
$|BF| = 8$ br
olduğuna göre $|KL| = x$ **kaçtır?**

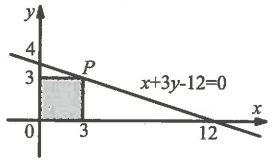


A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) 6 E) 8

Örnek. *P noktası* $x + 3y - 12 = 0$ *doğrusu üzerinde olup dik koordinat sisteminin birinci bölgesindedir. Bu noktanın eksenlere uzaklıkları birbirlerine eşit olduğuna göre P noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (1, 1) B) (2, 2) C) (3, 3) D) (4, 4) E) (5, 5)

Çözüm: Hemen bir dik koordinat sistemi ardından da doğruyu çizelim. Doğruyu nasıl mı çizeceğiz? x'e 0 verirseniz doğrunun Oy eksenini kestiği noktayı, y'ye 0 verirseniz de doğrunun Ox eksenini kestiği noktayı bulursunuz.



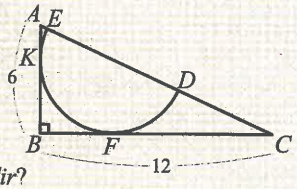
Söylenenler yapılınca bu noktaların (12, 0) ve (0, 4) olduğu çıkıyor. Diğer yandan P noktasının eksenlere olan uzaklıklarının eşit olması, P'nin şekildeki karenin sağ üst köşesi olması demektir. Karenin bir kenar uzunluğu

$$\frac{4\cdot 12}{4+12} = \frac{48}{16} = 3 \text{ br}$$

olduğundan P'nin koordinatları (3, 3) olmalıdır.

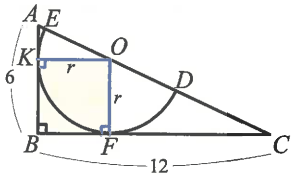
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$ *ve* $[ED]$ *çap*
K ve F değme noktaları
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre yarım çemberin yarıçapı kaç br *dir?*



A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

Çözüm: Yarım çemberin merkezine O diyelim.



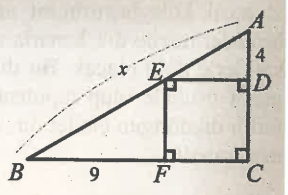
$OK \perp AB$ ve $OF \perp BC$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda çemberin yarıçapı demek, $BFOK$ karesinin bir kenarı demek olur. Çemberin yarıçapına r br dersek

$$r = \frac{6\cdot 12}{6+12} = \frac{72}{18} = 4$$

olarak bulunur.

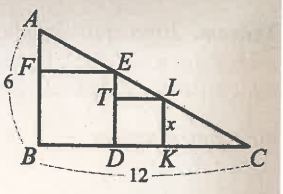
Doğru cevap: C.

34.
ABC bir dik üçgen
EFCD bir kare
$|AD| = 4$ br
$|BF| = 9$ br
olduğuna göre
$|AB| = x$ **kaç br dir?**



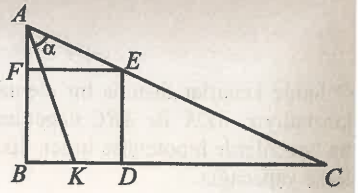
A) $13\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{17}$ C) 17 D) 20 E) $5\sqrt{13}$

35.
ABC bir dik üçgen
BDEF ve *DKLT* birer kare
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre
$|LK| = x$ **kaç br dir?**



A) 2 B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 3

36.
ABC dik üçgen
BDEF bir kare
$|AF| = |BK| = |KD|$
olduğuna göre
$m(CAK)$ **kaç derecedir?**



A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 60 E) 67,5

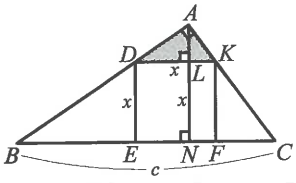
Bu kadar örnekten sonra bulduğumuz formülün işlerimizi nasıl kolaylaştırdığını anlamış olmalısınız. Şimdiki örneklerimizde dik kenarlara değil de hipotenüse oturan karelerle ilgili olacak. Bir dik üçgenin içine, köşeleri üçgenin üstünde olup hipotenüse oturacak şekilde sonsuz farklı dikdörtgen çizilebilir. Fakat bunlardan sadece 1 tanesi karedir.



Şimdi bu kareye odaklanacağız. Bu karenin bir kenar uzunluğunu bulmak yukardaki kadar kolay olmayacak ama bir kere formülü çıkardık mı artık rahat edeceğiz. Hemen ilgili teoremi verip kanıtlayalım.

Teorem. *Hipotenüs uzunluğu c br, hipotenüse ait yüksekliği nin uzunluğu h br olan bir dik üçgenin içine hipotenüse oturacak şekilde çizilebilecek en büyük karenin bir kenar uzunluğu* $\frac{c\cdot h}{c+h}$ *br dir.*

Kanıt: *ABC* dik üçgenine benzer olan *ADK*, *EBD* ve *FKC* üçgenlerinin hiçbirinde iki kenar uzunluğu bilinmediğinden, dik kenarlar üzerine oturan karenin bir kenar uzunluğunu bulurken kullandığımız tekniği burada kullanamayız.



O halde kenarlar dışında bir elemanı kullanarak eşleme kurmalıyız. *ADK* ile *ABC* üçgenleri benzer olduğundan bu üçgenlerde hipotenüse inilen dikmeler arasında bir eşleme yapacağız.

ADK dik üçgeninin hipotenüsüne inen yüksekliğinin boyu $h-x$ br olduğundan eşleme kurulursa

$$\frac{x}{c}=\frac{h-x}{h}$$

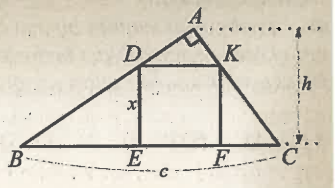
$$xh=ch-cx$$

$$xh+cx=ch$$

$$(c+h)x=ch$$

eşitliğinden $x=\frac{c\cdot h}{c+h}$ olduğu kanıtlanmış olur.

37.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
DEFK bir kare
$|DE| = x$ br
$|BC| = c$ br

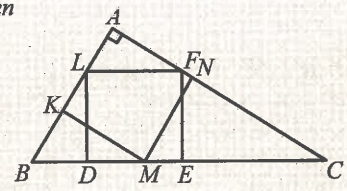


***A* köşesinin *BC* doğrusuna uzaklığı *h* br olduğuna göre *x*, *c*, *h* arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x=\frac{1}{c}+\frac{1}{h}$ B) $\frac{1}{x}=\frac{1}{h}-\frac{1}{c}$ C) $x=\frac{c+h}{c\cdot h}$

D) $x=\frac{2c}{c+h}$ E) $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}+\frac{1}{h}$

Örnek. *ABC dik üçgen*
AKMN bir kare
DEFL bir kare
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 4$ br
olduğuna göre büyük karenin bir kenar uzunluğu küçük karenin bir kenar uzunluğundan kaç br *fazladır?*



A) $\frac{20}{259}$ B) $\frac{21}{259}$ C) $\frac{22}{259}$ D) $\frac{23}{259}$ E) $\frac{24}{259}$

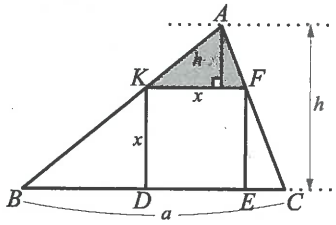
Çözüm: Karelerin hangisi büyük, hangisi küçük şekle bakarak anlaşılmıyor. Biz en iyisi her iki karenin de bir kenar uzunluğunu bulalım. O zaman büyük küçük belli olur.

AKMN karesinin bir kenar uzunluğu $|AB| = 3$ br ve $|AC| = 4$ br olduğundan $\frac{3\cdot 4}{3+4}=\frac{12}{7}$ br dir.

DEFL karesinin bir kenar uzunluğu da $|BC| = 5$ br ve *BC*'ye inen yüksekliğin boyu 2,4 br diye $\frac{5\cdot 2{,}4}{5+2{,}4}=\frac{12}{7{,}4}=\frac{60}{37}$ br dir. Bu durumda karelerin kenarlarının farkı $\frac{12}{7}-\frac{60}{37}=\frac{24}{259}$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Aslında bu son teorem sadece dik üçgene özgü değildir. Biz teoremi kanıtlarken üçgenlerin benzer olduğunu dik üçgenden faydalanarak bulmadık ki... Dikliği sadece yüksekliğin boyunu bulurken kullandık. O halde bir kenarının ve o kenara inen yüksekliğinin boyu bilinen her üçgende, yüksekliğin indiği kenara oturan ve köşeleri üçgen üstünde olan bir karenin bir kenarının boyu hesaplanabilir. Hesaplayalım bakalım nasıl bir şey çıkıyor?



AKF ile ABC benzer olduğundan

$$\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}$$

$$xh=ah-xa$$

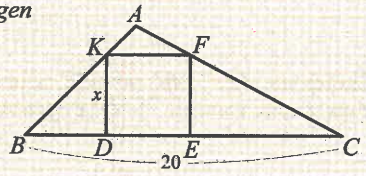
$$xa+xh=ah$$

$$x=\frac{ah}{a+h}$$

Demek ki genel kural şuymuş:

Bir üçgenin herhangi bir kenarı üzerine dört köşesi de üçgenin üstünde olacak şekilde bir kare çizilirse o karenin bir kenarının boyu, karenin oturduğu kenarın boyuyla o kenara ait yüksekliğin boyunun çarpımı bölü toplamıdır.

Örnek. *ABC bir üçgen*
DEFK bir kare
Alan(ABC) = 50 br^2
$|BC| = 20$ br
olduğuna göre
$|KD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Karenin oturduğu kenarın uzunluğu belli olduğuna göre o kenara yani BC kenarına ait yüksekliğin boyu lazım bize. O yüksekliğin boyuna h br diyelim.

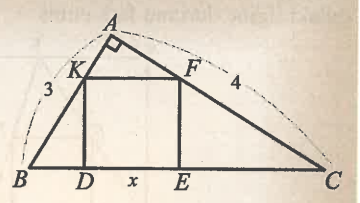
$\frac{20\cdot h}{2}=50$ olduğundan $h = 5$ olmalıdır. Şimdi formülümüzü uygulayabiliriz:

$$x=\frac{20\cdot 5}{20+5}=\frac{100}{25}=4$$

olmalıdır.

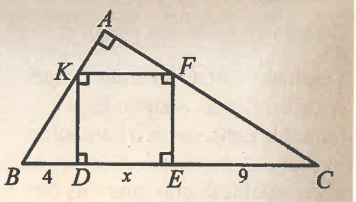
Doğru cevap: D.

38.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$DEFK$ bir kare
$|AB| = 3$ br
$|CA| = 4$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



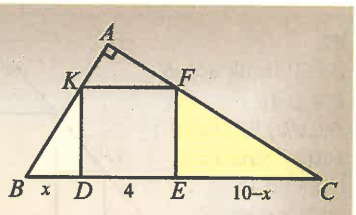
A) $\frac{48}{37}$ B) $\frac{50}{37}$ C) $\frac{52}{37}$ D) $\frac{56}{37}$ E) $\frac{60}{37}$

39.
ABC dik üçgen
$CA \perp AB$
$DEFK$ bir kare
$|BD| = 4$ br
$|EC| = 9$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



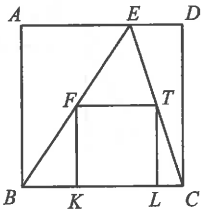
A) 5 B) 6 C) $4\sqrt{2}$ D) 7 E) 8

40.
ABC dik üçgen
$CA \perp AB$
$DEFK$ bir kare
$|BD| = x$ br
$|DE| = 4$ br
$|EC| = 10 - x$ br
olduğuna göre $\frac{\text{Alan}(KBD)}{\text{Alan}(FEC)}$ **kaçtır?**



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{16}$

Ankara'dan Suat Karadağ hocamız bu kuralla ilgili aşağıdaki ilginç durumu fark etmiş:



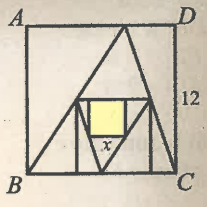
E ∈ AD ise küçük karenin bir kenarı, daima büyük karenin bir kenarının yarısına eşittir.

Neden böyle olduğunun izahı çok kolay... *EBC* üçgeninin taban uzunluğuyla, o tabana ait yüksekliğinin aynı uzunlukta olmasında yatıyor nedeni. $|BC| = a$ br olsun. Bu durumda *KLFT* karesinin bir kenarının uzunluğu

$$\frac{a \cdot a}{a+a} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} \text{ br}$$

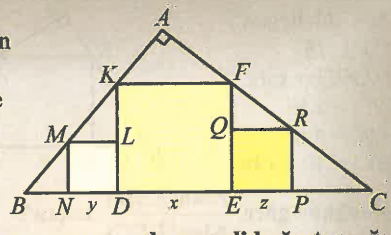
olmalıdır.

41.
Şekildeki *ABCD* karesinin içine önce bir üçgen, sonra o üçgen içine bir kare, sonra o kare içine bir üçgen, son olarak da o üçgen içine şekildeki gibi taranmış bir kare çizilmiştir. **$|CD| = 12$ br olduğuna göre en küçük karenin bir kenarının boyu olan x kaçtır?**



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

42.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
DLMN, *EFKD* ve *PRQE* birer kare
$|DE| = x$ br
$|ND| = y$ br
$|EP| = z$ br
olduğuna göre x, y ve z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

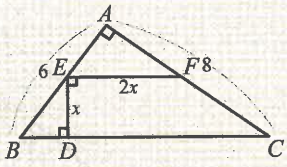


A) $x = y + z$ B) $x = yz$ C) $x^2 = yz$

D) $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ E) $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

Dik üçgen içine sadece kare değil, dikdörtgen de yerleştirilebilir. Dikdörtgen dışında kalan üç dik üçgen hem kendi aralarında hem de en büyük dik üçgenle benzer olur. Şimdi buna özgü bazı problemler çözüp, alıştırmalara geçeceğiz.

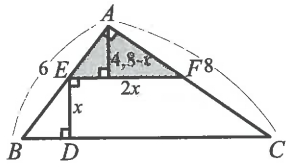
Örnek. *ABC bir üçgen*
$CA \perp AB$
$DE \perp EF$
$|BA| = 6$ br
$|AC| = 8$ br
$|EF| = 2 \cdot |ED| = 2x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\frac{240}{49}$ B) $\frac{120}{49}$ C) $\frac{100}{49}$ D) $\frac{60}{49}$ E) $\frac{40}{49}$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz. Seçim size kalmış.

Birinci yol. *AEF* ve *ABC* üçgenlerinin benzer olduklarını biliyoruz.

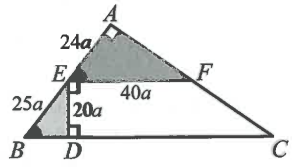


Bu üçgenlerin hipotenüsleri ve hipotenüslerine inen dikmeleri arasında eşleme kuracağız. $|BC| = 10$ br ve *BC*'ye inen yüksekliği boyu 4,8 br olduğundan

$$\frac{4{,}8 - x}{2x} = \frac{4{,}8}{10}$$

eşitliğinden $x = \frac{120}{49}$ bulunur.

İkinci yol. *AEF*, *ABC* ve *DBE* üçgenlerinin benzerliğine dikkat edin. Her biri $3k$-$4k$-$5k$ üçgenidir.



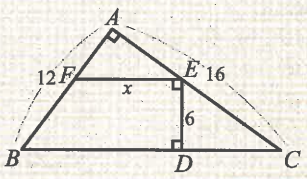
Kolaylık açısından $x = 20a$ olsun. O zaman $|BE| = 25a$ br ve $|EA| = 24a$ br olur.

$$|BA| = 49a = 6$$

eşitliğinden $a = \frac{6}{49}$ ve $x = 20a = \frac{120}{49}$ olur.

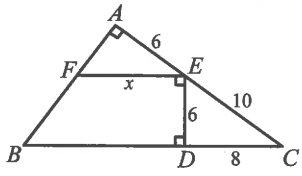
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
CA ⊥ AB
DE ⊥ EF
|DE| = 6 br
|BA| = 12 br
|AC| = 16 br
olduğuna göre AFE üçgeninin çevresi kaçtır?



A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

Çözüm: *CDE* ile *CAB* üçgenleri benzerdir. O halde *CDE* bir 6-8-10 üçgenidir. Buradan *|AE| = 6 br* çıkar.



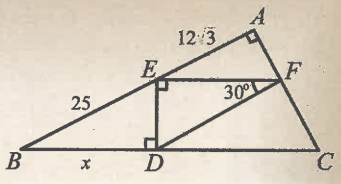
AFE üçgeni de *ABC* üçgenine benzerdir. Unutmayınız ki; çevreler oranı benzerlik oranındadır. O halde benzerlik oranı $\frac{6}{16}$'dır.

$$\frac{6}{16} = \frac{Ç(AFE)}{48}$$

olduğundan Çevre(*AFE*) = 18 br bulunur.

Doğru cevap: C.

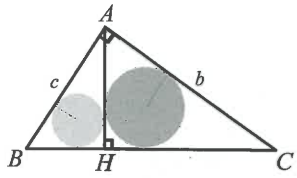
43.
ABC bir dik üçgen
BA ⊥ AC
FE ⊥ ED
ED ⊥ BC
m(DEF) = 30°
|AE| = 12√3 br
|BE| = 25 br
olduğuna göre *|BD| = x* kaç br dir?



A) 15 B) 17 C) 18 **D) 20** E) 24

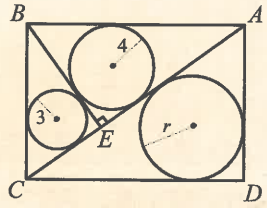
Benzerlik dersine girdiğimizden beri hep kenar uzunlukları arasında eşleme yapmıştık. Bu konuda ilk defa yükseklikler arasında benzerlik kurduk. Son örnekte de fark ettiyseniz iki üçgenin çevreleri arasında eşleme yaptık. Zira, hani dersin başında da anlattığımız üzere, büyütecin büyüttüğü her elemanla eşleme kurulabilir. Örneğin bir üçgenin içine üç kenara da teğet olacak şekilde bir çember çizin. Sonra bu üçgene büyüteçle bir bakın. Üçgen büyürken çember de büyür değil mi? Onun için benzer iki üçgenin iç teğet çemberlerinin yarıçap uzunlukları da benzerlik oranındadır diyebiliriz. Hatta çevrel çemberleri de. Ekteki teoremimiz bu konuyla ilgili.

Teorem. *BAC dik üçgeninin A köşesine ait AH yüksekliği çiziliyor. Oluşan AHB ve AHC dik üçgenlerinin iç çember yarıçaplarının oranı, BAC dik üçgeninin dik kenarlarının oranındadır.*



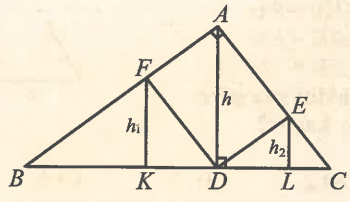
Kanıt: *AHB* ve *CHA* dik üçgenleri benzerdir. Benzer üçgenlerin iç çember yarıçaplarının oranı da benzerlik oranındadır. Hipotenüsler oranı *b/c* olduğundan yarıçaplar oranı da $\frac{b}{c}$ olur.

44.
ABCD bir dikdörtgen
[AC] köşegen
BE ⊥ AC
BEC ve *BEA* üçgenlerinin iç çemberlerinin yarıçapları sırasıyla 3 br ve 4 br olduğuna göre *ADC* üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı *r* kaç birimdir?



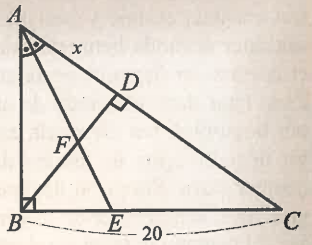
5

45.
ABC bir dik üçgen
AFDE bir dikdörtgen
CA ⊥ AB, AD ⊥ BC
FK // AD // EL
|AD| = h br
|FK| = h₁ br
|EL| = h₂ br
olduğuna göre *h*'nin *h₁* ve *h₂* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



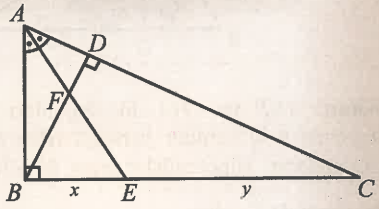
$h_1 + h_2$

46.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$BD \perp CA$
$2\cdot|AF| = 3\cdot|FE|$
AE iç açıortay
$|BC| = 20$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



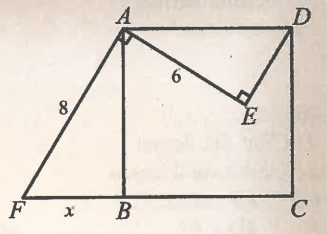
A) 16 B) 12 C) 11 D) 10 **E)** 9

47.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$BD \perp CA$
$3\cdot|AF| = 2\cdot|FE|$
AE iç açıortay
$|BE| = x$ br
$|EC| = y$ br
olduğuna göre x/y oranı kaçtır?



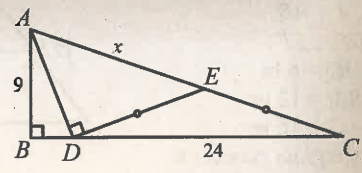
A) 2/5 B) 1/3 C) 3/5 D) 3/7 E) 5/13

48.
$ABCD$ bir kare
F, B, C doğrudaş
$FA \perp AE$
$AE \perp ED$
$|FA| = 8$ br
$|AE| = 6$ br
$|FB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



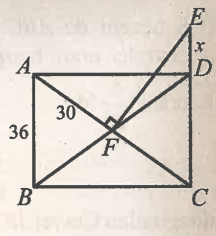
A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 5 E) 6

49.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$AD \perp DE$
$|ED| = |EC|$
$|AB| = 9$ br
$|DC| = 24$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



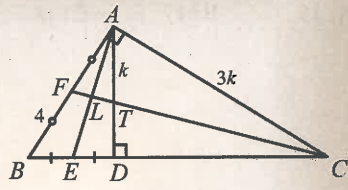
A) 15 **B)** $\sqrt{250}$ C) 16 D) $\sqrt{288}$ E) 17

50.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$AC \cap BD = \{F\}$
C, D, E doğrudaş
$AF \perp FE$
$|AB| = 36$ br
$|AF| = 30$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 18 B) 16 C) 15 **D)** 14 E) 13

51.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$CF \cap AE = \{L\}$
$|AF| = |FB|$
$|BE| = |ED|$
$|FB| = 4$ br
$|AC| = 3\cdot|AT| = 3k$ br
olduğuna göre $|EC|$ kaç br dir?



A) 10 **B)** 12 C) 14 D) 16 E) 18

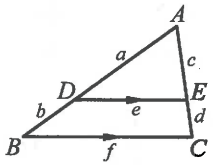
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Tales Teoremi

A-A-A benzerliklerinin en önemli sonuçlarından birine geldi sıra. Tüm benzerlik dersi hatta bundan sonraki tüm geometri dersleri boyunca kullanılacak olan bu teoremi adamakıllı öğrenmeniz tavsiye edilir.

Öncelikle birkaç dakikalığına iki başlık önceki konuya gideceğiz. A.A. benzerliğine...



Yukarıdaki gibi bir ABC üçgeninde, DE doğrusu BC kenarına paralelse ADE ile ABC üçgenlerinin benzer olduklarını ve bu durumun, uzunluklar şekildeki gibi harflendirilirse;

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{f}$$

bağıntısını doğurduğunu anlatmıştık. Bu eşitliklerin ilkinde içler-dışlar çarpımı yapılıp birbirlerine eşitlenirse $a\cdot d = b\cdot c$, diğer bir deyişle

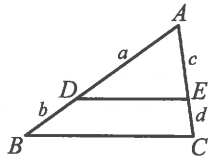
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

eşitliği elde edilir. İşte bu sade eşitlik, üçgenlerde **Tales teoremi** diye bilinir.

Teoremin anlatmak istediği şudur:
Bir üçgenin iki kenarını, üçüncü kenara paralel olacak şekilde kesen bir doğru, birinci kenarı hangi oranda böldüyse, ikinci kenarı da o oranda böler!

Bu teoremi, bir önceki eşitlikten dolayı
'Çaprazların çarpımı eşittir'
diye de akılda tutabilirsiniz, son eşitlikten dolayı
'Soldakilerin oranı sağdakilerin oranına eşittir'
diye de...

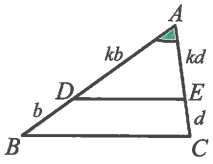
Tales Teoremi'nin Karşıtı. Acaba Tales Teoremi'nin karşıtı doğru mudur?



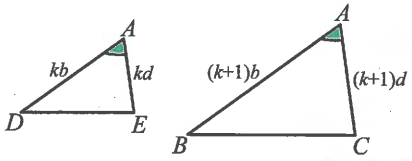
Yani; *yukarıdaki şekilde* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *ise* $DE \parallel BC$ *midir?*

Şimdi bu soruya cevap arayacağız. Başlıyoruz.

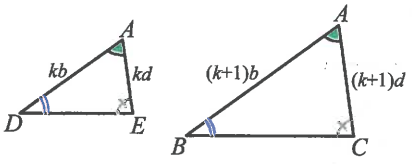
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ diyelim. O halde $a=kb$ ve $c=kd$ olur. Buna göre şeklimizi tekrar çizelim.



ADE ile ABC üçgenlerine odaklanırsak,



yukarıdaki şekillerden de görüleceği üzere, her iki üçgende de A açıları ortakken yan kenarlarının oranı b/d olduğundan K.A.K. benzerliği gereğince benzerlerdir. Madem benzerler o halde iç açıları aynı ölçüde olmalıdırlar.

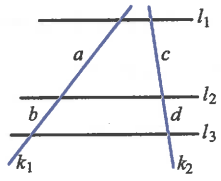


ADE ile ABC açılarının eşit ölçülü olmaları $DE \parallel BC$ anlamına gelir. Demek ki teoremin karşıtı da doğruymuş!

Aslında Tales Teoremi denen teorem daha genel bir durumu içermektedir. Biz sadece üçgenler için uyarlamasını verdik. Şimdi genel haline bir bakalım.

Teorem [Tales]. *Verilen iki farklı doğruyu kesen paralel doğrular, bu iki doğru üzerinde orantılı doğru parçaları ayırır.*

Şekille gösterelim:

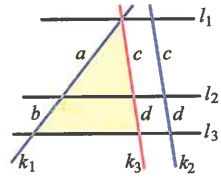


Verilen doğrular k_1 ve k_2 olsun. k_1 ve k_2 doğrularını, birbirlerine paralel olan l_1, l_2 ve l_3 doğruları kessin. Oluşan doğru parçalarının boyları şekildeki gibiyse, teoremin dediği;

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

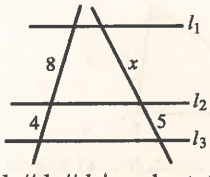
olur.

Kanıt: k_1 ile l_1'in kesişim noktasından geçip k_2 doğrusuna bir paralel çizelim. (Şekildeki k_3 doğrusu)



Böylelikle genel teoremi, üçgenler için verdiğimiz Tales teoremine dönüştürmüş olduk ki, bunu da kanıtlamıştık.

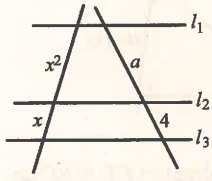
1.



$l_1 // l_2 // l_3$ ise x kaçtır?

10

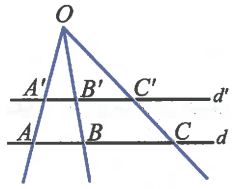
2.



$l_1 // l_2 // l_3$ ise x kaçtır?

4x

Teorem. *İki paralel doğrunun biri üzerinde A, B, C noktaları diğeri üzerinde A′, B′, C′ noktaları alınıyor.* $|AB| \neq |A'B'|$ *iken* $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|BC|}{|B'C'|}$ *ise AA′, BB′, CC′ doğruları noktadaştır.*



Kanıt: $|AB| \neq |A'B'|$ iken AA' ve BB' doğruları kesişirler. Kesiştikleri nokta O olsun. Tales Teoremi gereği

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}$$

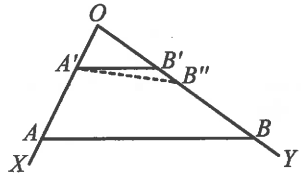
olur. Diğer yandan BB' ve CC' doğruları da bir O' noktasında kesişsinler. Yine Tales Teoremi gereği

$$\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{|O'B|}{|O'B'|}$$

olur. O halde $\frac{|OB|}{|OB'|}=\frac{|O'B|}{|O'B'|}$ diye $O'=O$ olmalıdır.

Teorem. *Dik veya geniş olan bir XOY açısı ile OX üzerinde A ve A′ gibi iki nokta, OY üzerinde de B ve B′ gibi iki nokta veriliyor. Eğer* $\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|OA|}{|OA'|}$ *ise A′B′ // AB.*

Kanıt: A' noktasından AB ye bir paralel çizelim. Bunun OY'yi kestiği nokta B'' olsun.



Tales Teoremi gereği

$$\frac{|AB|}{|A'B''|}=\frac{|OA|}{|OA'|}$$

olur. Öte yandan hipoteze göre

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|OA|}{|OA'|}$$

imiş. Öyleyse

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|AB|}{|A'B''|}$$

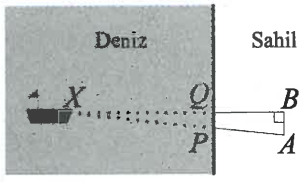
olur ve buradan $|A'B''| = |A'B'|$ bulunur. Halbuki XOY açısı dik veya geniş varsayıldığından A' noktasından OY'ye $|A'B''|$ uzunluğunda bir tek eğik çizgi çizilebilir. Şu halde $A'B'$ ile $A'B''$ çakışıktır yani $A'B' // AB$ olmalıdır.

Tales Teoremi deyip geçmeyin. Geometrinin en temel teoremlerindendir. Olmazsa olmazlardan yani. Ne işime yarar da demeyin. Yarar! Belki hayatınızı kurtarmaz ama hayatınızı kolaylaştıracağı kesin.

Bu teorem sayesinde, ne bileyim, vakitten tasarruf sağlarsın. Hatta eğer marangozsan daha çok kazandırır. Çünkü mümkün olduğunca az fire verirsin. Eğer olur olmadık her şeyi merak eden biriysen, özellikle de uzunlukları, içinde bulunduğun odadan çıkmadan oda dışında olsa bile gözünün gördüğü her iki nesne arasındaki uzaklığı bulabilirsin.

Örneğin, sıcak bir yaz günü sahilde güneşlenirken durduk yere denizde gördüğün geminin kıyıya kaç metre uzaklıkta olduğunu merak ettin. Tales Teoremi'ni bilmek ve bir küçük cetvel (ya da uzunluğunu bildiğin herhangi bir şey, adımın da olabilir) buna yeter. Hem de yüzme bilmesen bile.

Nasıl mı?



Üstteki şekilden takip edin.

A noktasına duruyorsun. X noktasında da bir gemi demir atmış duruyor. Bulunduğun yerden dümdüz gemiye doğru ilerle. P noktasına gelince, kıyı boyunca, ta ki Q'ye kadar git. Q geminin kıyıya en yakın olduğu yer. Sonra B'ye sonra da A'ya. Tabi bu arada $|AP|$, $|PQ|$, $|QB|$ ve $|BA|$ mesafelerini de ölçtüğünü unutma. XQP ile XBA üçgenlerinin benzerliğine dikkat!

$$\frac{|XQ|}{|QP|}=\frac{|XQ|+|QB|}{|BA|}$$

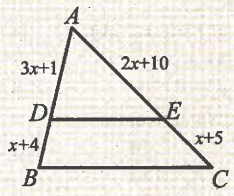
eşitliğiyle geminin kıyıya en kısa uzaklığı $|XQ|$ bulunabilir. Hatta

$$\frac{|XQ|}{|QB|}=\frac{|XP|}{|PA|}$$

eşitliği ile senin gemiyle arandaki mesafe de bulunabilir.

Aynı metotla odanızdan çıkmadan karşı apartmanın sizin odaya olan uzaklığını da bulabilirsiniz. Ne bileyim, ağaca çıkmadan ağacın boyunu da. Mısır'a gidersen, piramidin boyunu da ☺ Yeter ki iste!

Örnek. *ABC bir üçgen*
DE // BC
$|AD| = 3x + 1$ br
$|DB| = x + 4$ br
$|AE| = 2x + 10$ br
$|EC| = x + 5$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) −7 B) −5 C) 3 D) 5 E) 7

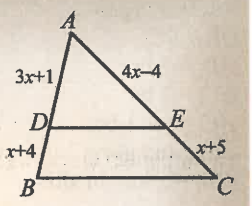
Çözüm: $DE \,//\, BC$ olduğundan Tales teoremini kullanmalıyız. 'Çaprazların çarpımı eşittir'den gidelim.

$$(3x + 1)(x + 5) = (2x + 10)(x + 4)$$
$$3x^2 + 16x + 5 = 2x^2 + 18x + 40$$
$$x^2 - 2x - 35 = 0$$
$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

bulunur ki, uzunluk dediğin şey negatif olamayacağından $x = 7$ olduğunu söyleriz.

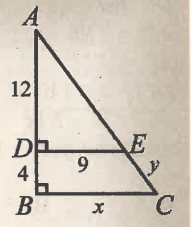
Doğru cevap: E.

3.
ABC bir üçgen
DE // BC
$|AD| = 3x + 1$ br
$|DB| = x + 4$ br
$|AE| = 4x - 4$ br
$|EC| = x + 5$ br
olduğuna göre x kaçtır?



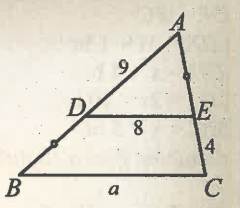
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 **E) 7**

4.
ABC bir dik üçgen
AB ⊥ BC, AD ⊥ DE
$|AD| = 12$ br
$|DB| = 4$ br
$|DE| = 9$ br
$|BC| = x$ br
$|EC| = y$ br
olduğuna göre x + y toplamı kaçtır?



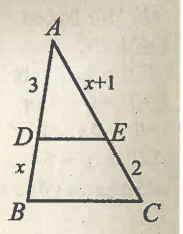
A) 12 B) 14 C) 15 **D)** 17 E) 18

5.
ABC bir üçgen
$DE \,//\, BC$
$|AE| = |DB|$
$|AD| = 9$ br
$|DE| = 8$ br
$|EC| = 4$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre $3a$ kaçtır?



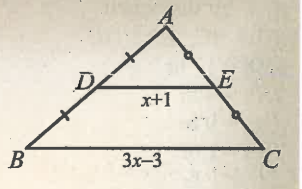
A) 40 B) 41 C) 44 D) 46 E) 50

6.
ABC bir üçgen
$DE \,//\, BC$
$|AD| = 3$ br
$|EC| = 2$ br
$|AE| = x+1$ br
olduğuna göre
$|DB| = x$ kaç br dir?



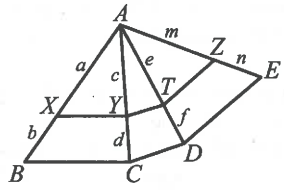
A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

7.
ABC bir üçgen
$|AD| = |DB|$
$|AE| = |EC|$
$|DE| = x+1$ br
$|BC| = 3x-3$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Bazen Tales teoremini iki veya daha çok üçgeni birbirine yapıştırıp kullandırmak isterler.



Örneğin yukardaki şekilde $XY \,//\, BC$, $YT \,//\, CD$ ve $TZ \,//\, DE$ olsun. Yan kenar uzunlukları da şekilde verildiği gibi olsun.

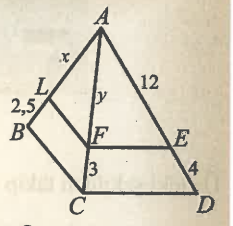
ABC üçgeninde Tales teoreminden $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

ACD üçgeninde Tales teoreminden $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$,

ADE üçgeninde Tales teoreminden $\frac{e}{f} = \frac{m}{n}$

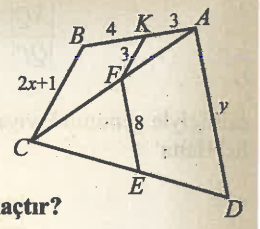
yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{m}{n}$ olur. Yapıştırmalara devam edilirse örümcek ağı çıkacağını fark ettiniz mi?

8.
$ABCD$ bir dörtgen
$LF \,//\, BC$ ve $FE \,//\, CD$
$|AE| = 12$ br
$|ED| = 4$ br
$|BL| = 2{,}5$ br
$|CF| = 3$ br
$|AL| = x$ br
$|AF| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?



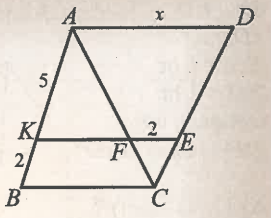
A) 15 B) 15,5 C) 16 **D)** 16,5 E) 17

9.
$ABCD$ bir dörtgen
$KF \,//\, BC$ ve $FE \,//\, AD$
$|AK| = |FK| = 3$ br
$|BK| = 4$ br
$|EF| = 8$ br
$|BC| = 2x+1$ br
$|AD| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?



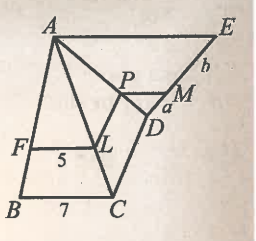
A) 15 B) 15,5 C) 16 D) 16,5 **E)** 17

10.
$ABCD$ bir dörtgen
$AD \,//\, KE \,//\, BC$
$|AK| = 5$ br
$|BK| = 2$ br
$|EF| = 2$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç br dir?



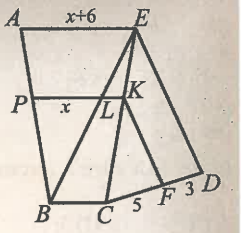
A) 5 B) 6 **C)** 7 D) 8 E) 9

11.
$FL \,//\, BC$
$LP \,//\, CD$
$PM \,//\, AE$
$|FL| = 5$ br
$|BC| = 7$ br
$|DM| = a$ br
$|EM| = b$ br
olduğuna göre $\frac{a}{b}$ kaçtır?



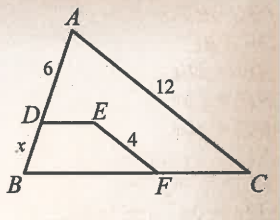
A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 **D)** 0,4 E) 0,5

12.
$AE \,//\, PK \,//\, BC$
$KF \,//\, ED$
$|CF| = 5$ br
$|FD| = 3$ br
$|AE| = x + 6$ br
$|PL| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



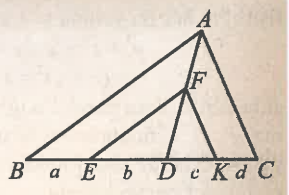
A) 5 B) 7 C) 8 **D)** 10 E) 16

13.
ABC bir üçgen
E iç bölgede bir nokta
$DE \,//\, BC$
$EF \,//\, AC$
$|EF| = 4$ br
$|AC| = 12$ br
$|AD| = 6$ br
$|DB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



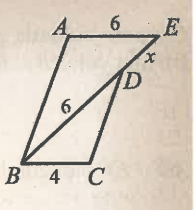
A) 2 B) 2,5 **C)** 3 D) 3,5 E) 4

14.
ABC bir üçgen
$F \in [AD]$
$FE \,//\, AB$
$FK \,//\, AC$
$|BE| = a$ br
$|ED| = b$ br
$|DK| = c$ br
$|KC| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



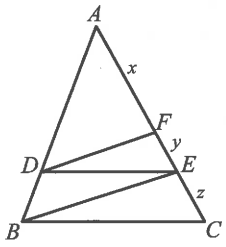
A) $ac = bd$ B) $ad = bc$ C) $ab = cd$
D) $a + c = b + d$ E) $a + d = b + c$

15.
$AE \,//\, BC$
$AB \,//\, DC$
B, D, E doğrudaş
$|BC| = 4$ br
$|BD| = 6$ br
$|AE| = 6$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 2,5 **C)** 3 D) 3,5 E) 4

Teorem. *ABC bir üçgen*
DE // BC
DF // BE
$|AF| = x$ br
$|FE| = y$ br
$|EC| = z$ br
ise $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{z}$.



Kanıt: Her paralellik için bir Tales teoremi yazacağız.

$$\frac{x}{y} = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{x+y}{z}$$

olduğundan kanıt biter.

Ek: Formül meraklıları için yukardaki eşitliği şu şekilde ezberlemeye hazır hale getirebiliriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{z}$$

$$x \cdot y + y^2 = x \cdot z$$

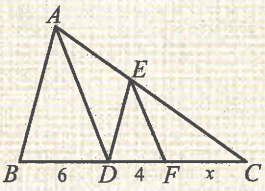
Eşitliğin her iki yanına $x^2 + x \cdot y$ ekleyelim.

$$y^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot y = x \cdot z + x^2 + x \cdot y$$

$$(x+y)^2 = x \cdot (x+y+z)$$

elde edilir. Yani paralel doğruların baktığı köşeyi tutuyoruz. *F*, *E*, *C* noktalarına birinci, ikinci, üçüncü nokta diyelim. O halde *ikinci noktaya kadar olan uzaklığın karesi, birinci noktaya kadar olan uzaklık çarpı üçüncü noktaya kadar olan uzaklıktır.*

Örnek. *ABC bir üçgen*
AB // ED ve AD // EF
$|BD| = 6$ br
$|DF| = 4$ br
olduğuna göre
$|FC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Yukarda gösterdiğimiz iki yoldan da çözelim.
Birinci yol. *AB // ED* olduğundan Tales teoremi gereği

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{x+4}{6},$$

AD // EF olduğundan yine Tales teoremi gereği

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{x}{4}$$

olmalıdır. $\frac{x+4}{6} = \frac{x}{4}$ olduğundan $x = 8$ bulunur.

İkinci yol. Hemen bulduğumuz formülü uygulayacağız ama önce hangi köşeyi tutmamız gerektiğini anlamalıyız. Paralellerin baktığı köşe *C* olduğundan *C*'yi tutacağız.

$$(x+4)^2 = x \cdot (x+10)$$

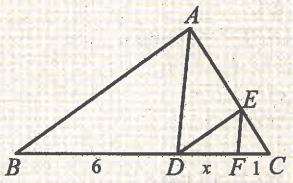
$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 10x$$

$$2x = 16$$

eşitliğinden $x = 8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AB // ED
AD // EF
$|BD| = 6$ br
$|FC| = 1$ br
olduğuna göre
$|DF| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Yine *C* köşesini tutarak formülü uygulayalım:

$$(x+1)^2 = 1 \cdot (x+7)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x + 7$$

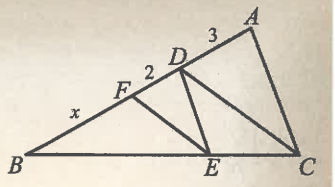
$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

eşitliğinden $x = 2$ olarak bulunur.

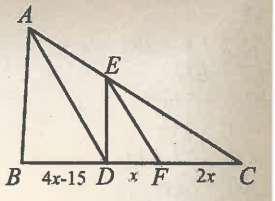
Doğru cevap: B.

16.
ABC bir üçgen
AC // DE ve *CD // EF*
$|AD| = 3$ br
$|DF| = 2$ br
olduğuna göre
$|FB| = x$ **kaç br dir?**



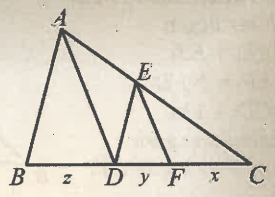
A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

17.
ABC bir üçgen
AB // ED
AD // EF
$|BD| = 4x - 15$ br
$|DF| = x$ br
$|FC| = 2x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

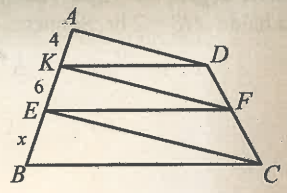
18.
ABC bir üçgen
$AB \,//\, DE$
$AD \,//\, EF$
$|BD| = z$ br
$|DF| = y$ br
$|FC| = x$ br



olduğuna göre $\frac{(x+y)^2}{x+y+z}$ **oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

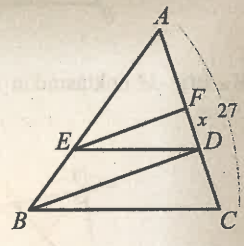
A) x B) y C) z D) x^2 E) $z+x$

19.
$ABCD$ bir dörtgen
$AD \,//\, KF \,//\, EC$
$KD \,//\, EF \,//\, BC$
$|AK| = 4$ br
$|KE| = 6$ br
$|EB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



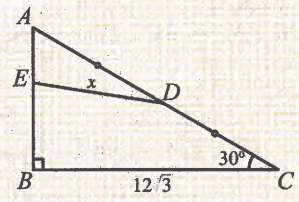
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

20.
ABC bir üçgen
$ED \,//\, BC$
$EF \,//\, BD$
$3\cdot|EF| = 2\cdot|BD|$
$|AC| = 27$ br
$|FD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



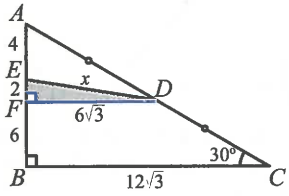
A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 7

Örnek. *ABC dik üçgen*
$m(C) = 30^\circ$
$|BC| = 12\sqrt{3}$ br
$|AD| = |DC|$
$|BE| = 2\cdot|EA|$
olduğuna göre
$|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $6\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{5}$

Çözüm: Derhal $[DF]$ orta tabanını çiziyoruz.

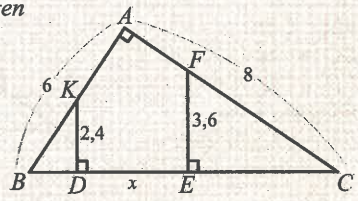


$|BC| = 12\sqrt{3}$ br ise $|AB| = 12$ br, $|AE| = 4$ br, $|EF| = 2$ br ve $|FB| = 6$ br olur. Orta taban tabanın yarısı olması gerektiğinden de $|FD| = 6\sqrt{3}$ br olur. Geriye sadece EFD dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygulamak kalıyor.

$$|DE| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}\,.$$

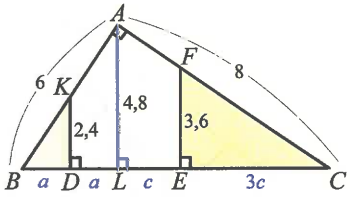
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$BA \perp AC$
$KD \perp BC$
$FE \perp BC$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 8$ br
$|KD| = 2{,}4$ br
$|FE| = 3{,}6$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) 3,4 C) 3,8 D) 4,2 E) 4,4

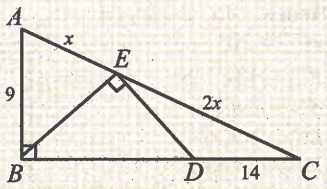
Çözüm: Hipotenüse ait $[AL]$ yüksekliğini çizelim.



$6\cdot 8 = 10\cdot|AL|$ eşitliğinden $|AL| = 4{,}8$ olur. O halde ALB dik üçgeninde $[KD]$ orta tabandır. ALC üçgeninde de Tales Teoremi gereği $|EC| = 3\cdot|LE|$ olur. Taralı üçgenler büyük üçgenle benzer olduğundan $a = 1{,}8$ ve $c = 1{,}6$ bulunur. O halde $x = a + c = 3{,}4$ olur.

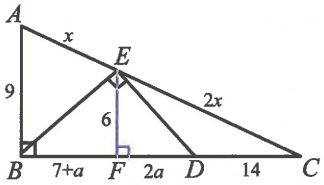
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AB ⊥ BC ve BE ⊥ ED
|AB| = 9 br
|DC| = 14 br
|EC| = 2·|AE| = 2x br
ise |AE| = x kaç br dir?



A) 8 B) $6\sqrt{2}$ C) 9 D) $3\sqrt{10}$ E) 10

Çözüm: *E*'den *BC*'ye inilen dikme ayağı *F* olsun.



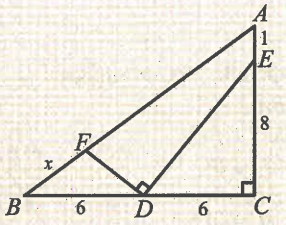
CEF ve *CAB* üçgenlerinin benzerliğinden $|EF| = 6$ br bulunur. $|FD| = 2a$ br dersek, Tales Teoremi gereği $|CF| = 2\cdot|FB|$ olması gerektiğinden $|FB| = 7 + a$ br olur. *EBD* üçgeninde Öklid Teoremi'nden

$$6^2 = 2a\cdot(7 + a)$$

olur ki buradan $a = 2$ bulunur. *ABC* üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $x = 3\sqrt{10}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
AC ⊥ CB
FD ⊥ DE
|AE| = 1 br
|EC| = 8 br
|CD| = |DB| = 6 br
olduğuna göre
|BF| = x kaç br dir?

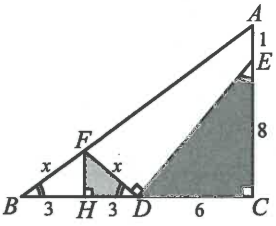


A) $\frac{15}{4}$ B) 4 C) $\frac{17}{4}$ D) 5 E) 6

Çözüm: *DCE* üçgeni 6-8-10, *ACB* üçgeni de 9-12-15 üçgeni olduklarından benzerdirler. O halde

$$m(DEC) = m(ABC)$$

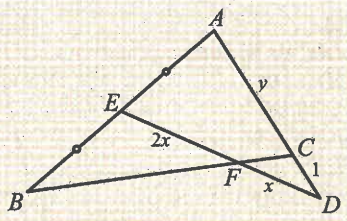
olur.



Diğer yandan $m(DEC) = m(FDH)$ olduğundan *BFD* ikizkenar üçgendir. Şimdi *F*'den *BC*'ye inilen dikme ayağına *H* diyelim. $|BH| = |HD| = 3$ br olur. Tales Teoremi'nden $|BF| : |FA|$'nın 1/3 yani $|FA| = 3x$ br olduğunu biliyoruz. $4x = 15$'ten $x = 15/4$ olarak bulunur.

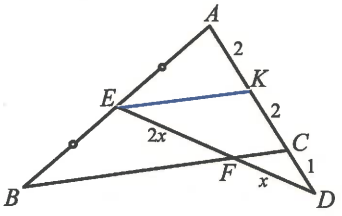
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC ve AED birer üçgen*
|AE| = |EB|
|EF| = 2·|FD|
|CD| = 1 br
olduğuna göre
|AC| = y kaç br dir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

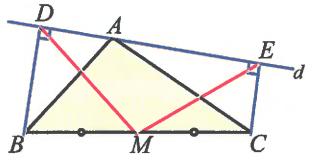
Çözüm: Derhal [*EK*] orta tabanını çiziyoruz.



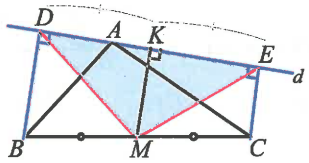
EDK üçgeninde Tales Teoremi'nden $|CK| = 2$ br oluyor, o halde $|AK| = 2$ br. Sonuçta $|AC| = y = 4$ çıkar.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Herhangi bir ABC üçgeni ve bu üçgenin A köşesinden geçen bir d doğrusu çizilsin. B ve C köşelerinden bu doğruya indirilen dikme ayakları sırasıyla D ve E, [BC] kenarının orta noktası da M olsun. Öyleyse DME üçgeni ikizkenardır.*

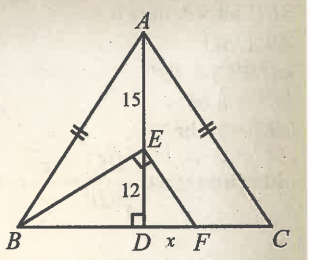


Kanıt: *M* noktasından *DE*'ye indirilen dikme ayağı *K* olsun.



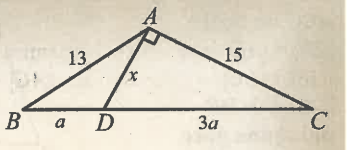
[*MK*], *DBCE* yamuğunda orta taban olur. *MK* dikmesi aynı zamanda kenarortay olduğundan $|DM| = |ME|$ yani *DME* üçgeni ikizkenardır. (Ayrıca, doğru üçgeni kesse de kural geçerlidir.)

21.
$|AB| = |AC|$
$AD \perp BC$
$BE \perp EF$
$EF \,//\, AC$
$|AE| = 15$ br
$|ED| = 12$ br
$|DF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



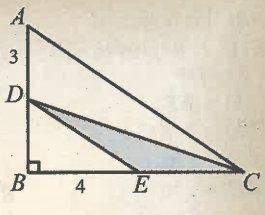
A) 5 B) 6 C) 7 **D)** 8 E) 9

22.
ABC bir üçgen
$DA \perp AC$
$|AB| = 13$ br
$|AC| = 15$ br
$|CD| = 3 \cdot |BD|$
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç br dir?



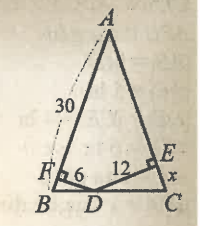
A) 12 B) 10 **C)** 9 D) 8 E) 6

23.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$DE \,//\, AC$
$|AD| = 3$ br
$|BE| = 4$ br
olduğuna göre
Alan(DEC) kaç br^2 dir?



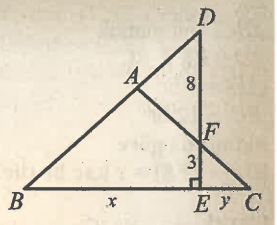
A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

24.
ABC bir ikizkenar üçgen
$DF \perp AB$
$DE \perp AC$
$|DF| = 6$ br
$|DE| = 12$ br
$|AC| = |AB| = 30$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ kaç br dir?



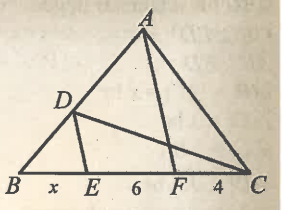
A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 5 E) 6

25.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
B, A, D doğrusal
$DE \perp BC$
$|DF| = 8$ br
$|FE| = 3$ br
$|BE| = x$ br
$|EC| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



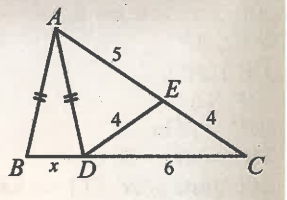
A) $\frac{8}{3}$ B) 3 C) $\frac{10}{3}$ **D)** $\frac{11}{3}$ E) 4

26.
ABC bir üçgen
$DE \,//\, AF$
$|CA| = |CD|$
$|EF| = 6$ birim
$|FC| = 4$ birim
olduğuna göre
$|ED| = |EB| = x$ kaç br dir?



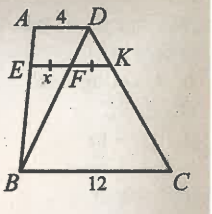
A) 2 B) 3 **C)** 4 D) 6 E) 12

27.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AD|$
$|AE| = 5$ br
$|DE| = |CE| = 4$ br
$|CD| = 6$ br
olduğuna göre
$|BD| = x$ kaç br dir?



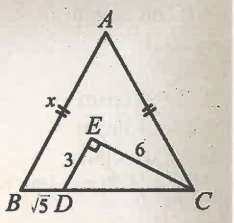
A) 1 **B)** 3/2 C) 2 D) 5/2 E) 6

28.
$ABCD$ bir yamuk
$AD // EK // BC$
$|AD| = 4$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre
$|EF| = |FK| = x$ kaç br dir?



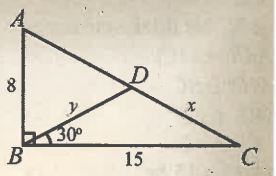
A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ **D)** 3 E) $2\sqrt{3}$

29.
ABC bir ikizkenar üçgen
$CE \perp ED$
$AB // ED$
$|AB| = |AC| = x$ br
$|ED| = 3$ br
$|EC| = 6$ br
$|BD| = \sqrt{5}$ br
olduğuna göre x kaçtır?



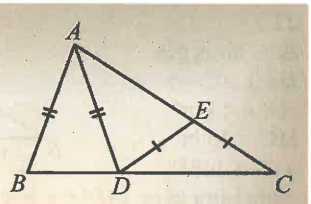
A) 13 B) 12 C) 11 **D)** 10 E) 9

30.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(DBC) = 30°$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 15$ br
olduğuna göre $\frac{|DC|}{|BD|} = \frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



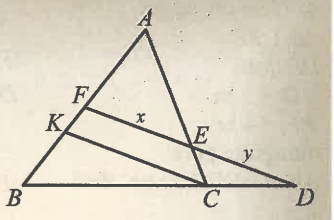
A) $\frac{20}{19}$ B) $\frac{19}{18}$ C) $\frac{18}{17}$ **D)** $\frac{17}{16}$ E) $\frac{16}{15}$

31.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AD|$
$|DE| = |EC|$
$|DC| = 2 \cdot |DB|$
olduğuna göre
$\frac{|AE|}{|EC|}$ **oranı kaçtır?**



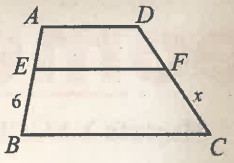
A) 1 **B)** 1,5 C) 1,8 D) 2 E) 3

32.
ABC bir üçgen
B, C, D doğrudaş
$CK // DF$
$|AF| = |FB|$
$|BK| = 2 \cdot |KF|$
$|FE| = x$ br
$|ED| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



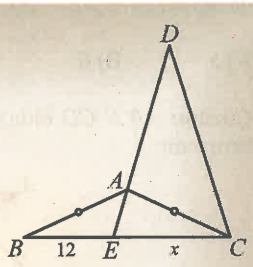
A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ **C)** 1 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

33.
$ABCD$ bir dörtgen
$AD // EF // BC$
$4 \cdot |AE| = 3 \cdot |DF|$
$|EB| = 6$ br
$|FC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



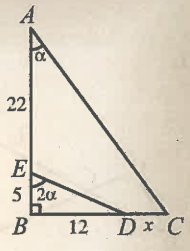
A) 6 **B) 8** C) 9 D) 10 E) 12

34.
ABC bir üçgen
DEC bir üçgen
$A \in [DE]$
$|AB| = |AC|, |DE| = |DC|$
$|DA| = 3 \cdot |AE|$
$|BE| = 12$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



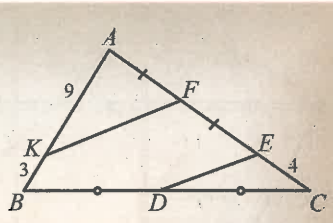
A) 13 B) 14 C) 15 **D) 16** E) 18

35.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(A) = \alpha$
$m(DEB) = 2\alpha$
$|AE| = 22$ br
$|EB| = 5$ br
$|BD| = 12$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



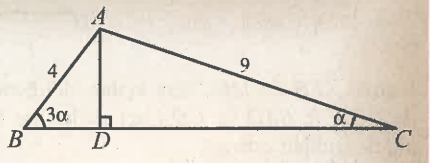
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

36.
ABC bir üçgen
$KF // DE$
$|BD| = |DC|$
$|AF| = |FE|$
$|BK| = 3$ br
$|KA| = 9$ br
$|EC| = 4$ br
olduğuna göre $|AC|$ kaç br dir?



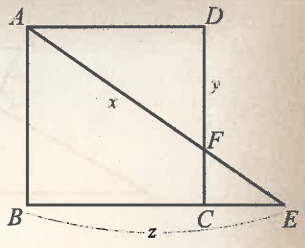
A) 12 B) 14 **C) 16** D) 18 E) 20

37.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(B) = 3\alpha$
$m(C) = \alpha$
$|BA| = 4$ br
$|AC| = 9$ br
olduğuna göre $\frac{|BD|}{|DC|}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{13}$ E) $\frac{16}{81}$

38.
$ABCD$ bir kare
$F \in [DC]$
$AF \cap BC = \{E\}$
$|AF| = x$ br
$|DF| = y$ br
$|BE| = z$ br
olduğuna göre x, y ve z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x + y = z$ B) $x^2 + y^2 = z^2$ C) $x^2 = yz$
D) $x^2 = y(y + z)$ E) $z^2 = x(x + y)$

Geometri Notları

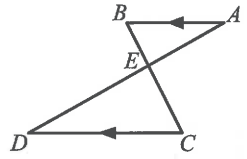
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kelebek Teoremi

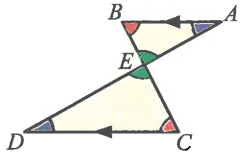
Tales Teoremi kadar önemli bir benzerlik teoremine geldi sıra. Kelebek Teoremi. Bu teorem de aynı Tales Teoremi gibi bir A.A. benzerliğinin sonucudur.

Teorem [Kelebek].
Yandaki şekilde BA // DC ise

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|AE|}{|ED|}=\frac{|BE|}{|EC|}.$$

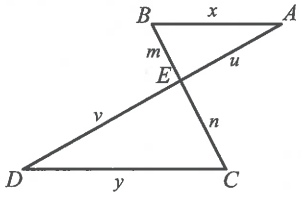


Kanıt: *AEB* ile *DEC* ters açılar olduğundan eştir. *ABC* ile *DCB* ve *BAD* ile *CDA* açı çiftleri de birer iç-ters açı olduklarından eştirler.



O halde A.A. benzerliği gereği $ABE \sim DCE$ olur. Eş şekillerin karşılıklı kenarları orantılı olacağından eşleme kurulursa kanıt biter.

Eğer harflerle gösterecek olursak;



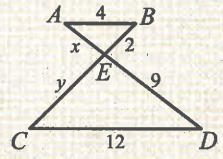
yukardaki gibi bir kelebek şekli için

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}=\frac{u}{v}$$

eşitlikleri geçerlidir.

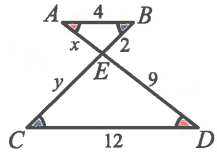
Bu şekilden ilerde **kelebek** diye bahsedeceğiz. Gerek olursa *ACB* ve *CED* üçgenlerine **kelebeğin kanatları,** *C* noktasına da **kelebeğin kalbi** diyeceğiz.

Örnek. *Yandaki şekilde*
AB // CD
AD ∩ BC = {E}
|AB| = 4 br
|BE| = 2 br
|ED| = 9 br
|CD| = 12 br
olduğuna göre |AE| + |EC| = x + y toplamı kaç br *dir?*



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

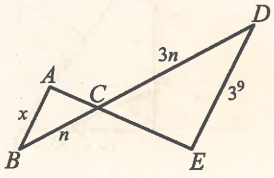
Çözüm: *AB // CD* olduğundan *AEB* ile *DEC* üçgenleri benzerdir.



Ortak olan *E* açısının gördüğü kenarın uzunluğu birinde 4 br diğerinde 12 br olduğundan kelebeğin alt kanadı üst kanadının 3 katıdır. *AEB* üçgeninde *A* açısının karşısındaki kenar uzunluğu 2 br olduğundan *DEC* üçgeninde *D* açısının karşısındaki kenar uzunluğu $y = 6$ olmalıdır. Benzer şekilde üst kanatta *B* açısının karşısındaki kenar *x* br olduğundan alt kanatta *C* açısının karşısındaki $3x$ br olmalıdır. O halde $3x = 9$ eşitliğinden $x = 3$ olmalıdır. Bu durumda $x + y = 3 + 6 = 9$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

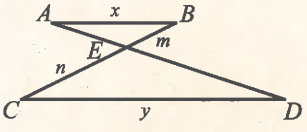
1.



AB // DE ise *x* kaçtır?

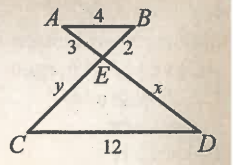
3^8

2.



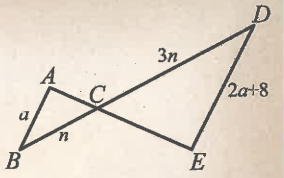
AB // CD ise $xn - my$ kaçtır? 0

3.
$AB \parallel CD$
$AD \cap BC = \{E\}$
$|EB| = 2$ br
$|BA| = 4$ br
$|AE| = 3$ br
$|CD| = 12$ br
olduğuna göre
$|DE| + |EC| = x + y$ toplamı kaçtır?



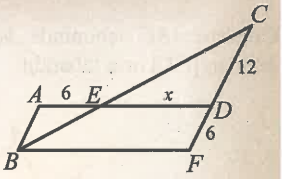
A) 9 B) 12 **C) 15** D) 18 E) 21

4.
$AB \parallel DE$
$AE \cap BD = \{C\}$
$|CB| = n$ br
$|CD| = 3n$ br
$|AB| = a$ br
$|ED| = 2a + 8$ br
olduğuna göre a kaçtır?



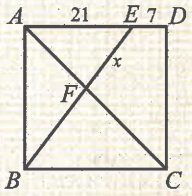
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5.
$AB \parallel CF$
$AD \parallel BF$
$|AE| = |FD| = 6$ br
$|DC| = 12$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



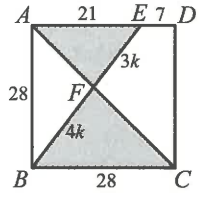
A) 6 B) 8 C) 10 **D) 12** E) 18

Örnek. *ABCD bir kare*
[AC] köşegen
$AC \cap BE = \{F\}$
$|AE| = 21$ br
$|ED| = 7$ br
olduğuna göre $|FE| = x$ kaç br *dir?*



A) 20 B) 18 C) 16 D) 15 E) 12

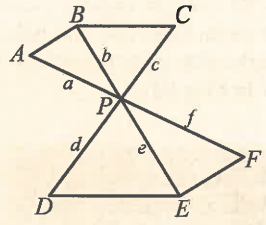
Çözüm: Karenin kenar uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan $|AB| = |BC| = 28$ br olur. O halde taralı kelebekte benzerlik oranı 21 : 28 yani 3 : 4 olur.



$|FE| = x = 3k$ br denirse $|BF| = 4k$ br olacaktır. EAB dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|BE| = 35$ br olacağından $7k = 35$ eşitliğinden $k = 5$ bulunur. Bu durumda $x = 3k = 3 \cdot 5 = 15$ olmalıdır.

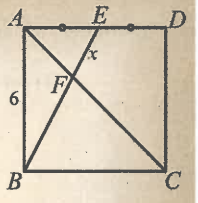
Doğru cevap: D.

6.
$BC \parallel DE$
$AB \parallel EF$
$a \cdot b \cdot c = 27$
$d \cdot e \cdot f = 64$
$a + b + c = 12$
ise $d + e + f$ kaçtır?



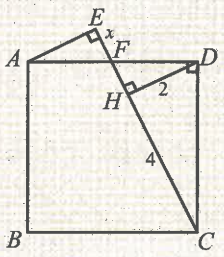
16

7.
$ABCD$ kare
$AC \cap BE = \{F\}$
$|AE| = |ED|$
$|AB| = 6$ br
olduğuna göre
$|EF| = x$ kaç br dir?



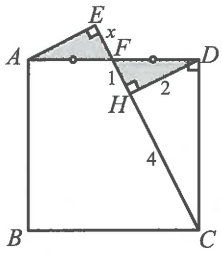
A) 2 **B) $\sqrt{5}$** C) $\sqrt{6}$ D) 3 E) $2\sqrt{5}$

Örnek. *ABCD bir kare*
$CE \cap AD = \{F\}$
$DH \perp EC$
$AE \perp EC$
$|DH| = 2$ br
$|HC| = 4$ br
olduğuna göre
$|EF| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

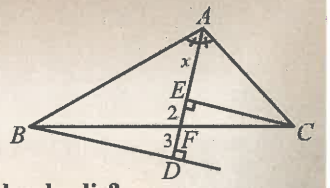
Çözüm: *CDF* üçgeninde Öklid Teoremi'nden doğan
$$2^2 = 4 \cdot |FH|$$
eşitliğinden $|FH| = 1$ br bulunur.



DHF ve *DHC* dik üçgenlerinde Pisagor teoremlerinden $|FD| = \sqrt{5}$ br ve $|DC| = 2\sqrt{5}$ br bulunur ki buradan *F*'nin karenin kenarının orta noktası olduğunu anlarız. O halde kelebekte taralı üçgenler eştir, dolayısıyla $|EF| = |FH| =$ 1 br olmalıdır.

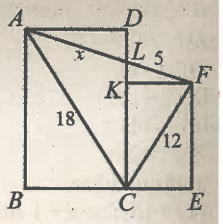
Doğru cevap: D.

8.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$CE \perp AD$
$BD \perp AD$
$|DF| = 3$ br
$|FE| = 2$ br
olduğuna göre $|EA| = x$ **kaç br dir?**



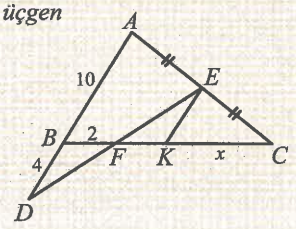
A) 12 **B)** 10 C) 8 D) 6 E) 5

9.
ABCD ile *KCEF* dikdörtgenleri benzerdir.
[AC] ve *[CF]* köşegen
A, L, F doğrudaş
$|AC| = 18$ br
$|CF| = 12$ br
$|FL| = 5$ br
$|LA| = x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



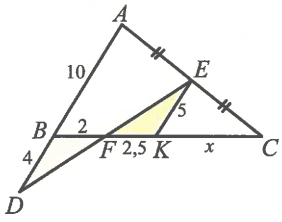
A) 7 **B)** 7,5 C) 8 D) 8,5 E) 10

Örnek. *ABC ve ADE birer üçgen*
$AD \,//\, EK$
$|AE| = |EC|$
$|AB| = 10$ br
$|BD| = 4$ br
$|FB| = 2$ br
olduğuna göre
$|KC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 5,5

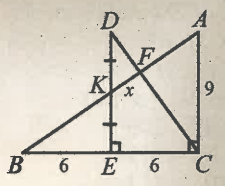
Çözüm: *ABC* üçgeninde $AD \,//\, EK$ ve $|AE| = |EC|$ olduğundan *[EK]* orta tabandır.



Bu yüzden $|EK| = 5$ br dir. Diğer yandan taralı kelebekte benzerlik oranı 4 : 5 olduğundan $|FK| = 2{,}5$ br olmalıdır. O halde $|KC| = |BK| = 2 + 2{,}5 = 4{,}5$ bulunur.

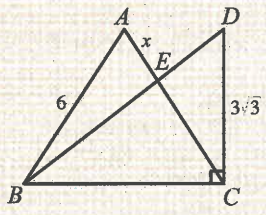
Doğru cevap: C.

10.
ABC ve *DEC* birer üçgen
$AC \perp CB$
$DE \perp BC$
$|DK| = |KE|$
$|BE| = |EC| = 6$ br
$|CA| = 9$ br
olduğuna göre
$|KF| = x$ **kaç br dir?**



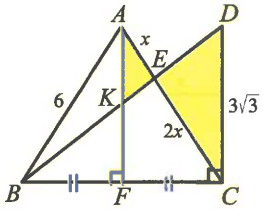
A) 2 **B)** 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Örnek [1994 Tübitak].
ABC bir eşkenar üçgen
BCD bir dik üçgen
$BC \perp CD$
$|AB| = 6$ br
$|DC| = 3\sqrt{3}$ br
olduğuna göre
$|AE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

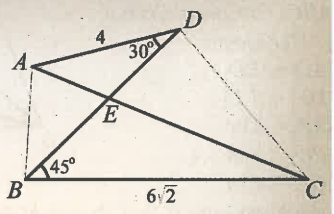
Çözüm: Eşkenar üçgenin *A*'dan inen yüksekliğini çizelim. Yükseklik ayağı *F*, *BD*'yi kestiği nokta da *K* olsun.



AF doğrusu, [*BC*]'nin orta dikmesi olduğundan [*KF*], *BCD* üçgeninde orta taban olur, bu yüzden boyu $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ dir. Bu değer, [*AF*] yüksekliğinin yarısı olduğundan $|AK|$ değeri de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ dir. O halde şekilde taranmış kelebekte benzerlik oranı 1:2 olacağından $|AE| = x$ br ise $|EC| = 2x$ br olur. $3x = 6$ eşitliğinden $x = 2$ çıkar.

Doğru cevap: D.

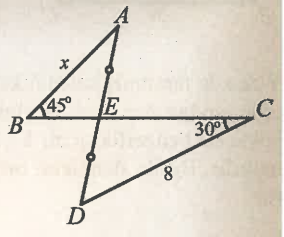
11.
ABCD bir dörtgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$m(ADB) = 30°$
$m(CBD) = 45°$
$|AD| = 4$ br
$|BC| = 6\sqrt{2}$ br
olduğuna göre
AE/EC **oranı kaçtır?**



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

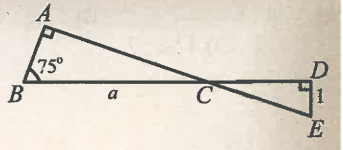
12.
$AD \cap BC = \{E\}$
$m(ABC) = 45°$
$m(BCD) = 30°$
$|AE| = |ED|$
$|DC| = 8$ br
$|AB| = x$ br

olduğuna göre x **kaçtır?**



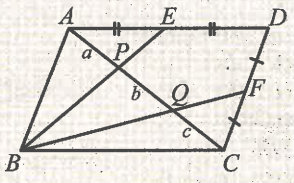
A) 4 B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 5 **E)** $4\sqrt{2}$

13.
$AE \cap BD = \{C\}$
$BA \perp AE$, $BD \perp DE$
$|AC| = 2 \cdot |CE|$
$m(B) = 75°$
$|DE| = 1$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a **kaçtır?**



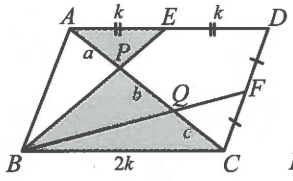
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 **E)** 8

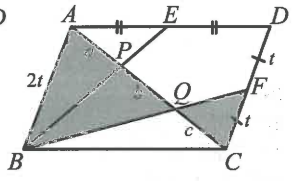
Soru Tipi.
ABCD bir paralelkenar
[AC] köşegen
$|AE| = |ED|$
$|DF| = |FC|$
$|AP| = a$ br
$|PQ| = b$ br
$|QC| = c$ br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a = b = c$ B) $3a = 4b = 5c$ C) $4a = 5b = 3c$
D) $2a = b = 2c$ E) $4a = 3b = 4c$

Çözümü: $|AE| = |ED| = k$ br dersek $|BC| = 2k$ br olur. Diğer yandan $|DF| = |FC| = t$ br dersek $|AB| = 2t$ br olur.

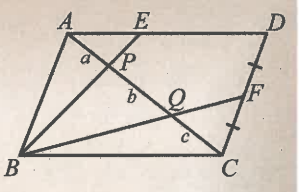




Yukarda taranmış soldaki kelebekte benzerlik oranı 1 : 2 olduğundan $b + c = 2a$ olmalıdır. Sağda taranmış kelebekte de benzerlik oranı 1 : 2 olduğundan $a + b = 2c$ olmalıdır. Bu iki denklemi ortak çözersek $a = b = c$ buluruz.

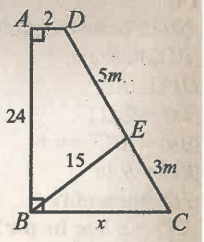
Doğru cevap: A.

14.
ABCD paralelkenar
[AC] köşegen
$2 \cdot |AE| = |ED|$
$|DF| = |FC|$
$|AP| = a$ br
$|PQ| = b$ br
$|QC| = c$ br
olduğuna göre $a : b : c$ hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?



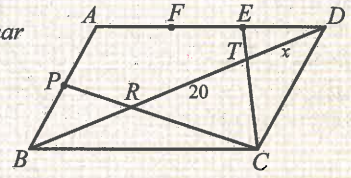
A) 3 : 4 : 5 **B)** 3 : 5 : 4 C) 4 : 3 : 5
D) 4 : 5 : 3 E) 5 : 4 : 3

15.
ABCD bir dik yamuk
AD // BC
AB ⊥ BC
$3 \cdot |DE| = 5 \cdot |EC|$
$|AD| = 2$ br
$|AB| = 24$ br
$|BE| = 15$ br
olduğuna göre
$|BC| = x$ kaç br dir?



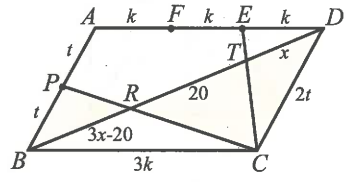
A) 15 B) 16 **C)** 18 D) 20 E) 21

Örnek.
ABCD bir paralelkenar
$|AF| = |FE| = |ED|$
$|AP| = |PB|$
$|RT| = 20$ br
olduğuna göre
$|TD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $|AF| = |FE| = |ED| = k$ br dersek $|BC| = 3k$ br olur. O halde kalbi *T* olan kelebekte benzerlik oranı 1: 3 tür.



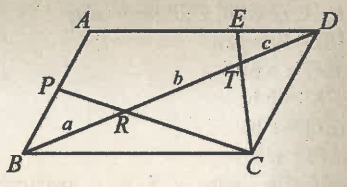
$|TD| = x$ br verildiğinden $|BT| = 3x$ br olmalıdır Bu durumda $|BR| = 3x - 20$ br olmalıdır. Diğer yandan $|AP| = |PB| = t$ br dersek $|DC| = 2t$ br olacağından kalbi *R* olan taralı kelebekte benzerlik oranının 1 : 2 olduğunu anlarız. O halde $|RD| = 2 \cdot (3x - 20) = 6x - 40$ olmalıdır. Buradan

$$6x - 40 = 20 + x$$

eşitliğinden $5x = 60$ yani $x = 12$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

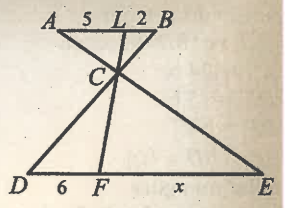
16.
$ABCD$ paralelkenar
$[BD]$ köşegen
$|AP| = |PB|$
$|AE| = 2 \cdot |ED|$
$|BR| = a$ br
$|RT| = b$ br
$|TD| = c$ br



olduğuna göre $\frac{a+c}{b}$ **oranı kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{8}{5}$ E) 2

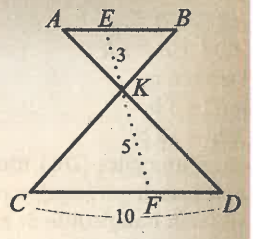
17.
Yandaki şekilde
$AB \parallel DE$
$AE \cap LF \cap BD = \{C\}$
$|AL| = 5$ br
$|LB| = 2$ br
$|DF| = 6$ br
olduğuna göre
$|FE| = x$ **kaç br dir?**



A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

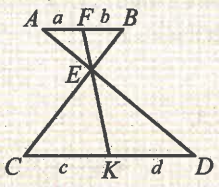
18.
$AD \cap BC \cap EF = \{K\}$
$AB \parallel CD$
$|EK| = 3$ br
$|KF| = 5$ br
$|CD| = 10$ br

olduğuna göre
$|AB|$ **kaç br dir?**



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

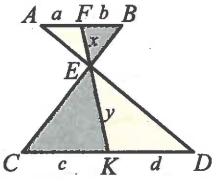
Örnek. *Yandaki şekilde*
$AB \parallel CD$
$AD \cap FK \cap BC = \{E\}$
$|AF| = a$ br
$|FB| = b$ br
$|CK| = c$ br
$|KD| = d$ br



olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a \cdot b = c \cdot d$ B) $a \cdot d = b \cdot c$ C) $a \cdot c = b \cdot d$
D) $a + c = b + d$ E) $a + d = b + c$

Çözüm: Şekilde 3 farklı kelebeğin olduğunu fark etmişsinizdir. Biz küçük olan 2 tanesiyle ilgileneceğiz.

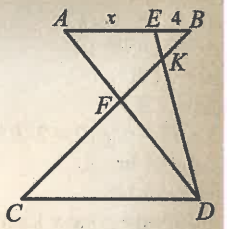


$|FE| = x$ br ve $|EK| = y$ br olsun. x/y oranı kelebeğin birinde a/d'ye eşit olup diğerinde b/c'ye eşittir.

Bu yüzden $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ yani $a \cdot c = b \cdot d$ eşitliği sağlanmalıdır.

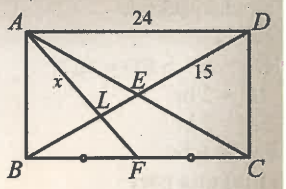
Doğru cevap: C.

19.
$AD \cap BC = \{F\}$
$BC \cap ED = \{K\}$
$AB \parallel CD$
$|CB| = 2 \cdot |FB|$
$|FK| = 2 \cdot |KB|$
$|AE| = x$ br
$|EB| = 4$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



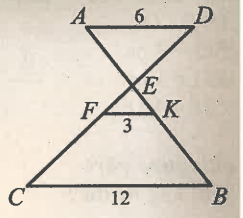
A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

20.
ABCD dikdörtgen
[*AC*] ve [*BD*] köşegen
$|AD| = 24$ br
$|DE| = 15$ br
$|BF| = |FC|$
$AF \cap BD = \{L\}$
olduğuna göre
$|AL| = x$ **kaç br dir?**



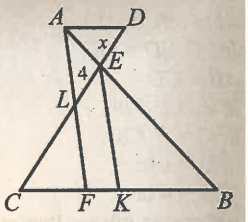
A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{13}$ D) 8 E) $6\sqrt{2}$

21.
$AB \cap CD = \{E\}$
$AD \,//\, CB \,//\, FK$
$|AD| = 6$ br
$|FK| = 3$ br
$|CB| = 12$ br
olduğuna göre [*DC*]'nin orta noktasının yeri aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?



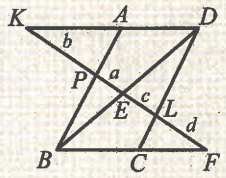
A) [*CF*] üstünde *F*'ye yakın **B)** *F*'de
C) [*EF*] üstünde *F*'ye yakın D) *E*'de
E) [*EF*] üstünde *E*'ye yakın

22.
$AB \cap DC = \{E\}$
$AF \cap DC = \{L\}$
$AD \,//\, CB$
$AF \,//\, FK$
$3 \cdot |CF| = 6 \cdot |FK| = 2 \cdot |KB|$
$|LE| = 4$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



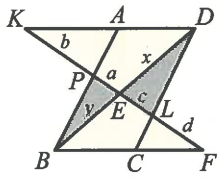
A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 8

Örnek. *ABCD bir paralelkenar*
K, A, D ve *B, C, F* doğrudaş
[*BD*] köşegen
$|EP| = a$ br
$|PK| = b$ br
$|EL| = c$ br
$|LF| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a \cdot b = c \cdot d$ B) $a + d = b + c$ C) $a \cdot d = b \cdot c$
D) $a \cdot (a + b) = c \cdot (c + d)$ E) $c \cdot (a + b) = a \cdot (c + d)$

Çözüm: Şekildeki gibi bir tarama yapılırsa taranan da kelebek olur taranmayan da.



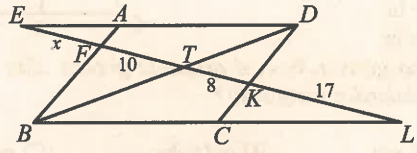
$|DE| = x$ br ve $|EB| = y$ br diyelim. Büyük kelebekten x/y oranı $(a + b)/(c + d)$ ye, küçük kelebektense c/a ya eşit olur. O halde

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{c}{a}$$

elde edilir ki içler-dışlar çarpımından $a(a+b) = c(c+d)$ bulunur.

Doğru cevap: D.

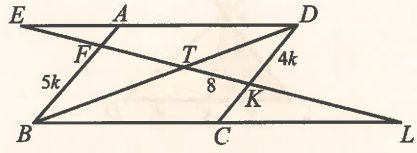
23.



ABCD paralelkenar ise *x* kaçtır?

10

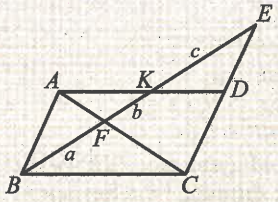
24.



ABCD paralelkenar ise $4 \cdot |KL| - 5 \cdot |EF|$ kaçtır?

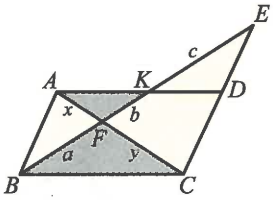
18

Örnek. *ABCD paralelkenar*
[AC] köşegen
C, D, E doğrudaş
AC ∩ BE = {F}
|BF| = a br
|FK| = b br
|KE| = c br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2 = b\cdot(b+c)$ B) $c^2 = b\cdot(a+b)$ C) $b^2 = a\cdot(a+c)$
D) $a^2 = b^2 + c^2$ E) $a^2 = b\cdot c$

Çözüm: Şekildeki gibi bir tarama yaparsak yine hem taranan kelebek olur hem de taranmayan.

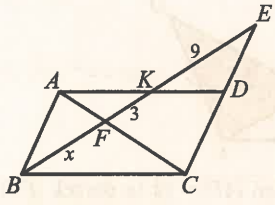


$|AF| = x$ br ve $|FY| = y$ br olsun. x/y oranı küçük kelebekten b/a, büyük kelebektense $a/(b+c)$ ye eşit olur.

O halde $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$ eşitliğinden $a^2 = b\cdot(b+c)$ bulunur.

Doğru cevap: A.

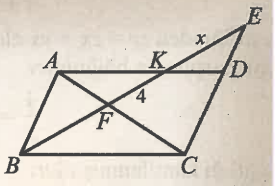
25.



ABCD paralelkenar ise x kaçtır?

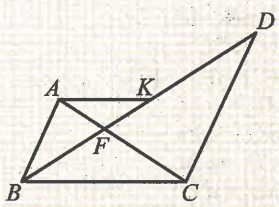
6

26.
ABCD paralelkenar
$|AK| = 2\cdot|KD|$
$|FK| = 4$ br
$|KE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

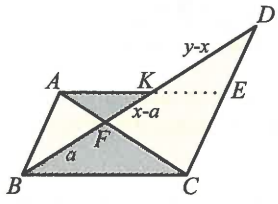
Örnek. *Yandaki şekilde*
AB // DC
AK // BC
AC ∩ BD = {F}
|BF| = a br
|BK| = x br
|BD| = y br



olduğuna göre a, x, y arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{y}$ B) $\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ C) $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$
D) $a^2 = x\cdot(x+y)$ E) $y^2 = x^2 + a^2$

Çözüm: *AK* doğrusunu *K* yönünde uzatarak şeklin aslında bir önceki örnekteki şekille aynı olduğunu anlarız.



$|FK| = x - a$ br ve $|KD| = y - x$ br olduğundan üstte bulduğumuz formülü uygularsak;

$$a^2 = (x-a)\cdot(x-a+y-x)$$
$$a^2 = (x-a)\cdot(y-a)$$
$$a^2 = xy - ax - ay + a^2$$
$$xy = ax + ay$$

elde ederiz. Şimdi eşitliğin her iki yanını axy çarpımına bölelim.

$$\frac{xy}{axy} = \frac{ax+ay}{axy}$$

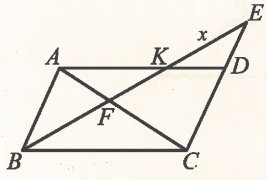
eşitliğinden

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

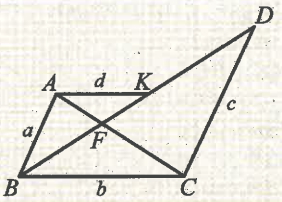
27.



ABCD paralelkenar ve $\frac{1}{|BF|} - \frac{1}{|BK|} = 0,25$ ise x kaçtır?

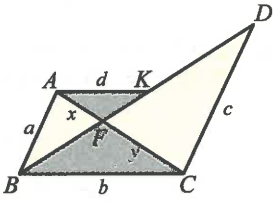
4

Örnek. $AB \,//\, DC$
$AK \,//\, BC$
$AC \cap BD = \{F\}$
$|AB| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|KA| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a \cdot b = c \cdot d$ B) $a + c = b + d$ C) $a \cdot c = b \cdot d$
D) $a \cdot (a + b) = c \cdot (c + d)$ E) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Çözüm: Taramamızı yine yukardaki gibi yapalım.

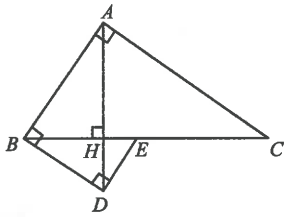


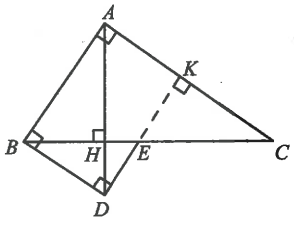
$|AF| = x$ br ve $|FY| = y$ br olsun. x/y oranı büyük kelebekten a/c, küçük kelebektense d/b ye eşit olur.

O halde $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ eşitliğinden $a \cdot b = c \cdot d$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Uyarı. Yukardaki son üç örnek karşımıza paralelkenarda değil de dikdörtgende çıkabilir. Her dikdörtgen aslında bir paralelkenar olduğundan bulduğumuz eşitliklerin hepsi dikdörtgende de geçerlidir.



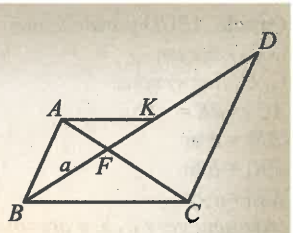


Yukardaki şekilde

$$|BH|^2 = |HE| \cdot |HC|$$
$$|AB| \cdot |DE| = |BD| \cdot |AC|$$
$$\frac{1}{|BH|} = \frac{1}{|BE|} + \frac{1}{|BC|}$$

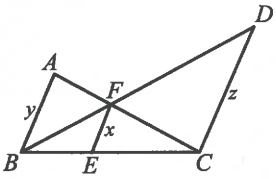
eşitliklerinin hepsi geçerlidir.

28.
$AB \,//\, DC$
$AK \,//\, BC$
$AC \cap BD = \{F\}$
$|BF| = a$ br
olduğuna göre $|BK|$ ve $|BD|$ uzunluklarının harmonik ortasının a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

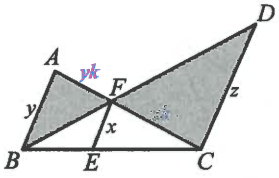


A) a **B)** $2a$ C) $4a$ D) a^2 E) $2a^2$

Teorem. *Yandaki şekilde*
$AC \cap BD = \{F\}$
$AB \,//\, FE \,//\, DC$
$|AB| = y$ br
$|FE| = x$ br
$|DC| = z$ br
ise $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ *olur.*



Kanıt: $AB \,//\, DC$ olduğundan yan şekilde taranmış şekil bir kelebektir.



Benzerlik oranı y/z olduğundan $|AF| = yk$ br dersek $|FC| = zk$ br olur. ABC üçgeninde $FE \,//\, AB$ olduğundan CFE ile CAB üçgenleri benzerdir. Eşleme kurulursa

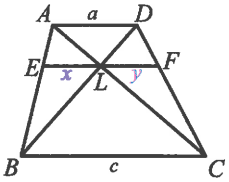
$$\frac{z}{z+y} = \frac{x}{y}$$

eşitliğinden $zy = zx + yx$ elde edilir. Eşitliğin her iki yanı xyz çarpımına bölününce

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

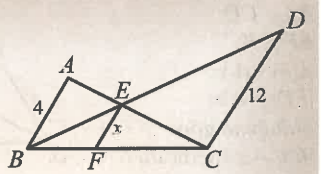
eşitliği kanıtlanmış olur.

Sonuç: Aşağıdaki $ABCD$ yamuğunda



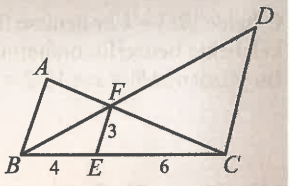
hem $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ hem de $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ olduğundan $x = y$ dir.

29.
Yandaki şekilde
$AC \cap BD = \{E\}$
$AB \,//\, EF \,//\, CD$
$|AB| = 4$ br
$|CD| = 12$ br
olduğuna göre
$|EF| = x$ kaç br dir?



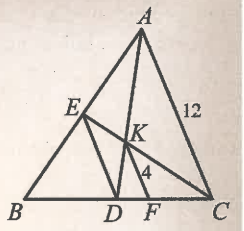
A) 3,6 B) 3,2 **C) 3** D) 2,8 E) 2,5

30.
$AC \cap BD = \{F\}$
$AB \,//\, FE \,//\, DC$
$|FE| = 3$ br
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 6$ br
$\frac{1}{|AB|} - \frac{1}{|DC|} = \frac{1}{k}$
olduğuna göre k kaçtır?



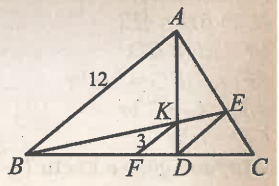
A) 10 B) 12 **C) 15** D) 18 E) 30

31.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{K\}$
$AC \,//\, KF \,//\, ED$
$|KF| = 4$ br
$|AC| = 12$ br
olduğuna göre
$\frac{|BD|}{|DF|}$ **oranı kaçtır?**



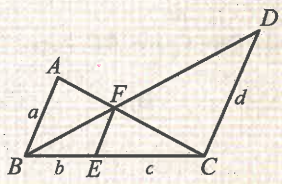
A) 5 B) $\frac{9}{2}$ C) 4 D) $\frac{7}{2}$ **E) 3**

32.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{K\}$
$AB \,//\, KF \,//\, ED$
$|KF| = 3$ br
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre
$\frac{|AE|}{|EC|}$ **oranı kaçtır?**



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

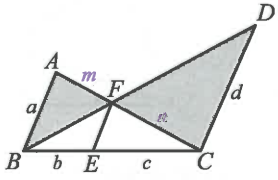
Örnek. *Yandaki şekilde*
$AC \cap BD = \{F\}$
$AB \,//\, FE \,//\, DC$
$|AB| = a$ br
$|BE| = b$ br
$|EC| = c$ br
$|CD| = d$ br



olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a \cdot b = c \cdot d$ B) $a \cdot d = b \cdot c$ C) $a \cdot c = b \cdot d$
D) $a + c = b + d$ E) $a + d = b + c$

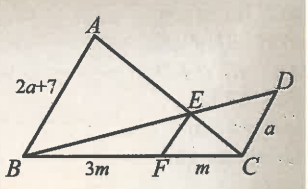
Çözüm: $|AF| = m$ br ve $|FC| = n$ br olsun.



Taralı kelebekten dolayı $\frac{m}{n} = \frac{a}{d}$'dir. ABC üçgeninde Tales teoreminden dolayı da $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$'dir. O halde $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ eşitliğinden $a \cdot c = b \cdot d$ bulunur.

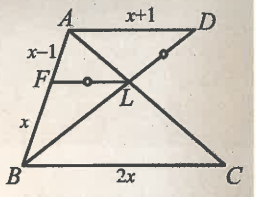
Doğru cevap: C.

33.
Yandaki şekilde
$|AC| \cap |BD| = \{E\}$
$|AB| \parallel |EF| \parallel |CD|$
$|BF| = 3\cdot|FC| = 3m$ br
$|AB| = 2a + 7$ br
$|CD| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



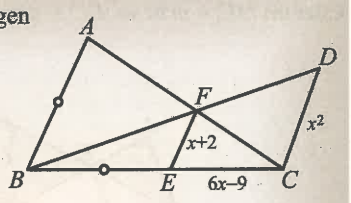
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

34.
ABC ve ABD birer üçgen
$|AC| \cap |BD| = \{L\}$
$|AD| \parallel |FL| \parallel |BC|$
$|FL| = |LD|$
$|AD| = x + 1$ br
$|AF| = x - 1$ br
$|FB| = x$ br
$|BC| = 2x$ br
olduğuna göre $|BD|$ kaçtır?



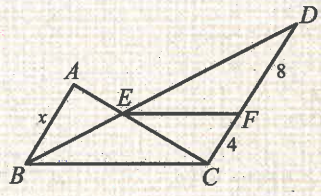
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

35.
ABC ve DBC birer üçgen
$|AC| \cap |BD| = \{F\}$
$|AB| \parallel |FE| \parallel |DC|$
$|AB| = |BE|$
$|FE| = x + 2$ br
$|EC| = 6x - 9$ br
$|CD| = x^2$ br
olduğuna göre $\frac{|AF|}{|FC|}$ oranı kaçtır?



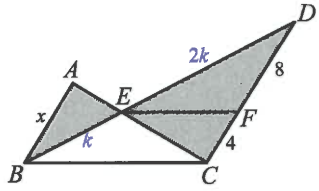
A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{9}{8}$

Örnek. *Yandaki şekilde*
$|BA| \parallel |CD|$
$|EF| \parallel |BC|$
$|CF| = 4$ br
$|FD| = 8$ br
olduğuna göre
$|BA| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: DBC üçgeninde $|DF| : |FC| = 2$ olduğundan Tales Teoremi gereği $|DE| : |EB| = 2$ olmalıdır.

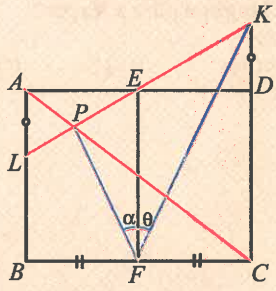


O halde $|BE| = k$ br denirse $|ED| = 2k$ br olur. Bu da taralı kelebekte benzerlik oranının 1 : 2 olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $|AB| = x = 12/2 = 6$ olmalıdır.

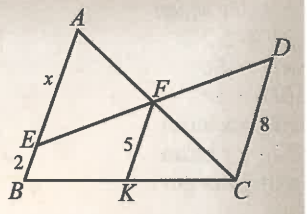
Doğru cevap: B.

Meraklısına Bir Soru

$ABCD$ bir dikdörtgen
$|EF| \parallel |AB|$
$|BF| = |FC|$
$|AL| = |DK|$
$|AC| \cap |KL| = \{P\}$
$m(PFE) = \alpha$
$m(KFE) = \theta$
ise $\alpha = \theta$ olduğunu gösteriniz.

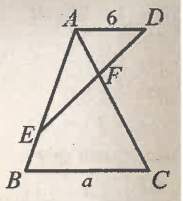


36.
ABC bir üçgen
E, F, D doğrudaş
AB // FK // DC
$|EB| = 2$ br
$|FK| = 5$ br
$|DC| = 8$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



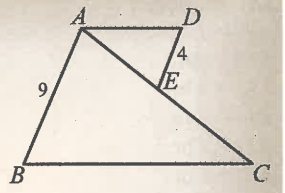
A) 6 B) 7 **C)** 8 D) 9 E) 10

37.
ABC bir üçgen
AD // BC
$AC \cap DE = \{F\}$
$2\cdot|EF| = 3\cdot|FD|$
$|AE| = 3\cdot|EB|$
$|AD| = 6$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre *a* kaçtır?



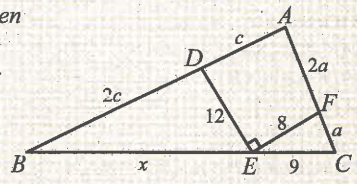
A) 8 B) 9 C) 10 **D)** 12 E) 15

38.
ABC bir üçgen
AD // BC
DE // AB
$|AB| = 9$ br
$|DE| = 4$ br
olduğuna göre
BC*/*AD* – *CE*/*EA
farkı kaçtır?



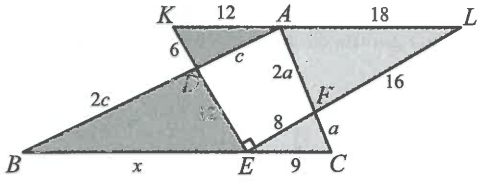
A) 1/5 B) 2/5 C) 3/5 D) 4/5 **E)** 1

Örnek. *ABC bir üçgen*
DE ⊥ EF
$|AD| = 2\cdot|DB| = 2c$ br
$|AF| = 2\cdot|FC| = 2a$ br
$|DE| = 12$ br
$|EF| = 8$ br
$|EC| = 9$ br
olduğuna göre $|BE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 25 B) 24 C) 23 D) 21 E) 20

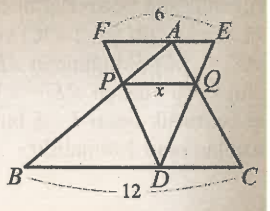
Çözüm: *B*'den geçen *KL* doğrusunu çizerek şekildeki taralı kelebekleri oluşturalım.



Sağdaki kelebekten $|FL| = 16$ br ve $|BL| = 18$ br bulunur. Soldaki kelebekten de $|KE| = 6$ br dir. *KDL* dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|KL| = 30$ br, dolayısıyla $|KB| = 12$ br olmalıdır. Soldaki kelebekte benzerlik oranından $x = 24$ bulunur.

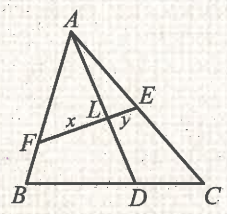
Doğru cevap: B.

39.
ABC ve *FDE* birer üçgen
$A \in [FE]$
$D \in [BC]$
FE // PQ // BC
$|FE| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
$|PQ| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



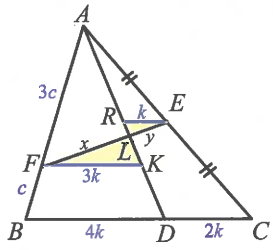
A) 5 B) 4,5 **C)** 4 D) 3,5 E) 3

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AF| = 3\cdot|FB|$
$|BD| = 2\cdot|DC|$
$|AE| = |EC|$
$AD \cap FE = \{L\}$
olduğuna göre
$\frac{|FL|}{|LE|} = \frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

Çözüm: F ve E noktalarından BC'ye paralel olacak şekilde çizilen doğrular AD'yi sırasıyla K ve R'de kessin. Bizi sonuca götürecek kelebeğe ulaşmış olduk.

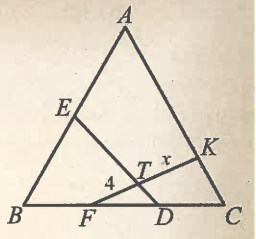


$|FB| = c$ br denirse $|AF| = 3c$ br olur. Şimdi AFK ile ABD üçgenlerinin benzerliğinden $|FK| = 3k$ br dersek $|BD| = 4k$ br olur. $|BD| = 2\cdot|DC|$ verildiğinden $|DC| = 2k$ br olur. $|AE| = |EC|$ olduğundan ADC üçgeninde $[RE]$ orta taban olur ki bu yüzden $|RE| = k$ br olur. Sonuç olarak kelebekte benzerlik oranı 1 : 3 bulunduğundan $x = 3y$ dir. Yani sorulan oran 3 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

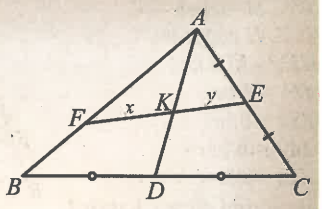
40.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AK| = 3\cdot|KC|$
$|BF| = |FD| = |DC|$
$|AE| = |EB|$
$|FT| = 4$ br

olduğuna göre
$|TK| = x$ kaç birimdir?



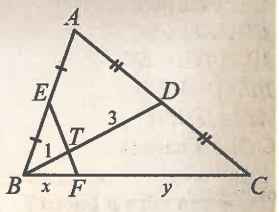
A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

41.
ABC bir üçgen
$|AF| = 2\cdot|FB|$
$|AE| = |EC|$
$|BD| = |DC|$
$|FK| = x$ birim
$|KE| = y$ birim
olduğuna göre
$\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



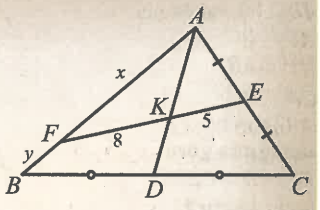
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

42.
ABC bir üçgen
$|AE| = |EB|$
$|AD| = |DC|$
$|BT| = 1$ br
$|TD| = 3$ br
olduğuna göre
$\frac{|BF|}{|FC|} = \frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



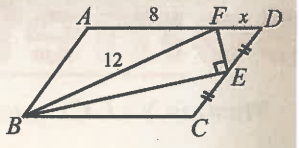
A) 0,1 **B) 0,2** C) 0,3 D) $0,\overline{3}$ E) 0,4

43.
ABC bir üçgen
$|AE| = |EC|$
$|BD| = |DC|$
$|FK| = 8$ br
$|KE| = 5$ br
$|AF| = x$ br
$|FB| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



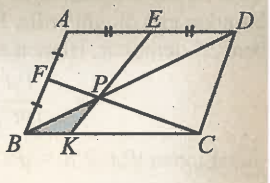
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

44.
$ABCD$ paralelkenar
$BE \perp EF$
$|CE| = |ED|$
$|AF| = 8$ br
$|BF| = 12$ br
olduğuna göre
$|FD| = x$ **kaç br dir?**



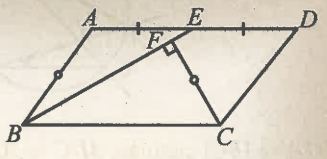
A) 1 B) 1,5 **C) 2** D) 3 E) 4

45.
$ABCD$ bir paralelkenar
$[BD]$ köşegen
$BD \cap CF \cap EK = \{P\}$
$|BF| = |FA|$
$|AE| = |ED|$
E, P, K doğrudaş
olduğuna göre $\frac{\text{Alan}(ABCD)}{\text{Alan}(BKP)}$ **oranı kaçtır?**



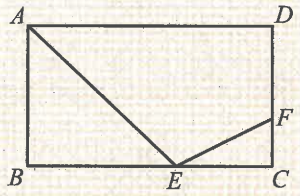
A) 24 B) 20 C) 18 D) 16 E) 15

46.
$ABCD$ paralelkenar
$|AE| = |ED|$
$|AB| = |CF|$
$CF \perp BE$
olduğuna göre
$m(ABE)$ **kaç derecedir?**



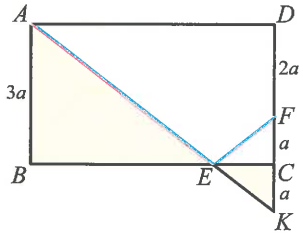
A) 15 B) 18 C) 22,5 **D) 30** E) 36

Örnek. *$ABCD$ bir dikdörtgen*
$E \in [BC]$
$F \in [CD]$
$|DF| = 2 \cdot |FC|$
olduğuna göre $|BE| : |EC|$ hangi değeri aldığında $|AE| + |EF|$ toplamı en küçük olur?



A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

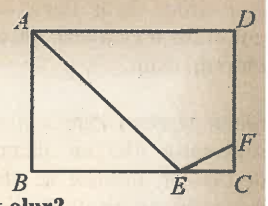
Çözüm: $|FC| = a$ br dersek $|DF| = 2a$ br ve $|AB| = 3a$ br olur. Şimdi F'nin C'ye göre simetriği olan K noktasını işaretleyelim.



E noktası $[BC]$ üzerinde nerede olursa olsun, E'den F'ye gitmekle K'ye gitmek arasında bir fark yoktur. O halde $|AE| + |EC|$ toplamını minimize etmekle $|AE| + |EK|$ toplamını minimize etmek aynı kapıya çıkar. Bunun için de E noktası AK doğrusu üzerinde olmalı yani A, E, K noktaları doğrusal olmalıdır. Taranmış kelebekten de görüleceği üzere ABE ile KCE üçgenleri benzer olduğundan $\frac{|BE|}{|EC|} = 3$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

47.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$E \in [BC]$
$F \in [CD]$
$|DF| = 4 \cdot |FC|$
olduğuna göre $|BE| : |EC|$
hangi değeri aldığında
$|AE| + |EF|$ toplamı en küçük olur?



A) 6 **B) 5** C) 4 D) 3 E) 2

www.mustafayagci.com.tr, 2011

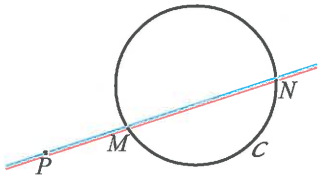
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kuvvet Teoremi

Bir noktanın bir çembere göre durumunu anlatan çok güzel bir teorem vardır. Genellikle kuvvet teoremi diye bilinir.

Bir nokta ve bir çember düşünün. O noktadan geçip çemberi iki farklı noktada kesen bir doğru çizin.

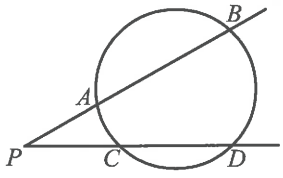


Örneğin, yukardaki gibi, P noktasından geçen doğru C çemberini sırasıyla M ve N noktalarında kessin. P'den geçen başka bir doğru da çemberi iki farklı noktada kesebileceğinden, bu işi türlü türlü yapabileceğinizi fark etmişsinizdir. Teoremin güzelliği şurada:

Nasıl yaparsanız yapın, *aldığınız ilk noktanın* (yani P'nin) *çember üzerindeki kesim noktalarından birine uzaklığıyla diğerine uzaklığının çarpımı sabittir.*

Yani 'her nokta-çember çifti için böyle yegane bir sabit sayı vardır' diyor. İlginç değil mi? Neyse... Bu sayıya **o noktanın o çembere göre kuvveti**, teoreme de **kuvvet teoremi** denir.

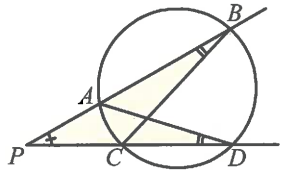
Şimdi teoremi kanıtlayalım. Yalnız, burada üç durum sözkonusu. Aldığınız ilk nokta (yani P) çemberin dışında da olabilir, üstünde de olabilir, içinde de... Önce P'yi çemberin dışında düşünelim.



Yukardaki gibi, P'den geçip çemberi iki farklı noktada kesen iki farklı doğru çizelim. Birinin çemberi kestiği noktalar sırasıyla A ve B, diğerinin kestiği noktalarsa sırasıyla C ve D olsun. Kanıtlamak istediğimiz eşitlik

$$|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|.$$

Şimdi $[BC]$ ve $[AD]$ kirişlerini çizelim.



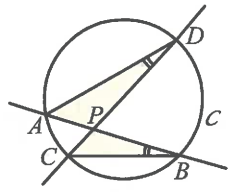
ABC ile ADC açıları aynı yayı gören çevre açılar olduklarından eşit ölçülülerdir. Bu da 'PBC ile PDA üçgenleri benzer' demektir. Hemen eşleme yapalım o zaman:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

olduğundan $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Teoremin ilk kısmı kanıtlandı. Geldik ikinci kısma... Şimdi P'yi çemberin üzerinde farz edelim. O zaman P noktası her halükarda doğruların çemberi kestiği noktalardan biri olacağından kuvvet 0 olacaktır. $0 = 0$ olacağından da eşitlik yine sağlanacaktır.

Şimdi P'nin çemberin iç bölgesinde olduğunu düşünelim. P'den geçen doğruların biri çemberi A ve B, diğeri de C ve D noktalarında kessin.



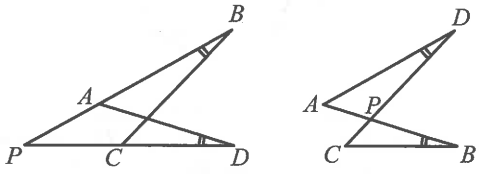
$[AD]$ ve $[BC]$ çizilirse, ADC ve ABC açılarının yine aynı yayı gördüklerinden eşit ölçülü olmaları gerekir. APD ve CPB açıları da ters açı olduklarından eştir. Bu sebeple APD ile CPB üçgenleri benzerdir. Eşleme yapılırsa, yine

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

çıkacağından $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Sadece noktanın kuvvetine bakarak, noktanın çemberin içinde mi dışında mı olduğu anlaşılamayacağı için burada işlemleri daha çok vektörlerle yaparız, zira P noktası çember içindeyse PA ve PB vektörleri zıt yönlü olacaklarından, P'nin kuvveti $-|PA|\cdot|PB|$ çıkar.

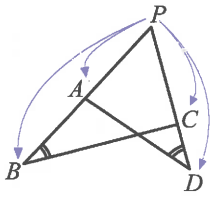
Çember dersinde olmadığımız için, yaptıklarımızın konumuzla alakasını merak etmiş olabilirsiniz. Alakası, eşitliklerin benzerlik kullanarak bulunuyor olması. Çember dersinde, açıların eşitliği verilmez ama çember çizilir, üçgen dersinde de çember çizilmez bunun yerine açıların eşitliği verilir. Diyeceğim şu ki; siz ne zaman



yukardaki şekilleri görürseniz, A, B, C, D noktalarının çembersel olacağını hatırlayıp

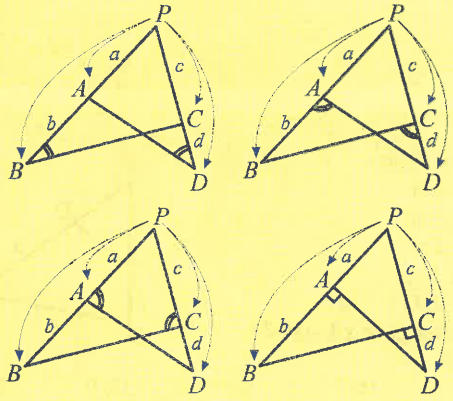
$$|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$$

eşitliğini kullanacaksınız.



Eşitliği kullanırken, elinizle ya da gözünüzle yaptığınız hareket, bir şadırvandan su akmasını anımsattığından ben ilk şekile kısaca şadırvan, ikinci şekle de papyon diyeceğim. Güzel güzel anlaşacağız!

UNUTMA!



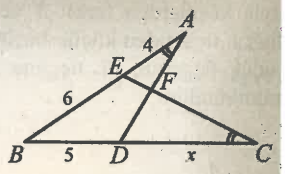
Yukardaki şekillerin hepsinde şadırvan uygulanabilir. Dört şeklin dördünde de

$$a\cdot(a+b) = c\cdot(c+d)$$

eşitliği geçerlidir.

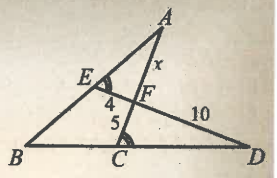
Bu teoremin karşıtı da doğrudur. Yani yukardaki gibi bir şekilde $a\cdot(a+b) = c\cdot(c+d)$ sağlanıyorsa, üçgenler yine benzerdir ama bu sefer K.A.K. benzerliğinden…

1.
ABD ve EBC birer üçgen
$m(A) = m(C)$
$|AE| = 4$ br
$|EB| = 6$ br
$|BD| = 5$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



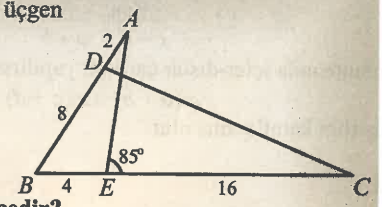
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

2.
ABC ve EBD birer üçgen
$m(AED) = m(ACD)$
$|EF| = 4$ br
$|FD| = 10$ br
$|CF| = 5$ br
$|FA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



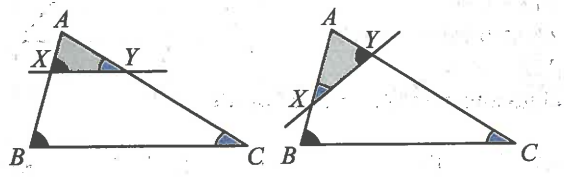
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.
ABC ve EBD birer üçgen
$m(AEC) = 85°$
$|AD| = 2$ birim
$|DB| = 8$ birim
$|BE| = 4$ birim
$|EC| = 16$ birim
olduğuna göre
$m(CDB)$ kaç derecedir?



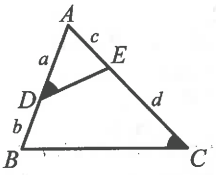
A) 105 B) 100 C) 95 D) 90 E) 85

Bir doğru, bir ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarını sırasıyla köşelerden farklı X ve Y noktalarında kessin. Bu doğru, üçgenden küçük bir üçgen ayırır. AXY üçgeni. Bu küçük üçgenin, ilk üçgene benzer olması iki durumda mümkündür:

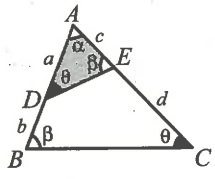


Bir, soldaki gibi, XY'nin tabana yani BC'ye paralel olmasıyla, bir de sağdaki gibi (BC'ye anti-paralel) olmasıyla. Birinci durumu daha önce ayrıntılı olarak incelemiştik. Şimdi ikinci durumu masaya yatıracağız.

Teorem. *ABC bir üçgen*
$m(ADE) = m(ACB)$
$|AD| = a$ br
$|DB| = b$ br
$|AE| = c$ br
$|EC| = d$ br
ise $a\cdot(a+b) = c\cdot(c+d)$ olur.



Çözüm: $m(A) = \alpha$ ve $m(B) = \beta$ olsun. Soruda verilen eş açıların ölçüsü de θ olsun.



ABC ile AED üçgenlerinin A.A. gereğince benzer olduğunu Metin Şentürk bile görmüştür sanırım. Derhal iki üçgen arasında eşleme kuralım:

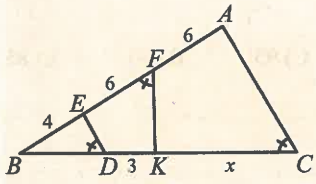
$$\frac{a}{c+d} = \frac{c}{a+b}$$

orantısında içler-dışlar çarpımı yapılırsa

$$a\cdot(a+b) = c\cdot(c+d)$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

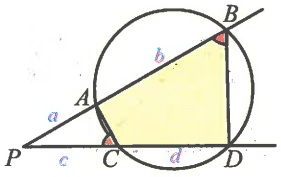
4.



x kaçtır?

12

Aslına bakarsanız, bu da kuvvet teoreminden başka bir şey değil.

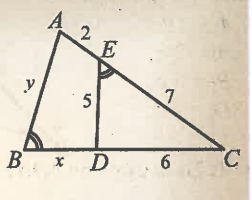


Çünkü, yukardaki şekilden de görülebileceği üzere $m(B)$ ile $m(PCA)$ açılarının eşit olması, $ABCD$ dörtgeninde karşılıklı açıların ölçüleri toplamının 180° olması anlamını taşır. Böyle bir durumda A, B, C, D noktalarının çembersel olacağını söylemiştik. P noktasının bu çembere göre kuvvetinden

$$a\cdot(a+b) = c\cdot(c+d)$$

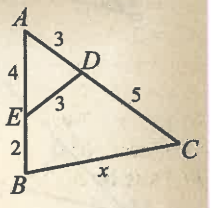
eşitliği rahatlıkla elde edilir.

5.
ABC bir üçgen
$m(CED) = m(B)$
$|ED| = 5$ br
$|DC| = 6$ br
$|CE| = 7$ br
$|EA| = 2$ br
$|BD| = x$ br
$|BA| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?



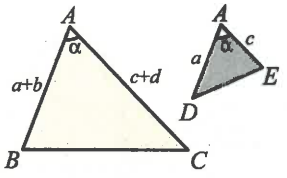
A) 11 **B)** 12 C) 13 D) 14 E) 15

6.
ABC bir üçgen
$|AE| = 4$ br
$|EB| = 2$ br
$|BC| = x$ br
$|CD| = 5$ br
$|DA| = |DE| = 3$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Bu teoremin karşıtı da doğrudur yani $a(a+b)=c(c+d)$ ise yine ABC ile AED üçgenleri benzer olurlar.

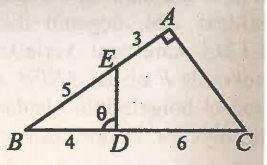


Bu sefer sebebimiz A.A. benzerliği değil, K.A.K. benzerliği olur. Çünkü $a(a+b)=c(c+d)$ eşitliği

$$\frac{a}{c}=\frac{c+d}{a+b}$$

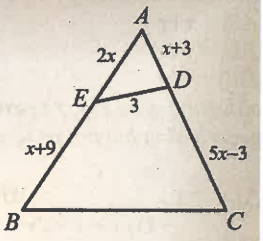
şeklinde de düzenlenebilir. Bu da ABC ile AED üçgenlerinin iki kenarı orantılıyken bu kenarlarının belirttiği açıların eş olmasına gelir.

7.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|AE| = 3$ br
$|EB| = 5$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 6$ br
olduğuna göre $m(EDB) = \theta$ kaçtır?



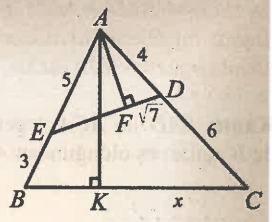
A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

8.
ABC bir üçgen
$|ED| = 3$ br
$|AE| = 2x$ br
$|EB| = x+9$ br
$|AD| = x+3$ br
$|DC| = 5x-3$ br
olduğuna göre
$|BC|$ kaç br dir?



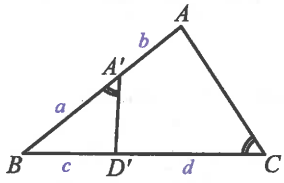
A) 6 B) 7,5 C) 9 D) 10,5 E) 12

9.
ABC bir üçgen
$AK \perp BC$
$AF \perp ED$
$|AE| = 5$ br
$|EB| = 3$ br
$|AD| = 4$ br
$|DC| = 6$ br
$|FD| = \sqrt{7}$ br
olduğuna göre $|KC| = x$ kaç br dir?

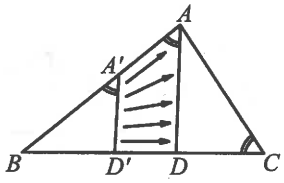


A) 5 B) $2\sqrt{7}$ C) 6 D) $3\sqrt{7}$ E) 8

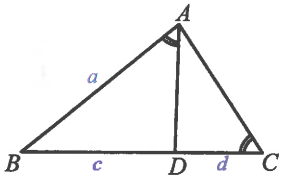
Şimdi en önemli kuvvet teoremine geldi sıra. Son öğrendiğimiz teoremde ufak oynamalar, bakın bizi nereye götürecek?



Yukardaki şekilde $a(a+b)=c(c+d)$ olduğunu biliyoruz.



Şimdi $A'D'$ doğru parçasını, A' noktası A ile çakışana dek şekildeki gibi eski haline paralel olarak kaydıralım. a ve c değerlerinin büyüyüp d'nin küçüldüğünü, b'nin de 0 olduğunu fark ettiniz mi?

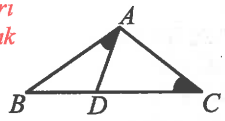


O halde yukardaki gibi bir şekilde $a(a+b)=c(c+d)$ eşitliği $a(a+0)=c(c+d)$ yani

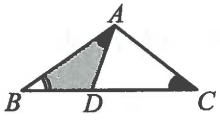
$$a^2=c(c+d)$$

haline dönüşür. Biz yine de başka türlü kanıtlayalım.

Teorem. *ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde m(BAD) = m(BCA) olacak şekilde bir D noktası alınsın. Öyleyse $|BA|^2 = |BD|\cdot|BC|$.*



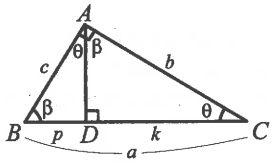
Kanıt: *BAD* ile *BCA* üçgenleri hem verilen açılar hem de *B* açıları eş olduğundan A.A. gereğince benzerdirler.



Eşleme yapılırsa $|BA|^2 = |BD|\cdot|BC|$ eşitliğine rahatlıkla erişilir.

Bu teorem, daha önce öğrendiğimiz ''yandan'' Öklit teoreminin de genel halidir. Zira bir Öklit şeklinde de yukardaki gibi bir durum vardır:

Aşağıdaki gibi bir *ABC* dik üçgeninde



$m(DAC) = m(ABC) = \beta$ olduğundan

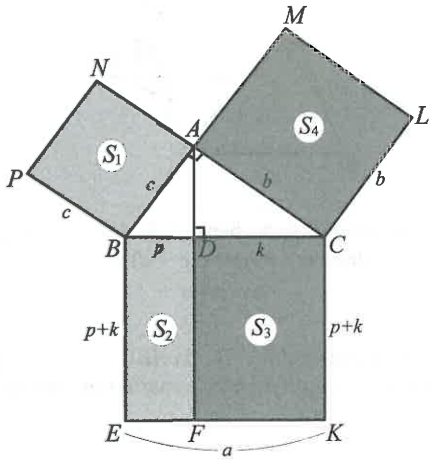
$$b^2 = k\cdot(p+k) = k\cdot a$$

ve bununla birlikte $m(BAD) = m(BCA) = \theta$ olduğundan

$$c^2 = p\cdot(p+k) = p\cdot a$$

olur.

Pisagor Teoremi'ne şık bir kanıt [MY]. Bu eşitliklerin geometrik yorumuysa bizi Pisagor Teoremi'nin çok şık bir kanıtına götürür:



A açısı dik olan *ABC* üçgeninin üç kenarı üzerine, üst şekildeki gibi, üçgenin dışına doğru *ANPB*, *BEKC* ve *CLMA* karelerini yerleştirelim. *AD*'nin *EK*'yi kestiği nokta da *F* olsun. *ANPB*, *BEFD*, *DFKC* ve *CLMA* dörtgensel bölgelerinin alanları da sırasıyla S_1, S_2, S_3 ve S_4 br^2 diyelim. Dikkat edilecek olursa; $c^2 = p\cdot(p+k)$ olması

$$S_1 = S_2$$

bunun yanında $b^2 = k\cdot(p+k)$ olması da

$$S_3 = S_4$$

anlamını taşır. Şu durumda

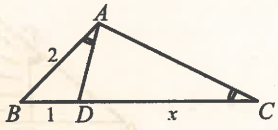
$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3$$

olur ki bu da

$$c^2 + b^2 = (p+k)^2 = a^2$$

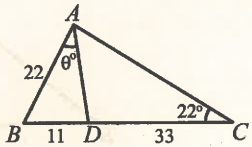
demek olduğundan Pisagor Teoremi kanıtlanmış olur.

10.
ABC bir üçgen
$m(DAB) = m(C)$
$|AB| = 2$ br
$|BD| = 1$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



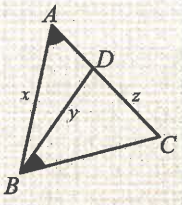
3

11.
ABC bir üçgen
$|AB| = 22$ br
$|BD| = 11$ br
$|DC| = 33$ br
$m(C) = 22°$
$m(DAB) = \theta°$
olduğuna göre
θ kaçtır?



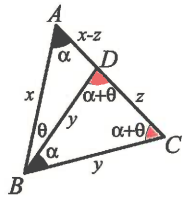
22

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = |AC|$
$m(BAC) = m(CBD)$
$|AB| = x$ br
$|BD| = y$ br
$|DC| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



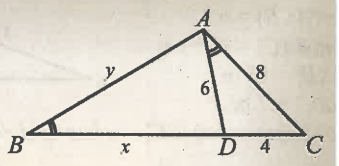
A) $x^2 = y\cdot z$ B) $y^2 = x\cdot z$ C) $z^2 = x\cdot y$
D) $x + z = 2y$ E) $x\cdot z = 2y$

Çözüm: *BAC* ve *DBC* üçgenlerinde, verilenler dışında, *C* açısı da ortak olduğundan bu üçgenler benzerdir. O halde *BAC* ikizkenar ise *DBC* üçgeni de ikizkenardır. Bu durumda $|BC| = y$ br olur. Eşleme kurulursa $\frac{y}{z} = \frac{x}{y}$ eşitliğinden $y^2 = x\cdot z$ bulunur.



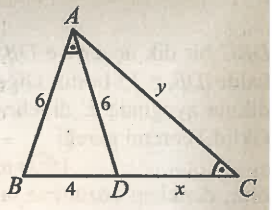
Doğru cevap: B.

12.
ABC bir üçgen
$m(CAD) = m(B)$
$|AD| = 6$ br
$|DC| = 4$ br
$|CA| = 8$ br
$|AB| = y$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?



A) 20 B) 22 **C) 24** D) 26 E) 28

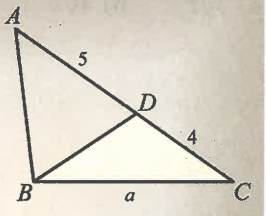
13.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(BCA)$
$|AB| = |AD| = 6$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = x$ br
$|AC| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ kaçtır?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 **E) 14**

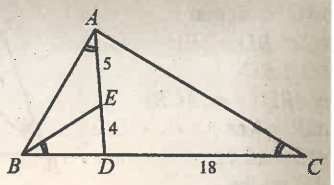
14.
ABC bir üçgen
$|AD| = 5$ birim
$|CD| = 4$ birim

Taralı üçgen ile ABC üçgeni benzer olduğuna göre $|BC| = a$ kaç br dir?



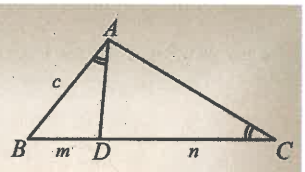
A) 9 **B) 6** C) 5 D) $2\sqrt{5}$ E) 3

15.
ABC bir üçgen
$m(BCA) = m(DAB)$
$m(DAB) = m(EBD)$
$|AE| = 5$ br
$|ED| = 4$ br
$|DC| = 18$ br
olduğuna göre
$|AB|$ kaç br dir?



A) 8 B) 9 C) 10 **D)** 12 E) 16

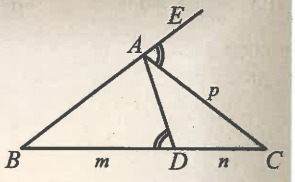
16.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(DCA)$
$|AB| = c$ birim
$|BD| = m$ birim
$|CD| = n$ birim



olduğuna göre $\frac{c^2 - m^2}{n}$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

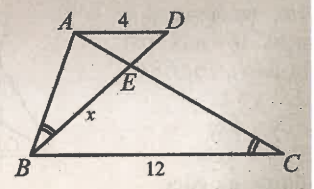
A) c **B)** m C) n D) $m + n$ E) $m - n$

17.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
B, A, E doğrudaş
$m(ADB) = m(CAE)$
$|BD| = m$ br
$|DC| = n$ br
$|CA| = p$ br
olduğuna göre m, n, p arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



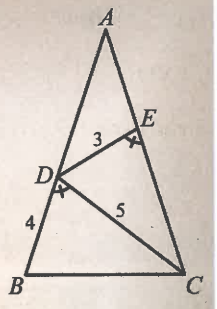
A) $m^2 = np$ B) $p^2 = mn$ C) $2p = m + n$
D) $p^2 = m(m + n)$ **E)** $p^2 = n(m + n)$

18.
ABC bir üçgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$AD \,//\, BC$
$m(ABD) = m(ACB)$
$|AD| = 4$ br
$|BC| = 12$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



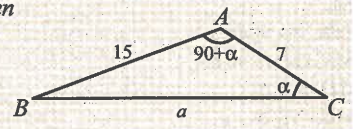
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

19.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$D \in [AB]$
$E \in [CA]$
$m(BDC) = m(DEC)$
$|DE| = 3$ br
$|DB| = 4$ br
$|DC| = 5$ br
olduğuna göre $|AD|$ kaç br dir?



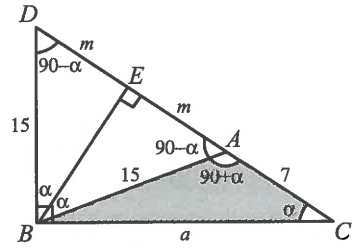
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ACB) = \alpha$
$m(BAC) = 90° + \alpha$
$|AB| = 15$ br
$|AC| = 7$ br
olduğuna göre $|BC| = a$ kaç br *dir?*



A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm: B'den BC'ye çıkılan dikmenin AC doğrusunu kestiği nokta D olsun.



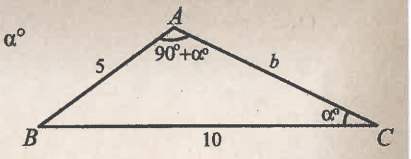
DBC bir dik üçgen ve DBA bir ikizkenar üçgen olur. O halde $|DB| = 15$ br dir. Diğer Yandan B'den DC'ye inilen dikme ayağında E diyelim. $|DE| = |EA| = m$ br olsun. Öklid Teoremi gereği

$$15^2 = m \cdot (2m + 7)$$

olur, denklem çözülürse $m = 9$ bulunur ki, buradan $a = 20$ olduğu anlaşılır.

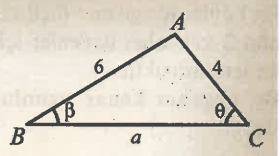
Doğru cevap: D.

20.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 90° + \alpha°$
$m(BCA) = \alpha°$
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre
$|AC| = b$ kaç birimdir?



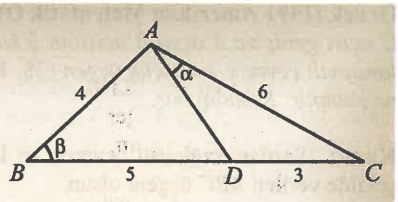
A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 6 **D)** $3\sqrt{5}$ E) 8

21.
ABC bir üçgen
$m(B) = \beta$
$m(C) = \theta$
$3\beta + 2\theta = \pi$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 4$ br
olduğuna göre
$|BC| = a$ kaç br dir?



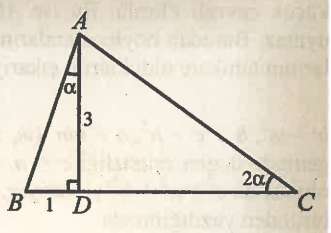
A) 4 **B)** 5 C) 6 D) 7 E) 8

22.
ABC bir üçgen
$|AB| = 4$ br
$|BD| = 5$ br
$|DC| = 3$ br
$|CA| = 6$ br
$m(CAD) = \alpha$
$m(ABC) = \beta$
olduğuna göre α ile β arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



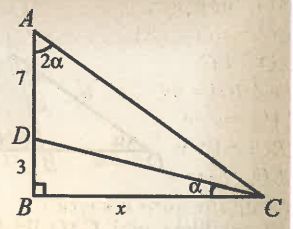
A) $\alpha = \beta$ B) $\alpha = 2\beta$ **C)** $\beta = 2\alpha$
D) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ E) $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

23.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(DAB) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$|AB| = 3$ br
$|BD| = 1$ br
olduğuna göre
$|AC|$ kaç br dir?



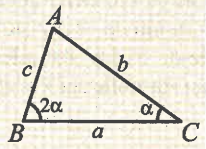
A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{2}$ **E)** 5

24.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(BCD) = \alpha$
$m(CAB) = 2\alpha$
$|AD| = 7$ br
$|DB| = 3$ br
olduğuna göre
$|BC| = x$ kaçtır?



A) $\sqrt{39}$ B) $\sqrt{65}$ C) $\sqrt{67}$ **D)** $\sqrt{69}$ E) 9

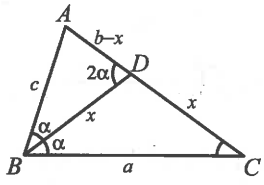
Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 2 \cdot m(ACB) = 2\alpha$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a^2 = b \cdot c$ B) $b^2 = a \cdot c$ C) $c^2 = a \cdot b$
D) $c^2 = a \cdot (a+b)$ E) $b^2 = c \cdot (a+c)$

Çözümü: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. BD iç açıortayını çizelim.



$m(DBC) = m(DCB)$ olacağından DBC ikizkenar olur ve bundan dolayı $|BD| = |DC| = x$ br dersek, $|AD| = b - x$ br olur. Diğer yandan $m(ADB) = 2\alpha$ ve $m(ABD) = \alpha$ olduğundan ABD ile ACB üçgeni benzer olurlar. Bu benzerlikten doğan eşlemeyi kuralım:

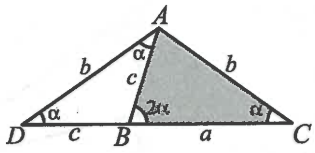
$$\frac{b-x}{c} = \frac{c}{b} = \frac{x}{a}$$

Birinci eşitlikten $x = \frac{ac}{b}$, ikinci eşitliktense $x = \frac{b^2 - c^2}{b}$ bulunur. Bu iki değer eşitlenirse $ac = b^2 - c^2$ yani

$$b^2 = c \cdot (a + c)$$

bulunur.

İkinci yol. Alt şekilden takip edelim.



Üst şekildeki gibi CAD ikizkenar üçgeni oluşturulursa ABD üçgeni de ikizkenar olur.

$$m(DAB) = m(DCA)$$

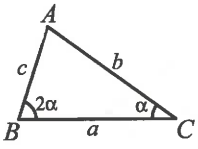
olduğundan formülümüzü kullanabiliriz: $b^2 = c\cdot(a + c)$ olacağı aşikar.

Doğru cevap: E.

Daha önce Stewart Teoremi'ni anlattığımız derste de bu soruyu ikizkenar üçgenler için bulduğumuz zarif Stewart formülüyle çözmüştük. Bitmedi, daha iç açıortay dersinde de başka çözümler göstereceğiz. Hatta dileyen yarım açı formüllerini kullanarak trigonometri ile de çözebilir.

Örnek. *Kenarlar uzunlukları ardışık olan tek α-2α üçgeni aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 3-4-5 B) 4-5-6 C) 6-7-8 D) 7-8-9 E) 8-9-10



Kanıt: Yukarıdaki şekilden de anlaşıldığı üzere b en kısa kenar olamaz, c de en uzun kenar olamaz. Biz b'yi ortanca kabul edelim, c'yi de en küçük. Çelişki çıkarsa diğer şıkları inceleyeceğiz.

Kenarlar ardışık olduğundan $a = p + 1$, $b = p$, $c = p - 1$ olsun. O halde $b^2 = c\cdot(a + c)$ formülünde yerlerine yazalım. $p^2 = 2p\cdot(p - 1)$ olur. Buradan $p = 2$ çıkar ki (1, 2, 3) değerleri üçgen oluşturmaz, şimdi diğer şıkkı inceleyelim.

b en uzun c en kısa olsun. $a = p$, $b = p + 1$, $c = p - 1$ alalım. $b^2 = c\cdot(a + c)$ formülünde yerlerine yazalım. $(p + 1)^2 = (p - 1)\cdot(2p - 1)$ diye $p^2 + 2p + 1 = 2p^2 - 3p + 1$ olur, buradan da $p = 5$ çıkar. Bundan başka p değeri bulunamayacağından (4, 5, 6) bulunabilecek tek çözümdür.

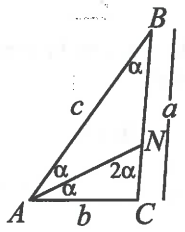
Doğru cevap: B.

25.
En büyük iç açısının ölçüsü, en küçük iç açısının ölçüsünün 2 katı olan üçgenler içinde sadece bir tanesinin kenarları ardışıktır.
Bu üçgenin kenar uzunlukları hangi şıkta verilmiştir?

A) 3-4-5 **B)** 4-5-6 C) 5-6-7 D) 6-7-8 E) 7-8-9

Örnek [1991 Amerikan Matematik Olimpiyadı].
C açısı geniş ve A açısı B açısının 2 katı olan kenarları tamsayılı çevrece en küçük üçgen (28, 16, 33) *kenarlarına sahiptir. Kanıtlayınız.*

Kanıt: Şartları sağlayan çevrece en küçük üçgen yan şekilde verilen ABC üçgeni olsun.



A iç açıortayı BC'yi N'de kessin.

$$a^2 = b\cdot(b + c)$$

olduğunu biliyoruz. Burada b ile $b + c$ aralarında asal olmalıdır. Değilse, 1'den farklı bir d ortak böleni bulunurdu ve bu ortak bölen a'yı da bölerdi. Kenarları a/d, b/d, c/d olan üçgense hem ABC'ye benzer hem de daha küçük çevreli olurdu. Bu ise ABC üçgeninin seçilişine uymaz. Buradan böylece aralarında asal b ve $b + c$ sayılarının tamkare olduklarını çıkarıyoruz.

$b = m^2$, $b + c = n^2$, $a = mn$ $(m, n \in \mathbb{N}^+)$ olsun. ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği $c < a + b$'yi, C açısının geniş olması da $c^2 > a^2 + b^2$'yi veriyor. Bu eşitsizlikleri m ve n türünden yazdığımızda

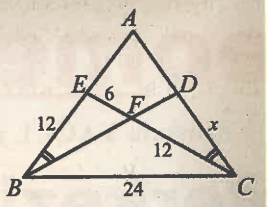
$$\sqrt{3} < n/m < 2$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Bu eşitsizlikler $m = 1, 2, 3$ olduğunda hiçbir n değeri için sağlanmazlar. Buna göre $m \geq 4$ ve $n^2 \geq 3m^2 \geq 48$ olur, o halde $n \geq 7$ olmalıdır, dolayısıyla da

$$a + b + c = m\cdot n + n^2 \geq 4\cdot 7 + 7^2 = 77$$

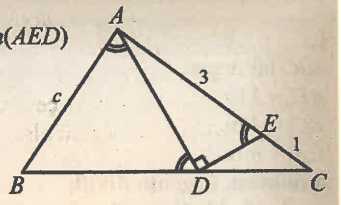
olmalıdır. Sonuçta da bahsi geçen en küçük çevreyi 77 ve buna bağlı olarak (a, b, c) değerlerini (28, 16, 33) olarak buluruz.

26.
ABC bir üçgen
$m(ABD) = m(ECA)$
$|EB| = |CF| = 12$ br
$|FE| = 6$ br
$|BC| = 24$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



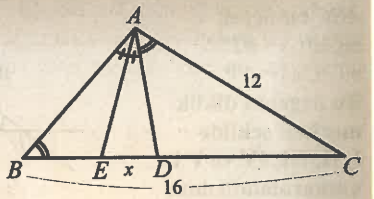
A) 8 B) $6\sqrt{2}$ C) 9 **D)** $4\sqrt{6}$ E) 10

27.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(BDA) = m(AED)$
$AD \perp DE$
$|AE| = 3$ br
$|EC| = 1$ br
olduğuna göre
$|AB| = c$ kaç br dir?



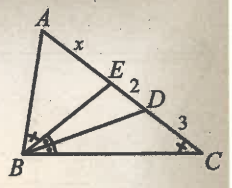
A) 2,5 **B)** 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

28.
ABC bir üçgen
$m(CAD) = m(ABC)$
$m(BAE) = m(DAE)$
$|AC| = 12$ br
$|BC| = 16$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

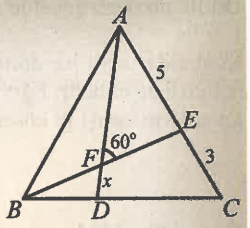
29.
ABC bir üçgen
$m(ABE) = m(BCA)$
$m(EBD) = m(DBC)$
$|CD| = 3$ br
$|DE| = 2$ br
olduğuna göre
$|EA| = x$ kaç br dir?



A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 7

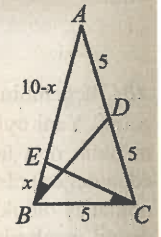
30.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$m(AFE) = 60°$
$|AE| = 5$ br
$|EC| = 3$ br
$|FD| = x$ br

olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 **B)** $\frac{9}{7}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{15}{7}$

31.
ABC bir üçgen
$m(ABD) = m(BCE)$
$|BC| = |CD| = |DA| = 5$ br
$|EB| = x$ br
$|AE| = 10 - x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



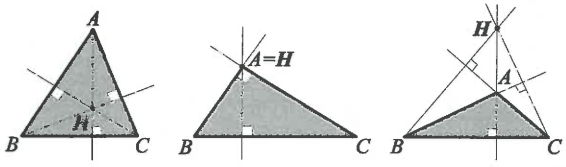
A) 1 B) 1,5 **C)** 2
D) 2,5 E) 3

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Diklik Merkezi

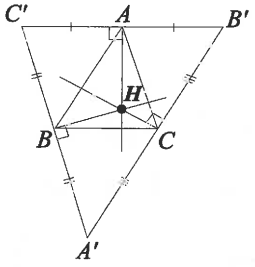
Bir üçgenin üç kenarına ait yükseklikleri daima tek noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin **Diklik Merkezi** denir.



Diklik merkezi genelde H ile gösterilir.

Üçgen dar açılı ise diklik merkezi üçgenin içinde, geniş açılı ise dışındadır. Eğer üçgen dik ise diklik merkezi dik kenarların kesiştiği köşedir.

Önce yüksekliklerin neden noktadaş olduğunu gösterelim, daha sonra da diklik merkezinin üçgenin içinde, üstünde veya dışında olmasının neden üçgenin açılarına bağlı olduğuna bir yorum getirelim.



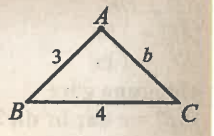
ABC üçgeninin ters-orta üçgeni olan $A'B'C'$ üçgenini çizelim. Yani öyle bir $A'B'C'$ üçgeni çizelim ki ABC üçgeni onun orta üçgeni (kenar orta noktalarını köşe kabul eden üçgen) olsun. Bir üçgeninin kenar orta dikmelerinin noktadaş olduklarını ve kesiştikleri noktanın da üçgenin çevrel çemberinin merkezi olduğunu biliyoruz. O halde bu $A'B'C'$ üçgeninde de böyle. Orta üçgenin kenarları asıl üçgene daima paralel olduğundan bahsi geçen kenar orta dikmeler ABC üçgeninin yükseklikleridir. O halde ilk kısım kanıtlanmış oldu.

Gelelim ikinci kısma:

ABC üçgeni geniş (veya dar) açılı olsaydı $A'B'C'$ üçgeni de ABC ye benzer olduğundan geniş (veya dar) açılı olacaktı. Böyle üçgenlerin çevrel çember merkezinin üçgenin dışında (veya içinde) olacağını biliyoruz. O halde diklik merkezi de üçgenin dışında (veya içinde) olur.

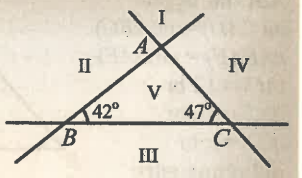
Eğer ABC bir dik üçgen olsaydı, $A'B'C'$ üçgeni de dik üçgen olurdu ki çevrel çember merkezi hipotenüsünün orta noktası olacaktı, bu da orta üçgeninin herhangi bir köşesi demek zaten...

1.
ABC bir üçgen
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 4$ br
$|CA| = b$ br
A noktası, üçgenin diklik merkezi olduğuna göre b kaçtır?



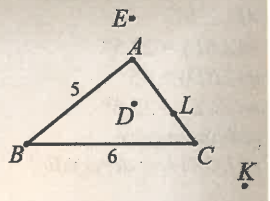
A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) $\sqrt{7}$ D) 4 E) 5

2.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = 42°$
$m(BCA) = 47°$
Bu üçgenin diklik merkezi şekilde I, II, III, IV ve V ile numaralandırılmış bölgelerden hangisindedir?



A) I B) II C) III D) IV E) V

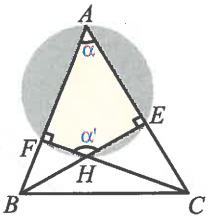
3.
ABC bir üçgen
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 6$ br
Bu üçgenin diklik merkezi, şekilde verilen konumlarına göre A, B, C, D, E, F, K, L noktalarından kaç tanesi olabilir?



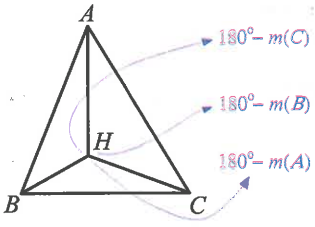
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Diklik merkezinin hangi durumlarda hangi bölgede yer aldığını öğrendik. Artık yavaş yavaş tam koordinatlarını yani bulunduğu bölgedeki tam yerini de öğreneceğiz. Bunu tabii ki açı ve uzunluk ölçüleriyle yapabileceğiz. Öncelikle diklik merkezinin temel veya yardımcı elemanlarla ilişkisine göz atmalıyız. Yüksekliklerin hangi ölçüyle kesiştikleriyle başlayalım.

Bir ABC üçgeni ve BE ile CF yüksekliklerini çizelim. Bu yüksekliklerin kesiştiği H noktasının diklik merkezi olduğunu biliyoruz.



Üst şekilden de görüldüğü üzere $AFHE$ dörtgeninde F ve E açıları dik oluyor. Bu da dörtgenin karşılıklı açı ölçüleri toplamının 180° olduğu anlamına gelir. Burada pek işimize yaramayacak ama bu dörtgenin dört köşesinin çembersel olduğunu da hatırlatalım. Her neyse, bu dörtgende $m(A) = \alpha$ ve $m(H) = \alpha'$ dersek α ile α' ölçülerinin bütünler olduğunu anladık. Diğer yandan EHC açısının ölçüsü de α olacağından şunu söyleyebiliriz:

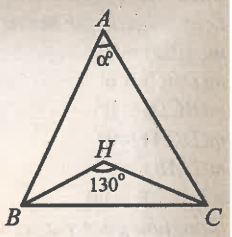


Bir üçgende iki farklı köşeden inen yükseklikler, üçüncü köşenin ölçüsüyle (veya bütünleriyle) kesişirler.

4.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi

$m(BHC) = 130°$
$m(CAB) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?

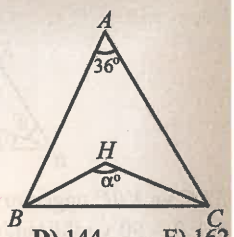


A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

5.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi

$m(CAB) = 36°$
$m(CHB) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?

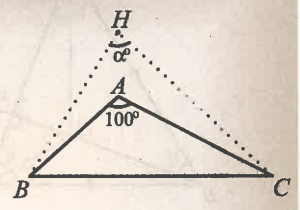


A) 100 B) 108 C) 135 **D) 144** E) 162

6.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi

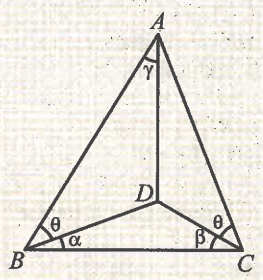
$m(CAB) = 100°$
$m(CHB) = \alpha°$

olduğuna göre α kaçtır?



A) 40 B) 50 C) 60 **D) 80** E) 90

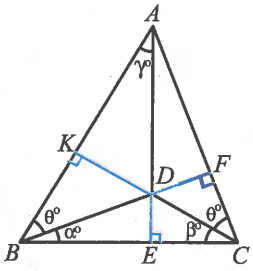
Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
D iç bölgede bir nokta
$m(ABD) = \theta^\circ$
$m(DBC) = \alpha^\circ$
$m(BCD) = \beta^\circ$
$m(DCA) = \theta^\circ$
$m(DAB) = \gamma^\circ$
$\alpha + \beta + \theta = 90$
olduğuna göre γ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) α B) β C) θ D) $\theta - \alpha$ E) 2α

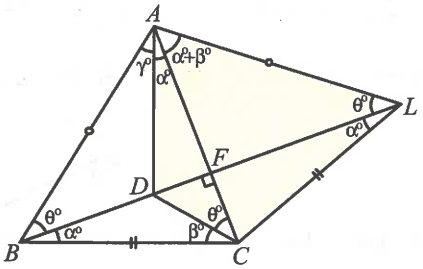
Çözümü: İki farklı yoldan çözüm göstereceğiz.

Birinci yol. *AD*, *BD*, *CD* doğrularının *BC*, *CA*, *AB* kenarlarını kestikleri noktalar sırasıyla *E*, *F*, *K* olsun.



FBC ve *KBC* üçgenlerinde iç açı ölçüleri toplanırsa, $\alpha + \beta + \theta = 90$ verildiğinden, $BF \perp CA$ ve $CK \perp AB$ olduğu görülür. [*BF*] ve [*CK*] birer yükseklik ise onların kesiştiği *D* noktası *ABC* üçgeninin diklik merkezidir. O halde *D*'den geçen [*AE*] de yükseklik olmalıdır. *ABE* üçgeninde iç açı ölçüleri toplanırsa $\gamma = \beta$ olduğu anlaşılır.

İkinci yol. *BD*'nin *CA*'yı kestiği noktaya *F* diyelim. *BFC* üçgeninin iç açı ölçüleri toplamından $BF \perp CA$ olduğunu biliyoruz. Şimdi [*BF*]'yi *F* yönünde kendi boyu kadar uzatıp *L*'ye gelelim. *BAL* ve *BCL* üçgenlerinin ikizkenar olacağına dikkatinizi çekerim.



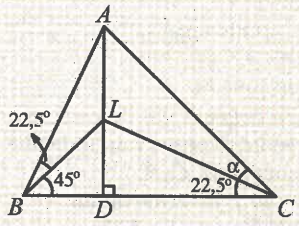
Oluşan *ADCL* dörtgeninde hem $m(DCA) = \theta^\circ$ hem de $m(DLA) = \theta^\circ$ olduğundan, daha önce anlatıldığı üzere; *A*, *D*, *C*, *L* noktaları çemberseldir. Bu yüzden $m(CLD) = \alpha^\circ$ ise $m(CAD) = \alpha^\circ$ olur. Son olarak, *BAL* ikizkenar üçgen olduğundan *AF* bu üçgende tepeye ait iç açıortay olmalıdır. $m(BAF) = m(LAF)$ olması gerektiğinden

$$\gamma + \alpha = \alpha + \beta$$

eşitliği gereğince $\gamma = \beta$ bulunur.

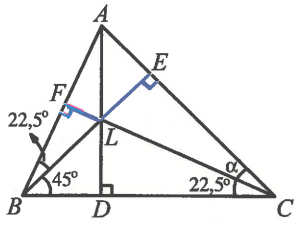
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \perp BC$
$m(ABL) = 22{,}5^\circ$
$m(LBD) = 45^\circ$
$m(BCL) = 22{,}5^\circ$
olduğuna göre
m(LCA) kaç derecedir?



A) 15 B) 20 C) 22,5 D) 25 E) 30

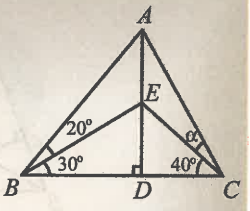
Çözüm: *CL*'nin *AB*'yi kestiği noktaya *F* diyelim.



FBC üçgeninin iç açılarının ölçülerini toplarsak $m(CFB) = 90^\circ$ buluruz. Şu durumda hem *AD* hem de *CF* yükseklik olduğundan *L* noktası *ABC* üçgeninin diklik merkezidir. O halde *BE* de yükseklik olmalıdır. Bu durumda $\alpha = 22{,}5^\circ$ olarak bulunur.

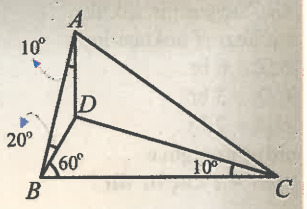
Doğru cevap: C.

7.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(ABE) = 20^\circ$
$m(EBD) = 30^\circ$
$m(BCE) = 40^\circ$
olduğuna göre
m(ECA) kaç derecedir?



A) 10 **B) 20** C) 25 D) 30 E) 40

8.
ABC bir üçgen
$m(DAB) = 10°$
$m(ABD) = 20°$
$m(DBC) = 60°$
$m(BCD) = 10°$
olduğuna göre
$m(DCA)$ kaç derecedir?

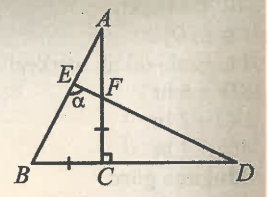


A) 10 B) 15 **C) 20** D) 30 E) 60

[Bilal KURT]

9.
ABC ve EBD birer üçgen
$AC \perp BD$
$|BC| = |CF|$
$|AC| = |CD|$

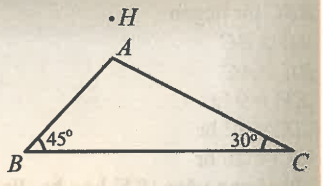
olduğuna göre
$m(DEB) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 75 **B) 90** C) 105 D) 108 E) 120

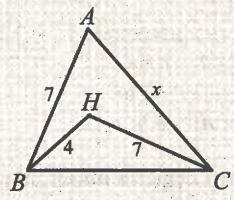
10.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$m(ABC) = 45°$
$m(BCA) = 30°$

H noktasının BC'ye uzaklığı $2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|AB|$ kaç br dir?



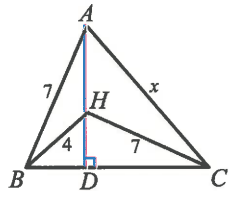
A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
H diklik merkezi
$|AB| = 7$ br
$|BH| = 4$ br
$|HC| = 7$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\sqrt{79}$ B) $\sqrt{80}$ C) 9 D) $\sqrt{82}$ E) $\sqrt{83}$

Çözüm: H üçgenin diklik merkezi olduğundan A'ya ait yükseklik H'den geçmelidir. Bu da AH doğrusunun BC'yi dik keseceği anlamına gelir.



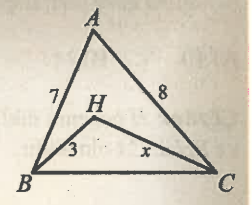
AD yüksekliği çizilirse, şeklin daha önce dik üçgen konusundan Katlama Sanatı ismiyle anlattığımız şekle dönüştüğü görülür. Bu şeklin de formülünü daha önce çıkarmıştık. Uygulayalım:

$$x^2 + 4^2 = 7^2 + 7^2$$
$$x^2 + 16 = 49 + 49$$
$$x^2 = 82$$

bulunduğundan $x = \sqrt{82}$ olmalıdır.

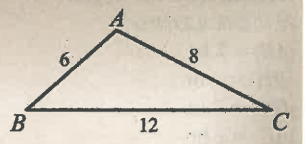
Doğru cevap: D.

11.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$|CA| = 8$ br
$|AB| = 7$ br
$|BH| = 3$ br
olduğuna göre
$|HC| = x$ kaç br dir?



A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{22}$ **D) $2\sqrt{6}$** E) 5

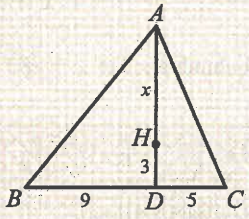
12.
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
$|CA| = 8$ br



Bu üçgenin diklik merkezinin kendisine en uzak olan iki köşeye uzaklıklarının karelerinin pozitif farkı kaçtır?

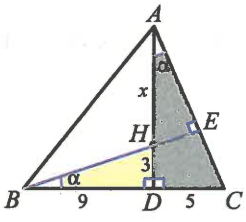
A) 4 B) 16 C) 28 D) 80 E) 108

Örnek. *ABC bir üçgen*
H diklik merkezi
A, H, D noktaları doğrusal
$|HD| = 3$ br
$|BD| = 9$ br
$|DC| = 5$ br
olduğuna göre $|AH|$ *kaç br dir?*



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 1

Çözüm: H üçgenin diklik merkezi olduğundan $AD \perp BC$ ve $BH \perp CA$ olmalıdır.



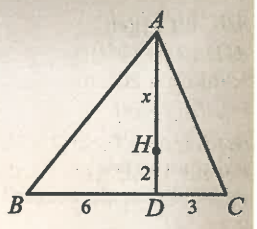
Diğer yandan BDH ve AEH dik üçgenlerinde H açıları eş olduğundan B ve A açıları da eş olmalıdır. $m(HBD) = \alpha$ dersek $m(EAH) = \alpha$ olur. Şimdi de taralı BDH ile ADC üçgenlerinde benzerlik yaparak sonuca ulaşacağız. Üçgenler dik olduğundan eşleme yerine tanjanttan gidelim.

$$\tan\alpha = \frac{3}{9} = \frac{5}{3+x}$$

eşitliğinden $x = 12$ olarak bulunur.

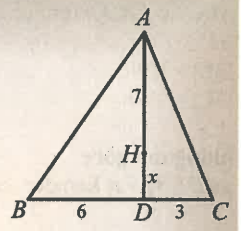
Doğru cevap: C.

13.
ABC üçgeninin diklik merkezi H noktasıdır.
$|BD| = 6$ br
$|CD| = 3$ br
$|HD| = 2$ br
olduğuna göre
$|AH| = x$ kaç br dir?



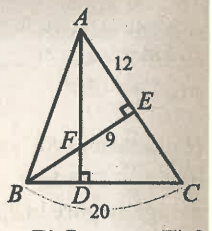
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

14.
ABC bir üçgen
$H \in [AD]$
H üçgenin diklik merkezi
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 3$ br
$|AH| = 7$ br
olduğuna göre
$|HD| = x$ kaç br dir?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

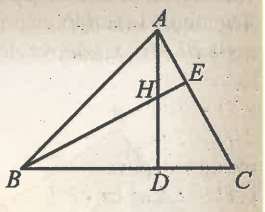
15.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$|EF| = 9$ br
$|AE| = 12$ br
$|BC| = 20$ br
olduğuna göre $|BF|$ kaç br dir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

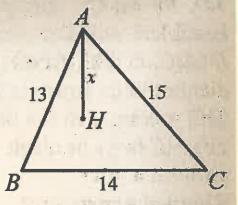
16.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{H\}$
H diklik merkezi

Şekilde kaç farklı birbirine benzer üçgen çifti vardır?



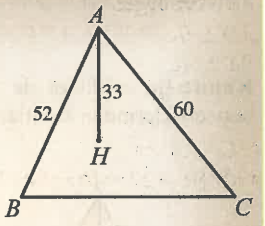
A) 4 B) 5 **C) 6** D) 7 E) 8

17.
ABC üçgeninin diklik merkezi H noktasıdır.
$|AB| = 13$ br
$|BC| = 14$ br
$|CA| = 15$ br
olduğuna göre
$|AH| = x$ kaç br dir?



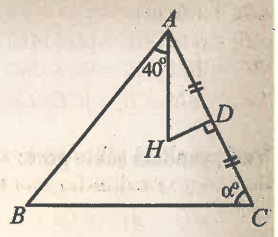
A) $\frac{33}{4}$ B) 8 C) $\frac{31}{4}$ D) 7 E) $\frac{27}{4}$

18.
ABC dar açılı bir üçgen
H diklik merkezi
$|AB| = 52$ br
$|AC| = 60$ br
$|AH| = 33$ br
olduğuna göre
$|BC|$ kaç br dir?



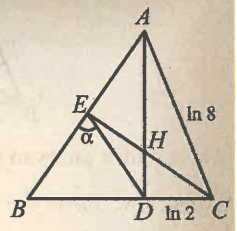
A) 50 B) 54 **C) 56** D) 60 E) 68

19.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$HD \perp CA$
$|CD| = |DA|$
$m(HAB) = 40°$
$m(BCA) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



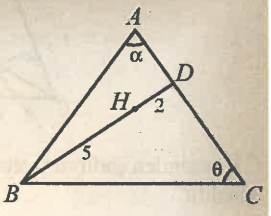
A) 50 B) 55 C) 60 **D) 65** E) 70

20.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|CD| = \ln 2$ br
$|CA| = \ln 8$ br
$m(DEB) = \alpha$
olduğuna göre
cos α kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

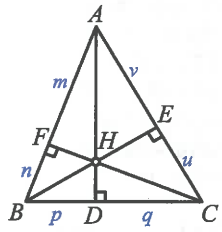
21.
ABC bir üçgen
$BH \cap AC = \{D\}$
H diklik merkezi
$|BH| = 5$ br
$|HD| = 2$ br
$m(CAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$
olduğuna göre
tan α·tan θ çarpımı kaçtır?



A) 3 **B)** 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

Yükseklik Teoremi (2). *Bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve yükseklik ayakları sırasıyla D, E, F ise;*

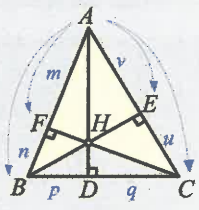
$|AF|\cdot|AB| = |AE|\cdot|AC|$
$|BF|\cdot|BA| = |BD|\cdot|BC|$
$|CD|\cdot|CB| = |CE|\cdot|CA|$



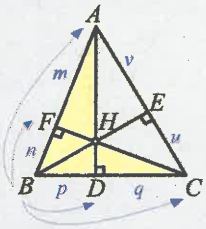
Yani, yandaki şekle göre;

$m\cdot(m+n) = v\cdot(v+u)$
$p\cdot(p+q) = n\cdot(m+n)$
$u\cdot(v+u) = q\cdot(p+q)$

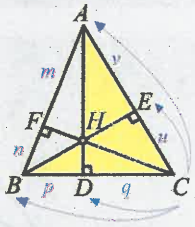
Kanıt: İlk eşitlik $AEB \sim AFC$ benzerliğinden, ikinci eşitlik $BFC \sim BEC$ benzerliğinden, üçüncü eşitlik de $CDA \sim CFA$ benzerliğinden çıkar. Ama biz bu üçgenlerde tek tek eşleme yapmayacağız, çünkü geçen yazımızda bu benzerliklerden doğan eşitlikleri 'şadırvan' ile bulmuştuk, onu kullanacağız.



A köşesinden şadırvan yapılırsa; $m\cdot(m+n) = v\cdot(v+u)$,



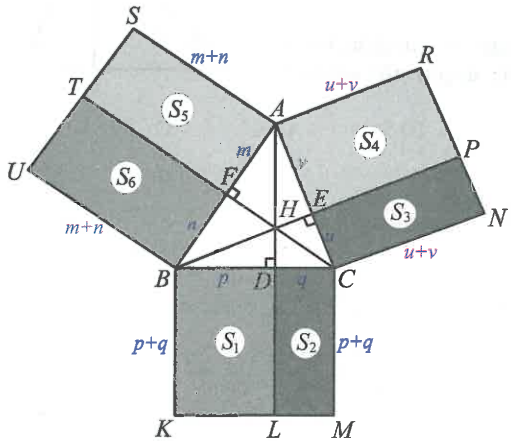
B köşesinden şadırvan yapılırsa; $p\cdot(p+q) = n\cdot(m+n)$,



C köşesinden şadırvan yapılırsa; $u\cdot(v+u) = q\cdot(p+q)$ elde edilir.

Gördüğünüz gibi; önce A, sonra B, daha sonra da C köşesine göre şadırvan uygulaması yapılırsa üç eşitlik de armut gibi meydana çıkar. Anlayacağınız, yükseklik teoremi bir önceki konuda görmüş olduğumuz kuvvet teoreminden başka bir şey değildir. Sadece orada tek bir köşeden formül uygulanabiliyordu, burada istediğiniz köşeden uygulayabiliyorsunuz.

Yükseklik Teoremi (2)'nin Geometrik Yorumu: ABC üçgeninin kenarları üzerine, üçgenin dışına doğru sırasıyla $BKMC$, $CNRA$ ve $ASUB$ karelerini yerleştirelim.



AD, BE ve CF doğrularının KM, NR ve SU kenarlarını kestikleri noktalar sırasıyla L, P ve T olsun. $BKLD$, $DLMC$, $CNPE$, $EPRA$, $ASTF$ ve $FTUB$ dikdörtgenlerinin alanlarına da sırasıyla S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ve S_6 br^2 diyelim. $|AF| = m$ br, $|FB| = n$ br, $|BD| = p$ br, $|DC| = q$ br, $|CE| = u$ br ve $|EA| = v$ br olsun.

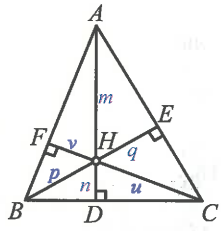
Kanıtladığımız

$p\cdot(p+q) = n\cdot(n+m)$ eşitliği $S_1 = S_6$
$u\cdot(u+v) = q\cdot(p+q)$ eşitliği $S_2 = S_3$
$m\cdot(m+n) = v\cdot(u+v)$ eşitliği $S_4 = S_5$

demektir.

Yükseklik Teoremi (3). *Bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve yükseklik ayakları D, E, F ise;*

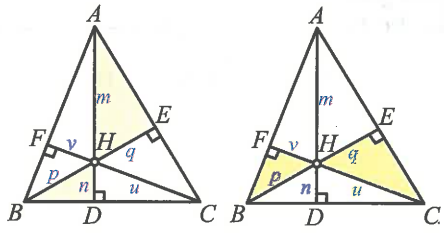
$|AH|\cdot|HD| = |BH|\cdot|HE| = |CH|\cdot|HF|$



Yani, yandaki şekle göre;

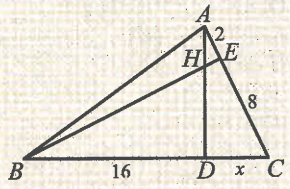
$m\cdot n = p\cdot q = u\cdot v$

Kanıt: Bu eşitlikler de $AHE \sim DHB$ ve $CEH \sim BFH$ benzerliklerinden kanıtlanır. Kısacası 'papyon'dan…



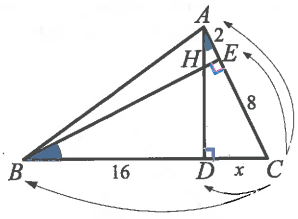
Soldaki papyondan $m\cdot n = p\cdot q$ gelir, sağdaki papyondan da $p\cdot q = u\cdot v$ gelir, birleştirilirse $m\cdot n = p\cdot q = u\cdot v$ çıkar.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| \cap |BE| = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AE| = 2$ br
$|EC| = 8$ br
$|BD| = 16$ br
olduğuna göre
$|DC| = x$ *kaç br dir?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: ABC üçgeninde H diklik merkezi olduğundan $AD \perp BC$ ve $BE \perp CA$ olmalıdır. Bu durum da CAD ile EBC açılarını eş yapar.



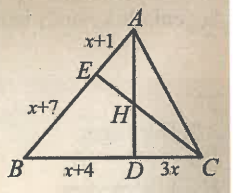
O halde C köşesini tutarak kuvvet teoremi uygularsak;

$$x\cdot(x+16) = 8\cdot(8+2)$$
$$x^2 + 16x = 80$$
$$x^2 + 16x - 80 = 0$$
$$(x+20)\cdot(x-4) = 0$$

elde edilir ki x pozitif olması gerektiğinden $x = 4$ bulunur.

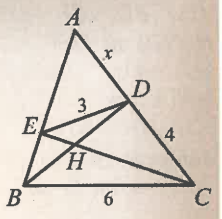
Doğru cevap: B.

22.
ABC bir üçgen
$|AD| \cap |CE| = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AE| = x + 1$ br
$|EB| = x + 7$ br
$|BD| = x + 4$ br
$|DC| = 3x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



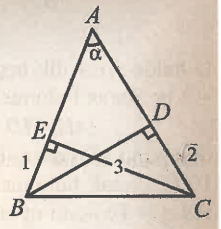
A) 7 B) 6 **C) 5** D) 4 E) 3

23.
ABC bir üçgen
$|BD| \cap |CE| = \{H\}$
H diklik merkezi
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 4$ br
$|DE| = 3$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre $3x^2$ kaçtır?



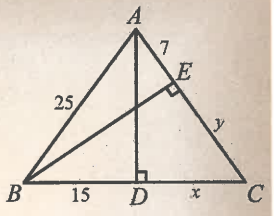
A) 18 **B) 20** C) 21 D) 22 E) 24

24.
ABC bir üçgen
$CE \perp AB$
$BD \perp AC$
$|BE| = 1$ br
$|EC| = 3$ br
$|DC| = \sqrt{2}$ br
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$ kaç derecedir?



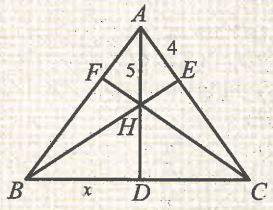
A) 22,5 B) 30 **C) 45** D) 60 E) 67,5

25.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$|AB| = 25$ birim
$|AE| = 7$ birim
$|BD| = 15$ birim
$|CE| = y$ birim
$|CD| = x$ birim
olduğuna göre
$y - x$ farkı kaçtır?



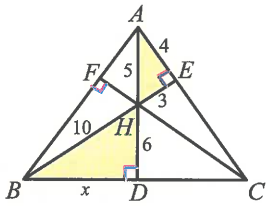
A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE \cap CF = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AE| = 4$ br
$|AH| = 5$ br
$|CH| \cdot |HF| = 30$ br^2
olduğuna göre
$|BD| = x$ *kaç br dir?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: H noktası ABC üçgeninin diklik merkeziyse $AD \perp BC$, $BE \perp CA$ ve $CF \perp AB$ olacağını biliyoruz.



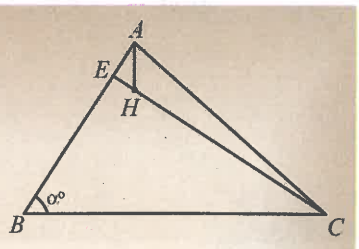
O halde HEA dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|HE| = 3$ br olarak bulunur. Diğer yandan

$$|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten $|HD| = 6$ br ve $|HB| = 10$ br olarak bulunur. Sonuç olarak HDB dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $|BD| = 8$ br bulunur.

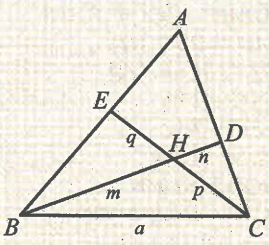
Doğru cevap: C.

26.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$|BE| = 5 \cdot |EA|$
$|HC| = 7 \cdot |HA|$
$m(B) = \alpha^\circ$
olduğuna göre
α kaçtır?



A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

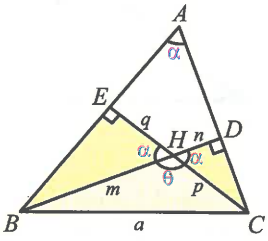
Örnek. *ABC bir üçgen*
$BD \cap CE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|BC| = a$ br
$|BH| = m$ br
$|HD| = n$ br
$|CH| = p$ br
$|HE| = q$ br



olduğuna göre $m \cdot (m + n) + p \cdot (p + q)$ *toplamının a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) a B) a^2 C) a^4 D) $a \cdot (a+1)$ E) $a \cdot (a-1)$

Çözüm: ABC üçgeninde H diklik merkezi olduğundan $BD \perp CA$ ve $CE \perp AB$ olur. Diğer yandan $m(A) = \alpha$ ve $m(CHB) = \theta$ denirse $m(DHC) = m(EHB) = \alpha$ olur.



DHC ve EHB dik üçgenlerinden

$$q = m \cdot \cos\alpha \text{ ve } n = p \cdot \cos\alpha$$

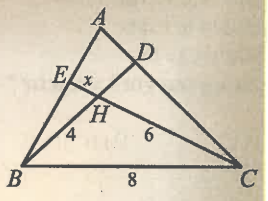
eşitliklerini not ederek denkleme geçelim:

$$\begin{aligned} m \cdot (m+n) + p \cdot (p+q) &= m^2 + mn + p^2 + pq \\ &= m^2 + m(p\cos\alpha) + p^2 + p(m\cos\alpha) \\ &= m^2 + p^2 + 2mp\cos\alpha \\ &= m^2 + p^2 - 2mp\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir ki $m^2 + p^2 - 2mp\cos\theta = a^2$ olduğunu HBC üçgeninde kosinüs teoreminden bilmekteyiz.

Doğru cevap: B.

27.
ABC bir üçgen
$BD \cap CE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|HB| = 4$ br
$|BC| = 8$ br
$|CH| = 6$ br
$|HE| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

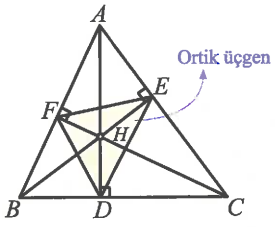
Ortik Üçgen. Bir üçgenin dikme ayaklarını köşe kabul eden üçgene, o üçgenin **ortik üçgeni** denir.

Bu üçgenin iki önemli özelliği vardır:

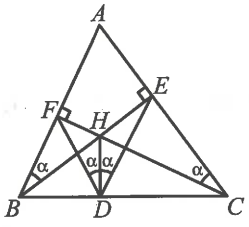
Birincisi, *üç köşesi de üçgenin üç farklı kenarı üzerinde bulunan üçgenler içinde çevresi en küçük olanıdır.* Bu teorem liselerde verilmez ama meraklıları için ben yazının sonuna ekledim, dileyen neden böyle olduğunu oradan okuyabilir.

İkincisi ve bizi ilgilendiren özelliği, *bir üçgenin yüksekliklerinin, o üçgenin ortik üçgeninin iç açıortayları olmasıdır.* Şimdi hemen bunu izah edelim:

Bir ABC üçgeni, ardından da AD, BE, CF yüksekliklerini çizelim.



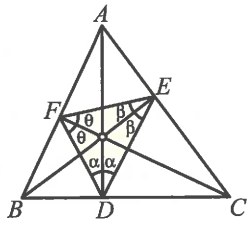
Tanım gereği, DEF üçgenine ortik üçgeni denir.



$m(ABE) = \alpha$ diyelim. FHB ile EHC üçgenleri benzer olduğundan aynı zamanda $m(ACF) = \alpha$ olur. Bunu F, B, C, E noktalarının çemberselliğinden de yazabilirdik. Benzer şekilde F, B, D, H ve C, E, H, D noktaları da kendi aralarında çembersel olduklarından

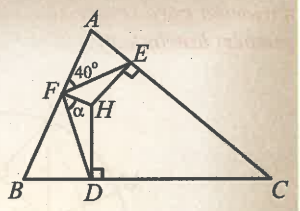
$$m(HDF) = m(HBF) = \alpha$$
$$m(HDE) = m(HCE) = \alpha$$

olur, bu da $m(HDF) = m(HDE) = \alpha$ demektir.



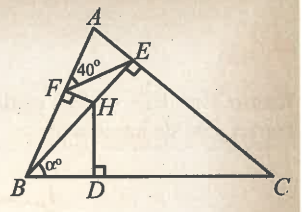
Benzer işlemler diğer köşelerde de yapılırsa; ABC üçgenine göre yükseklik olan DA, EB, CF uzunlukları DEF üçgenine göre iç açıortay oldukları görülür.

28.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$HD \perp BC$
$HE \perp CA$
$HF \perp AB$
$m(AFE) = 40°$
$m(HFD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



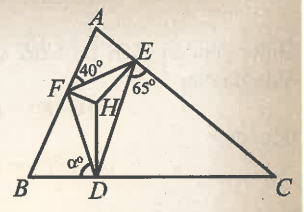
A) 40 B) 45 **C) 50** D) 60 E) 70

29.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$HD \perp BC$
$HE \perp CA$
$HF \perp AB$
$m(AFE) = 40°$
$m(HBD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



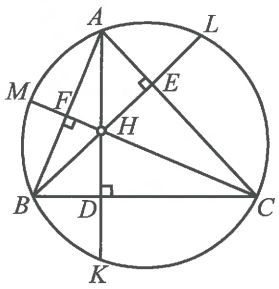
A) 40 B) 45 **C) 50** D) 60 E) 70

30.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$HD \perp BC$
$HE \perp CA$
$HF \perp AB$
$m(AFE) = 40°$
$m(CED) = 65°$
$m(FDB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 60 B) 65 C) 70 **D) 75** E) 00

Teorem. *Diklik merkezi olan H noktasının üçgenin kenarlarına göre simetrikleri daima ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir.*

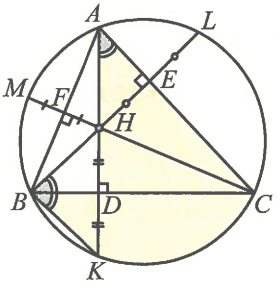


Diğer bir deyişle; üstteki şekle göre *yükseklikler çevrel çemberi şekildeki gibi K, L, M noktalarında kesiyorsa*

$$|HD| = |DK|$$
$$|HE| = |EL|$$
$$|HF| = |FM|$$

olur.

Kanıt: Biz $|HD| = |DK|$ eşitliğini kanıtlayalım, diğerleri benzer şekilde kanıtlanabilir.



AEH ile BDH üçgenlerinin ikişer açısı eşit ölçüde olduğundan

$$m(EAH) = m(DBH).$$

Diğer yandan CAK ile CBK aynı yayı gören çevre açılar olduğundan

$$m(CAK) = m(CBK),$$

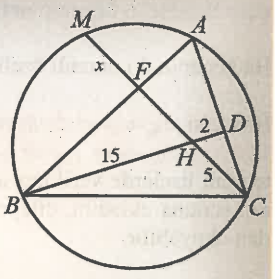
o halde

$$m(HBD) = m(KBD).$$

HBK üçgeninde BD hem yükseklik hem açıortay olduğundan HBK ikizkenardır, dolayısıyla

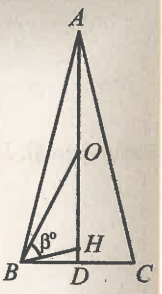
$$|HD| = |DK|.$$

31.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$BD \cap CM = \{H\}$
$|BH| = 15$ br
$|HD| = 2$ br
$|CH| = 5$ br
$|MF| = x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



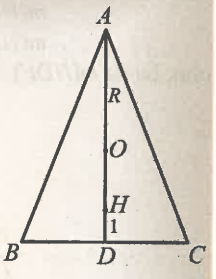
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

32.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
H diklik merkezi
$O \in [AH]$
$[AH] \cap [BC] = \{D\}$
$m(CAB) = 30°$
$m(OBH) = \beta°$
olduğuna göre
β kaçtır?



A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 60 E) 67,5

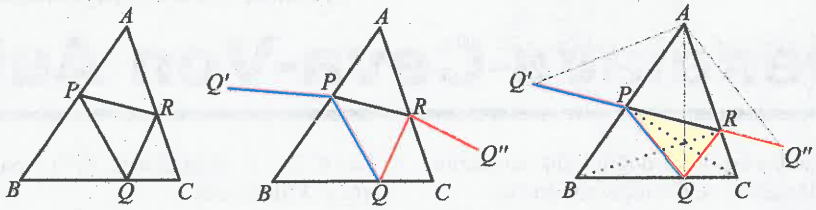
33.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
H diklik merkezi
$O \in [AH]$
$[AH] \cap [BC] = \{D\}$
$m(CAB) = 45°$
$|HD| = 1$ br
$|AO| = R$ br
olduğuna göre R kaçtır?



A) $1+\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

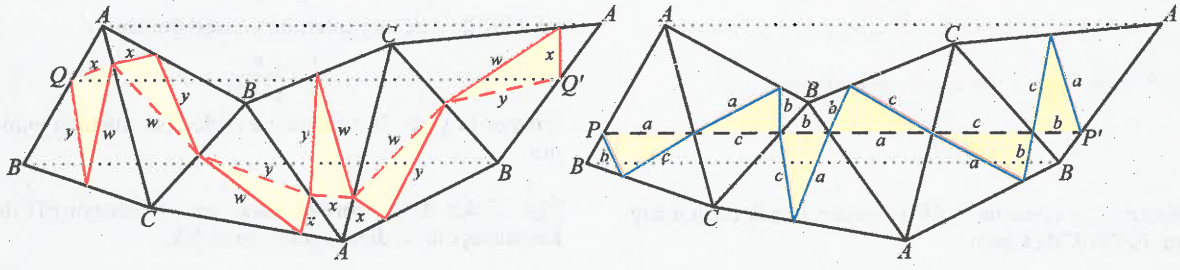
Teorem [Fagnano]. *Bir üçgenin iç bölgesinde, üç köşesi bu üçgenin üç farklı kenarı üzerinde bulunan üçgenler içinde en küçük çevreye sahip olanı ortik üçgenidir.*

Kanıt: Herhangi bir dar açılı ABC üçgeni çizelim. $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üzerinde sırasıyla rastgele P, Q, R noktaları alıp PQR üçgenini oluşturalım (altta soldaki şekil). Daha sonra $[PQ]$'nun AB'ye göre simetriği olan $[PQ']$ ve $[RQ]$'nun AC'ye göre simetriği olan $[RQ'']$'yu çizelim (altta ortadaki şekil).



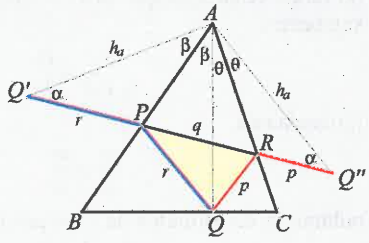
Çevre$(PQR) = |QP| + |PR| + |RQ| = |Q'P| + |PR| + |RQ''|$ olduğundan $|Q'P| + |PR| + |RQ''|$ toplamını ne kadar küçük tutarsak, PQR üçgeninin çevresi de o denli küçük olur. Bu da Q', P, R, Q'' noktalarının doğrusallığı ile mümkün. Yani $Q'PRQ''$ kırık çizgisini bir doğru parçası haline getirmeliyiz. Diğer yandan, A açısı sabit ve $m(Q'AQ'') = 2{\cdot}m(BAC)$ olduğundan $|Q'Q''|$ uzunluğunun en küçük olması $|Q'A| = |Q''A|$ uzunluklarının mümkün olan en küçük tutulması ile mümkün. Bu uzunluklar aynı zamanda $|QA|$'ya eşit olduğundan ve $|QA|$ en küçük değerini h_a olduğu zaman aldığından Q noktası da $[BC]$ kenarına ait yükseklik ayağı olmalı. Aynı işlemleri diğer köşeler için de yaparsak P ve R noktalarının da bulundukları kenarlar ait yükseklik ayakları olması gerektiğini buluruz (üstte sağdaki şekil). O halde çevrece en küçük üçgen ortik üçgendir.

Şimdi bu teoremin başka bir kanıtını sunacağız.



Herhangi bir ABC üçgeni ve köşeleri bu üçgenin farklı kenarları üzerinde olan başka bir üçgen daha çizelim. Kenar uzunlukları x, y, w olsun. Sonra yukarda gösterildiği üzere; bu üçgeni sırasıyla farklı kenarları üzerine katlayalım (simetrilerini çizelim). Beşinci katlamadan sonra AB kenarının, ilk üçgeninin AB kenarına paralel bir hal aldığını görürüz. QQ' kırık çizgisinin boyunun $2x + 2y + 2w$ yani içerde çizilen üçgenin çevresinin 2 katı olduğuna dikkat ediniz. Şimdi de aynı işlemleri, çizilen ilk ABC üçgeninin ortik üçgeni ile yapalım. Ortik üçgeninin kenarları da a, b, c olsun. ABC üçgeninin kenarlarının ortik üçgenin birer dış açıortayı olduğunu bulmuştuk ya, işte bu QQ' kırık çizgisini dosdoğru bir çizgi yapar (sağ şekildeki PP' doğrusu). $2a + 2b + 2c$ toplamının $2x + 2y + 2w$ toplamından küçük olduğu aşikar olduğu gibi olabilecek en küçük değer olduğu da gözler önünde. P noktasından P' noktasına daha kısa bir yol olabilir mi?

Peki bu en küçük çevrenin değeri ne acaba? Elde ettiğimiz son şeklin üzerinde biraz oynama yapacağız. Uzunluklar ve açılar yandaki gibi adlandırılsın.
$Q'PQ''$ üçgeninde sinüs teoreminden;



$$\frac{h_a}{\sin\alpha} = \frac{p+q+r}{\sin(2\beta+2\theta)} = \frac{p+q+r}{\sin 2\alpha} = \frac{p+q+r}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$p+q+r = 2h_a\cos\alpha = 2h_a\sin(\theta+\beta) = 2h_a\sin A$$

Benzer şekilde $p+q+r = Çevre(PQR) = 2h_b\sin B = 2h_c\sin C$ olur.

Şimdi $\text{Alan}(ABC) = S = \frac{1}{2}ah_a$ ve $\frac{a}{\sin A} = 2R$ eşitliklerinden h_a ve $\sin A$ değerlerini çekip bulduğumuz çevre formülünde yerlerine yazarsak; $Çevre(PQR) = \frac{2S}{R}$ bulunur. Diğer yandan $S = \frac{abc}{4R}$ olduğundan üstteki formülde R yerine $\frac{abc}{4S}$ yazarsak; $Çevre(PQR) = \frac{8S^2}{abc} = \frac{2S}{a}\cdot\frac{2S}{b}\cdot\frac{2S}{c}\cdot\frac{1}{S} = h_a\cdot h_b\cdot h_c\cdot\frac{1}{S}$ ve $h_a\cdot h_b\cdot h_c = Çevre(PQR)\cdot\text{Alan}(ABC)$ olur.

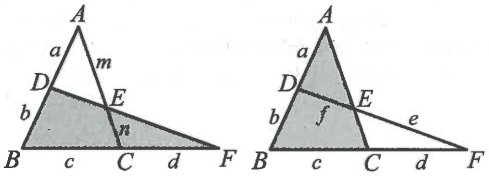
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Menelaus-Ceva-Von Aubel

Şimdi geldik tüm noktadaşlık ve doğrudaşlık sorularını çözmeye yarayan *Menelaus* ve *Ceva Teoremleri*'ne.

Menelaus Teoremi. Aşağıdaki şekle göre;



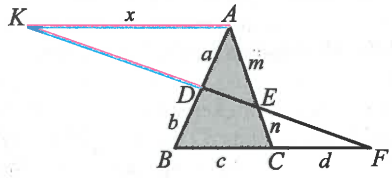
DBF üçgeninde EC kesenine uygulanan:

$$\frac{d}{c+d}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}=1$$

ABC üçgeninde ED kesenine uygulanan:

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$$

Kanıt 1: A köşesinden BF'ye paralel olarak çizilen doğru, FD'yi K'de kessin.



İki farklı kelebek oluşur. $|AK| = x$ br olsun. Kalbi D olan kelebekten

$$\frac{x}{c+d}=\frac{a}{b},$$

E olandan da

$$\frac{x}{d}=\frac{m}{n}$$

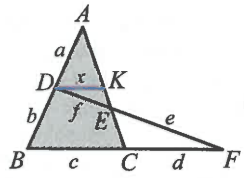
bulunur ki iki eşitlikten de x'ler çekilir eşitlenirse

$$\frac{d}{c+d}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}=1$$

şeklinde istenilen bulunur.

e ile f'nin kullanıldığı Menelaus Teoremi ise F noktasından geçip AB'ye paralel olan doğruyu AC doğrusu ile kesiştirerek benzer şekilde bulunur.

Kanıt 2: D noktasından BF'ye paralel çizilen doğru AC'yi K'de kessin.



$|DK| = x$ br olsun. Kelebekten

$$\frac{x}{d}=\frac{f}{e}$$

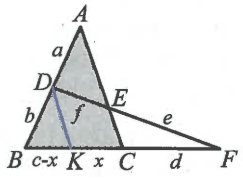
ve ADK ile ABC üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{x}{c}=\frac{a}{a+b}$$

bulunur ki yine x'ler çekilir ve eşitlenirse istenilen bulunur.

Eğer C'den AB'ye paralel olarak geçen doğruyu FD ile kesiştirseydik de diğer eşitliği bulurduk.

Kanıt 3: D noktasından AC'ye paralel çizilen doğru BC'yi K'de kessin.



$|KC| = x$ br olsun. ABC ve DFK üçgenlerinde Tales Teoremi'nden

$$\frac{x}{x-c}=\frac{a}{b}$$

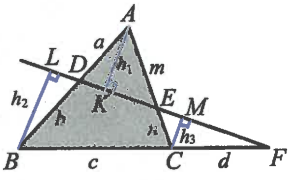
ve

$$\frac{x}{d}=\frac{f}{e}$$

bulunur ki yine x'ler çekilir kalanlar eşitlenirse kanıt biter.

Eğer C'den FD'ye paralel olarak geçen doğruyu AB ile kesiştirseydik de diğer Menelaus eşitliğini bulurduk.

Kanıt 4: *A, B* ve *C* den *DEF* doğrusuna inen dikme uzunlukları sırasıyla h_1, h_2, h_3 olsun.



FLB üçgeninde *CM* keseniyle Tales Teoremi'nden ve kalbi *D* ve *E* olan kelebeklerden,

$$\frac{h_3}{h_2}=\frac{d}{c+d}$$

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{b}{a}$$

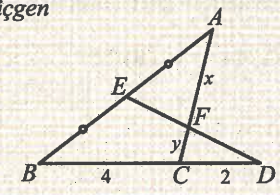
$$\frac{h_1}{h_3}=\frac{m}{n}$$

bulunur. Bu üç oranın çarpımı $\frac{h_3}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h_3}=1$ olması gerektiğinden

$$\frac{d}{c+d}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}=1$$

bulunur. Eğer, *FDB* üçgeninde *CEA* kesenine *F, D* ve *B* köşelerden dikmeler indirseydik, diğer eşitliği bulurduk.

Örnek. *ABC ve EBD birer üçgen*
$|BE| = |EA|$
$|BC| = 4$ br
$|CD| = 2$ br
olduğuna göre
$\frac{|AF|}{|FC|}=\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

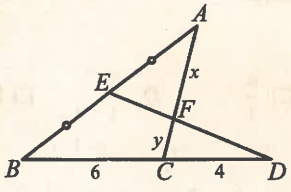
Çözüm: $|BE| = |EA| = k$ br olsun. *D* köşesinden başlayan bir Menelaus formülü soruyu çözer.

$$\frac{2}{2+4}\cdot\frac{k}{k}\cdot\frac{x}{y}=1$$

eşitliğinden $\frac{x}{y}=3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

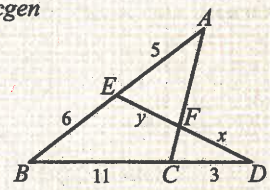
1.



$\frac{x}{y}$ kaçtır?

5/2

Örnek. *ABC ve EBD birer üçgen*
$|AE| = 5$ br
$|EB| = 6$ br
$|BC| = 11$ br
$|CD| = 3$ br
olduğuna göre
$\frac{|DF|}{|FE|}=\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{9}$

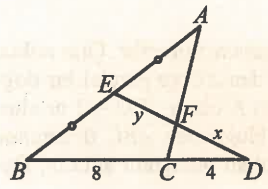
Çözüm: *A* köşesinden başlayan bir Menelaus formülü soruyu çözer.

$$\frac{5}{5+6}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{x}{y}=1$$

eşitliğinden $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

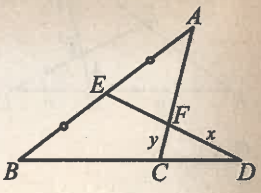
2.



$\frac{x}{y}$ kaçtır?

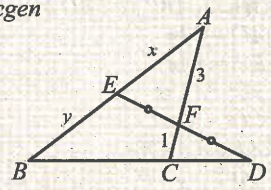
1

3.
ABC ve *EBD* birer üçgen
$|AE| = |EB|$
$|AC| = |DE|$
$|BC| = 2\cdot|CD|$
$|DF| = x$ br
$|FC| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **kaçtır?**



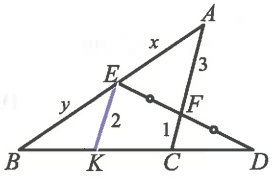
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Örnek. *ABC ve EBD birer üçgen*
$|FC| = 1$ br
$|AF| = 3$ br
$|EF| = |FD|$
olduğuna göre
$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

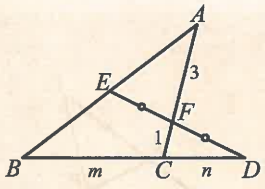
Çözüm: Bu soruda Menelaus uygulamasına *A*'dan da başlasanız, *D*'den de başlasanız eliniz boş kalır. Çünkü $|AE| : |EB|$ oranı da $|BC| : |CD|$ oranı da bilinmiyor. Gerçi her ikisi de birden uygulanınca soru çözülebiliyor ama maalesef çözüm oldukça uzuyor.



Bu tarz soruları ek çizimle çözmeniz önerilir. Orta nokta, orta tabanı hatırlattığından *E*'den *AC*'ye paralel bir doğru çizelim. *BD*'yi kestiği nokta *K* olsun. $|EK| = 2$ br olur. Diğer yandan $|AC| = 4$ br olduğundan *ABC* üçgeninde $[EK]$ doğru parçasının orta taban olduğunu anlarız. Demek ki x/y oranı 1'e eşitmiş.

Doğru cevap: A.

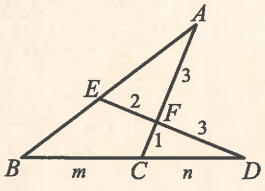
4.



$\frac{m}{n}$ kaçtır?

2

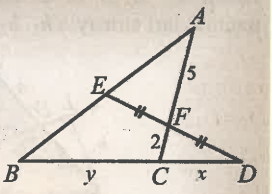
5.



$\frac{m}{n}$ kaçtır?

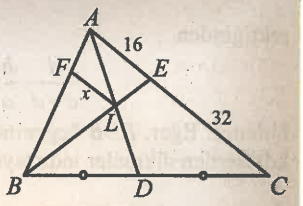
$\frac{8}{7}$

6.
ABC ve *EBD* birer üçgen
$|FC| = 2$ br
$|AF| = 5$ br
$|EF| = |FD|$
$|DC| / |CB| = x/y$
oranı kaçtır?



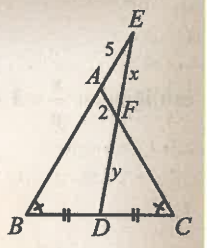
A) $\frac{5}{3}$ B) 2 C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 3

7.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$AD \cap BE = \{L\}$
$FL \,//\, AC$
$|AE| = 16$ br
$|EC| = 32$ br
$|FL| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



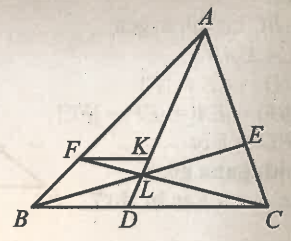
A) 14 B) 12 C) 10 D) 9 E) 8

8.
EBD ve *ABC* birer üçgen
$m(ABC) = m(BCA)$
$|BD| = |DC|$
$|EA| = 5$ br
$|AF| = 2$ br
$|EF| = x$ br
$|FD| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



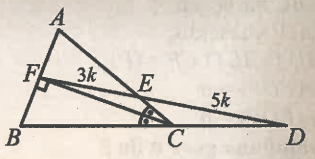
A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 1

9.
ABC bir üçgen
$|AF| = 3\cdot|FB|$
$|AE| = 2\cdot|EC|$
$FK \,//\, BC$
olduğuna göre
$\dfrac{|AD|}{|KL|}$ **oranı kaçtır?**



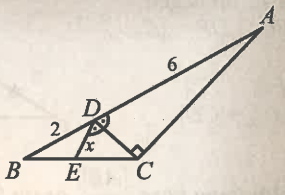
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10.
$m(ACF) = m(FCB)$
$CF \perp AB$
$|FE| = 3k$ br
$|ED| = 5k$ br
$|AC| = 18$ br
olduğuna göre
$|CD|$ **kaç br dir?**



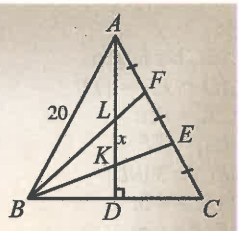
A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

11.
ABC bir üçgen
$DC \perp CA$
$m(ADC) = m(CDE)$
$|BD| = 2$ br
$|DA| = 6$ br
olduğuna göre
$|DE| = x$ **kaç br dir?**



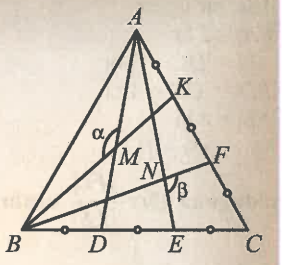
A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{11}{10}$ C) 1 D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{4}{5}$

12.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \perp BC$
$|AF| = |FE| = |EC|$
$|AB| = 20$ br
olduğuna göre
$|LK| = x$ **kaç br dir?**



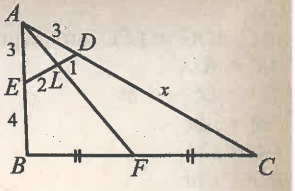
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

13.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AK| = |FK| = |CF|$
$|BD| = |DE| = |CE|$
$m(BMA) = \alpha$
$m(FNE) = \beta$
olduğuna göre α ile β arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



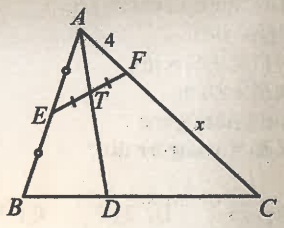
A) $\alpha = \beta$ B) $\alpha = 2\beta$ C) $\alpha + \beta = 180°$
D) $\alpha + \beta = 240°$ E) $2\alpha - \beta = 90°$

14.
ABC bir üçgen
$|AE| = |AD| = 3$ birim
$|BF| = |FC|$
$|BE| = 4$ birim
$|EL| = 2$ birim
$|LD| = 1$ birim
olduğuna göre
$|CD| = x$ **kaç birimdir?**



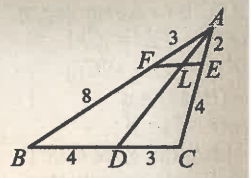
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

15.
ABC bir üçgen
$AD \cap EF = \{T\}$
$|AE| = |EB|$
$|ET| = |TF|$
$|BC| = 3 \cdot |BD|$
$|AF| = 4$ br
$|FC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

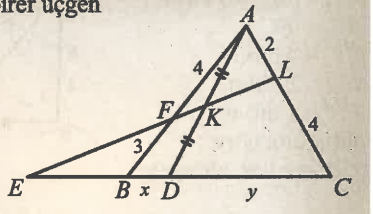
16.
ABC bir üçgen
$|EA| = 2$ br
$|AF| = |DC| = 3$ br
$|BD| = |CE| = 4$ br
$|FB| = 8$ br
$FE \cap AD = \{L\}$
olduğuna göre $\frac{|FL|}{|LE|}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{8}{7}$ B) $\frac{9}{8}$ C) $\frac{10}{9}$ D) $\frac{11}{10}$ E) $\frac{12}{11}$

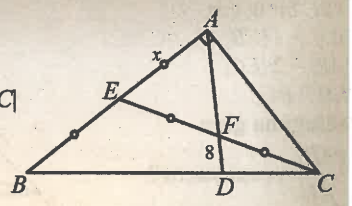
[H. İbr.AYANA]

17.
ABC, ADC ve LEC birer üçgen
$|AK| = |KD|$
$|AF| = |LC| = 4$ br
$|FB| = 3$ br
$|LA| = 2$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
olduğuna göre y, x'in kaç katıdır?



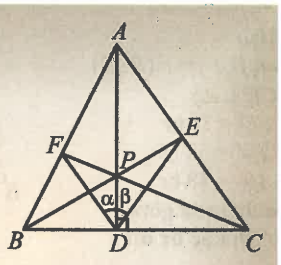
A) 5,5 B) 5 C) 4,5 D) 4 E) 3,5

18.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \cap CE = \{F\}$
$|BE| = |EA| = |EF| = |FC|$
$|FD| = 8$ br
olduğuna göre
$|EA| = x$ kaç br dir?



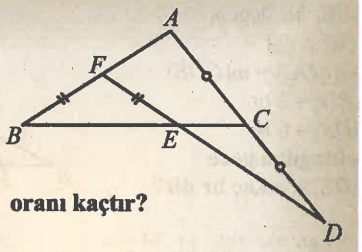
A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

19.
ABC bir üçgen
$[AD]$ yükseklik
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
$m(FDP) = \alpha$
$m(EDP) = \beta$
olduğuna göre α ile β arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



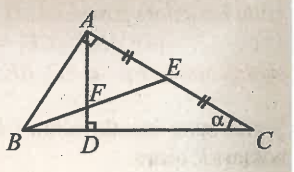
A) $\alpha < \beta$ B) $\alpha = \beta$ C) $\alpha > \beta$ D) $\alpha = 2\beta$ E) $\beta = 2\alpha$

20.
ABC bir üçgen
$BC \cap DF = \{E\}$
$|FB| = |FE|$
$|AC| = |CD|$
olduğuna göre $\frac{|AB|}{|ED|}$ oranı kaçtır?



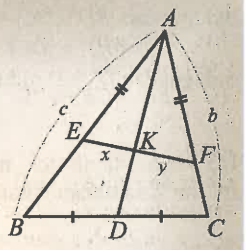
A) 0,5 B) 1 C) 1,2 D) 1,5 E) 2

21.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$, $AD \perp BC$
$|AE| = |EC|$
$|AF| = 4 \cdot |FD|$
olduğuna göre
$m(BCA)$ kaç derecedir?



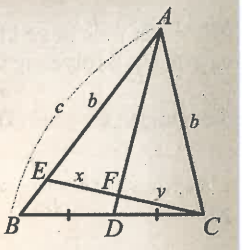
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 36 E) 45

22.
ABC bir üçgen
$AD \cap EF = \{K\}$
$|BD| = |DC|$
$|AF| = |AE|$
$|EK| = x$ br
$|KF| = y$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı aşağıdaki oranlardan hangisine eşittir?



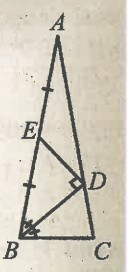
A) $\frac{b}{c}$ B) $\frac{c}{b}$ C) $\frac{b^2}{c^2}$ D) $\frac{c^2}{b^2}$ E) $\frac{c-b}{c+b}$

23.
ABC bir üçgen
$AD \cap EC = \{F\}$
$|BD| = |DC|$
$|EF| = x$ br
$|FC| = y$ br
$|AC| = |AE| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı aşağıdaki oranlardan hangisine eşittir?



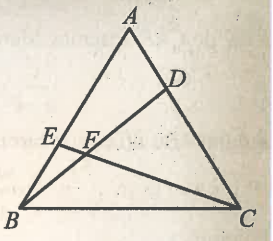
A) $\frac{b}{c}$ B) $\frac{c}{b}$ C) $\frac{b^2}{c^2}$ D) $\frac{c^2}{b^2}$ E) $\frac{c-b}{c+b}$

24.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
BD iç açıortay
$BD \perp DE$
$|AE| = |EB|$
olduğuna göre
$\frac{|AD|}{|DC|}$ oranı kaçtır?



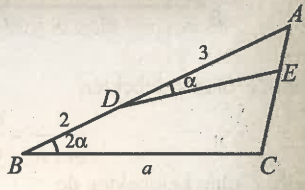
A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

25.
ABC bir eşkenar üçgen
$BD \cap CE = \{F\}$
$|CD| = 2 \cdot |DA|$
$|AE| = 2 \cdot |EB|$
olduğuna göre
$\frac{|BF|}{|FE|}$ oranı kaçtır?



A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

26.
ABC bir üçgen
$m(B) = 2\alpha$
$m(ADE) = \alpha$
$|CE| = 2 \cdot |EA|$
$|AD| = 3$ br
$|DB| = 2$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



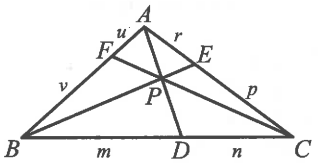
A) 3 B) 3,5 **C) 4** D) 4,5 E) 5

Ceva Teoremi. *Bir ABC üçgeninde AD, BE, CF kesenleri noktadaş ise*

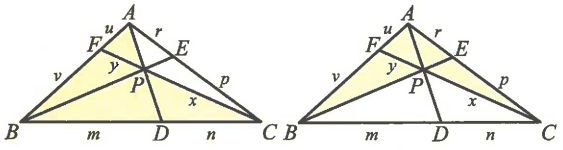
$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1$$

yani şekle göre

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=1$$ 'dir.



Kanıt 1: Kesenlerin kesişim noktası P, bunun yanında $|CP|=x$ br ve $|PD|=y$ br olsun.



ABD'de CPF kesenine Menelaus Teoremi uygulanırsa

$$\frac{u}{u+v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{x}{y}=1,$$

ABE'de CPF kesenine Menelaus Teoremi uygulanırsa

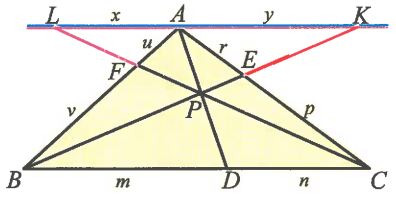
$$\frac{v}{u+v}\cdot\frac{r}{p}\cdot\frac{x}{y}=1$$

bulunur. Bu iki eşitlik birbirine bölünürse

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=1$$

bulunur.

Kanıt 2: BE ve CF kesenleri, A'dan BC'ye paralel olarak geçen doğruyu sırasıyla K ve L noktalarından kessin. $|LA|=x$ br ve $|AK|=y$ br olsun.



Kalbi F olan kelebekten

$$\frac{x}{m+n}=\frac{u}{v},$$

kalbi E olan kelebekten de

$$\frac{y}{m+n}=\frac{r}{p}$$

eşitlikleri doğar. Bu iki eşitlik birbirine bölünürse

$$\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\cdot\frac{p}{r}$$

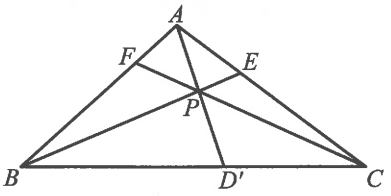
elde edilir. Diğer yandan, kelebek teoremi dersinde $\frac{x}{y}=\frac{n}{m}$ olduğu kanıtlanmıştı. Şu durumda $\frac{u}{v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=1$ olduğu kanıtlanmıştır.

Ceva Teoremi'nin karşıtı da doğrudur. Yani, ABC üçgeninin kenarları üzerindeki D, E, F noktaları için

$$|AF|\cdot|BD|\cdot|CE|=|FB|\cdot|DC|\cdot|EA|$$

eşitliği sağlanıyorsa AD, BE, CF kesenleri noktadaştır.

Şimdi bunu kanıtlayalım. BE ve CF kesenlerinin kesim noktası P olsun.



AP doğrusunun BC kenarını kestiği noktaya D' diyelim. Ceva Teoremi'ne göre

$$|AF|\cdot|BD'|\cdot|CE|=|FB|\cdot|D'C|\cdot|EA|$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$|AF|\cdot|BD|\cdot|CE|=|FB|\cdot|DC|\cdot|EA|$$

olduğundan $|BD'|\cdot|DC|=|BD|\cdot|D'C|$ olur ki

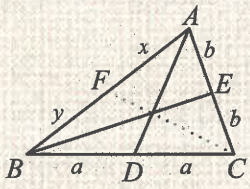
$$|BD|+|DC|=|BD'|+|D'C|=|BC|$$

olduğundan $D'=D$ olduğu anlaşılır.

Üç kenarortayın tek noktada kesiştiğini Ceva Teoremi'nin karşıtından rahatlıkla kanıtlayabiliriz.

Örnek. *Bir üçgende üç kenarortayın noktadaş olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $[AD]$ ve $[BE]$ kenarortaylarını çizelim.

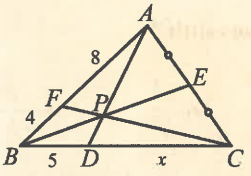


$|BD|=|DC|=a$ br ve $|AE|=|EC|=b$ br olsun. $|AF|=x$ br ve $|FB|=y$ br diyelim. Ceva Teoremi'ne göre

$$a\cdot b\cdot x=a\cdot b\cdot y$$

olduğundan $x=y$'dir. Demek ki $[CF]$ de kenarortaymış!

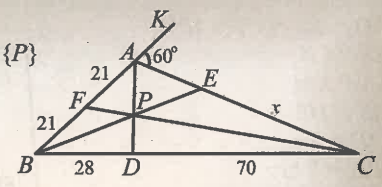
27.



x kaçtır?

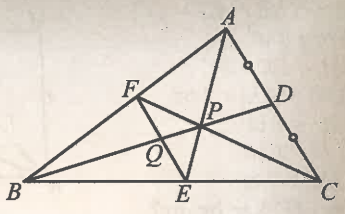
10

28.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
B, A, K doğrudaş
$m(CAK) = 60°$
$|BD| = 28$ br
$|DC| = 70$ br
$|AF| = |FB| = 21$ br
olduğuna göre $|CE| = x$ kaç br dir?



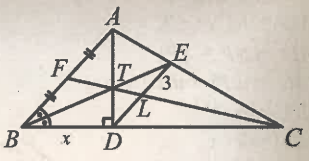
A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

29.
ABC bir üçgen
$|AD| = |DC|$
$AE \cap CF = \{P\}$
$P \in [BD]$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



A) $|FQ| = |QE|$ B) $FE \,//\, AC$ C) $|CF| = |AE|$
D) $|AP|\cdot|PF| = |CP|\cdot|PE|$ E) $|BF|\cdot|EC| = |BE|\cdot|FA|$

30.
ABC bir üçgen
A'ya ait yükseklik,
B'ye ait iç açıortay
C'ye ait kenarortay
T'de kesişmekteler.
$|LE| = 3$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?

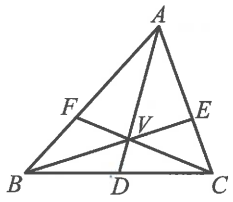


A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 9

Şimdi de Menelaus ve Ceva Teoremleri kadar meşhur olmayan ama onlar kadar önemli bir teorem vereceğiz. Von Aubel Teoremi!

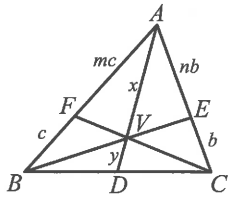
Von Aubel Teoremi (1).
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$

$$\frac{|AV|}{|VD|} = \frac{|AF|}{|FB|} + \frac{|AE|}{|EC|}.$$



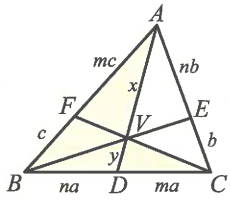
Yukardaki şekli, üçgeni oluşturan 6 doğru parçası ve üçgenin iç bölgesinde bulunan 6 doğru parçası gibi düşünelim. Ceva teoremi dıştaki 6 doğru parçasıyla alakalı bir teoremdi. Menelaus teoremiyse dıştaki 4 tane ve içteki 2 tane ile ilgiliydi. Von Aubel'in birinci teoremi de dıştaki 4 ve içteki 2 taneyle alakalı ama aynı köşeden çıkan üç ışın üzerinde olmaları gerekiyor. Böyle hatırlamaya çalışın.

Şimdi teoremin kanıtını yapalım:



Sözgelimi, $|AF|$'yi $|FB|$'nin m katı, $|AE|$'yi de $|EC|$'nin n katı kabul edelim. Bu durumda $|AV|$'nin $|VD|$'nin $m + n$ katı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Şimdi $|CE|$'ye b br dersek $|AE| = nb$ br, $|FB|$'ye c br dersek $|AF| = mc$ br olur. x/y oranının bulunabilmesi için $|BD|:|DC|$ oranının bilinmesi gerektiğini anlıyoruz, bu sebeple hemen Ceva teoremini uyguluyoruz.

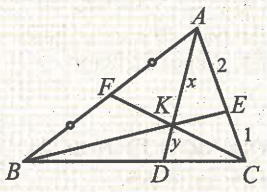


Ceva teoreminden bu oran $n : m$ olarak geldiğinden $|BD|$'ye na br dersek, $|DC| = ma$ br oluyor. Şimdi üst şekilde taranan kısım için Menelaus teoremi yazıyoruz, iş bitiyor:

$$\frac{ma}{(m+n)a}\cdot\frac{c}{mc}\cdot\frac{x}{y}=1$$

eşitliğinde sadeleştirmeler yapılırsa $\frac{x}{y} = m+n$ bulunur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE \cap CF = \{K\}$
$|AF| = |FB|$
$|AE| = 2$ br
$|EC| = 1$ br
olduğuna göre
$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*

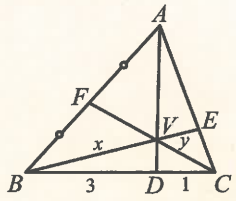


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Soru, A'dan çıkan üç ışın üzerindeki doğru parçaları ile ilgili olduğundan 1 nolu Von Aubel teoremini kullanacağız: $\frac{x}{y} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} = 3$. Bu kadar!

Doğru cevap: B.

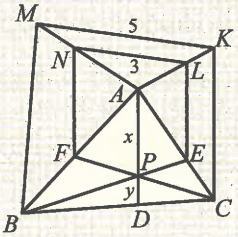
31.



$\frac{x}{y}$ kaçtır?

4

Örnek. *BCKM dörtgeninde*
EL // CK
LN // KM
NF // MB
$|NL| = 3$ br
$|MK| = 5$ br
olduğuna göre
$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: ALN ve AKM üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|AL|}{|LK|} = \frac{3}{2}$$

olarak bulunur. Tales Teoremi'nden

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AL|}{|LK|} = \frac{|AN|}{|NM|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{2}$$

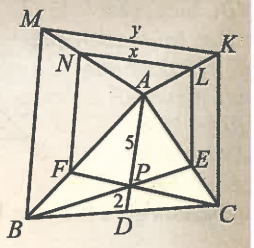
olur. 1 nolu Von Aubel Teoremi'nden

$$\frac{x}{y} = \frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AF|}{|FB|} + \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

olarak bulunur.

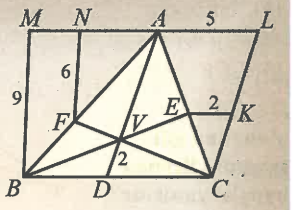
Doğru cevap: A.

32.
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
$EL // CK$
$LN // KM$
$NF // MB$
$|AP| = 5$ br
$|PD| = 2$ br
$|LN| = x$ br
$|KM| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **kaçtır?**



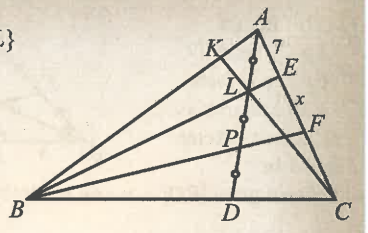
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{5}{9}$

33.
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$
$FN // BM$
$ML // EK // BC$
$|DV| = |EK| = 2$ br
$|AL| = 5$ br
$|FN| = 6$ br
$|BM| = 9$ br
ise $|AV|$ **kaç br dir?**



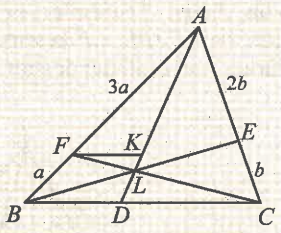
A) 6 **B) 7** C) 8 D) 9 E) 10

34.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CK = \{L\}$
$AD \cap BF = \{P\}$
$|AL| = |LP| = |PD|$
$|BK| = 6 \cdot |KA|$
$|AE| = 7$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre
***x* kaçtır?**



A) 8 **B) 9** C) 10 D) 11 E) 12

Örnek. *ABC bir üçgen AD, BE, CF kesenleri L noktasında kesişiyorlar. FK // BC* $|AF| = 3\cdot|FB| = 3a$ br $|AE| = 2\cdot|EC| = 2b$ br *olduğuna göre* $\frac{|KL|}{|LD|}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{9}$

Çözüm: Birkaç yoldan çözelim.

Birinci yol. $|KL| = x$ br ve $|LD| = y$ br olsun. 1 nolu Von Aubel Teoremi'ne göre

$$|AL| = 5\cdot|LD|$$

olması gerekiyor. O halde $|AK| = 5y - x$ br olur. ABD üçgeninde Tales Teoremi'nden

$$\frac{5y-x}{x+y} = 3$$

olmalıdır ki, içler dışlar çarpımı yapılırsa $x/y = 1/2$ olarak bulunur.

İkinci yol. Ceva Teoremi'ne göre $|BD| = 4k$ br dersek $|DC| = 6k$ br olur. AFK ve ABD üçgenlerinin benzerliğinden $|FK| = 3k$ bulunur ki

$$|KL| : |LD| = |FK| : |DC| = 3k/6k = 1/2.$$

Üçüncü yol. $FKDC$ kelebek olduğundan $|KL| : |LD|$ oranı $|FL| : |LC|$ oranına eşittir. Bu oranı da $BACF$ hattında Menelaus Teoremi'nden bulabiliriz.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{|LC|}{|LF|} = 1$$

olduğundan $|FL| : |LC| = 1/2 = |KL| : |LD|$.

Doğru cevap: A.

Şimdi 2 nolu Von Aubel teoremine geldi sıra. Bu teorem de iç bölgedeki 6 doğru parçasıyla ilgili bir teorem. Bu tarz sorular, bu teorem bilinmeden Menelaus ve Ceva teoremleri kullanılarak da çözülebilir ama siz bilin, farkınız olsun!

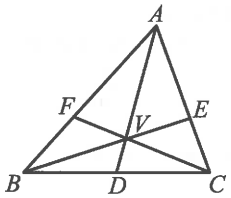
ABC bir üçgen
AD ∩ BE ∩ CF = {V}

Von Aubel Teoremi (2).

$$\frac{|AV|}{|AD|} + \frac{|BV|}{|BE|} + \frac{|CV|}{|CF|} = 2.$$

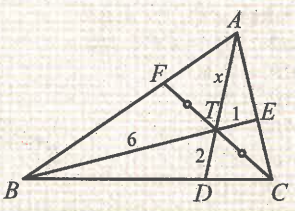
Von Aubel Teoremi (3).

$$\frac{|DV|}{|DA|} + \frac{|EV|}{|EB|} + \frac{|FV|}{|FC|} = 1.$$



Bu eşitliklerin kanıtını alan dersinde verdik. Menelaus ve Ceva teoremlerini kullanarak kanıtlayamayan sabretsin!

Örnek. *ABC bir üçgen* $AD \cap BE \cap CF = \{T\}$ $|BT| = 6$ br $|TE| = 1$ br $|TD| = 2$ br $|FT| = |TC|$ *olduğuna göre* $|AT| = x$ *kaç br dir?*



A) 3 B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{18}{5}$ D) 4 E) $\frac{22}{7}$

Çözüm: 2 nolu Von Aubel Teoremi'nin iki haline de göre de çözüm yapalım.

Birinci yol. İlk eşitliği kullanacağız. Buna göre

$$\frac{1}{2} + \frac{6}{7} + \frac{x}{x+2} = 2$$

eşitliği geçerlidir. Düzenlenirse,

$$\frac{x}{x+2} = \frac{9}{14}$$

çıkar ki buradan $x = 18/5$ bulunur.

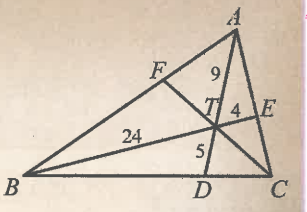
İkinci yol. İsteyen 3 nolu Von Aubel Teoremi'ne göre de çözebilir. Bu sefer

$$\frac{2}{x+2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = 1$$

eşitliğini çözmek gerekir. Çözülürse $x = 18/5$ bulunur.

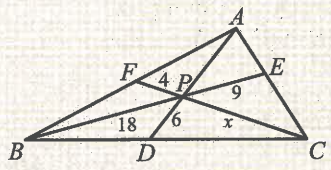
Doğru cevap: C.

35.
ABC bir üçgen
AD ∩ BE ∩ CF = {T}
$|AT| = 9$ br
$|TD| = 5$ br
$|BT| = 24$ br
$|TE| = 4$ br
olduğuna göre
$\frac{|CE|}{|EA|} + \frac{|CD|}{|DB|}$ **toplamı kaçtır?**



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
$|PE| = 9$ br
$|PF| = 4$ br
$|PB| = 18$ br
$|PD| = 6$ br
$|AD| = |CF|$
olduğuna göre $|PC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

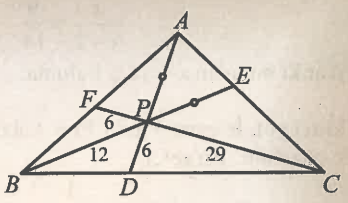
Çözüm: $|AD| = |CF|$ bilgisinden $|PA| = x - 2$ br olur. Von Aubel Teoremi(2)'ye göre

$$\frac{x-2}{x+4} + \frac{2}{3} + \frac{x}{x+4} = 2$$

eşitliği geçerlidir. Denklem çözülürse $x = 11$ olarak bulunur.

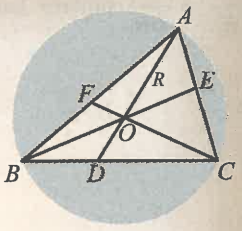
Doğru cevap: D.

36.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
$|PA| = |PE|$
$|PF| = |PD| = 6$ br
$|PB| = 12$ br
$|PC| = 29$ br
olduğuna göre
$|PA|$ kaç br dir?



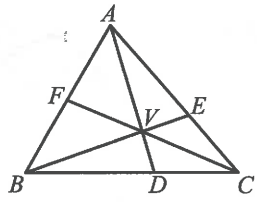
A) 7 B) 8 **C) 9** D) 10 E) 11

37.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{O\}$
O çevrel çember merkezi
$|OA| = R$ br
olduğuna göre
$\frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|BE|} + \frac{1}{|CF|}$
toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\frac{1}{R^2}$ B) $\frac{2}{R^2}$ C) $\frac{1}{R}$ **D)** $\frac{2}{R}$ E) $\frac{4}{R}$

Von Aubel Teoremleri'ne Dördüncüsü de Bizden. Eğer bu *AD*, *BE*, *CF* kesenleri aynı boydaysa, acaba bu durum yeni eşitlikler doğurur mu, ona bakacağız.



Von Aubel'in ikinci teoreminden

$$\frac{|VD|}{|AD|} + \frac{|VE|}{|BE|} + \frac{|VF|}{|CF|} = 1$$

olduğunu biliyoruz. Eğer

$$|AD| = |BE| = |CF|$$

olursa burada toplanan kesirlerin hepsinin paydası aynı olur, buna göre tekrar düzenlersek;

$$\frac{|VD|}{|AD|} + \frac{|VE|}{|AD|} + \frac{|VF|}{|AD|} = 1$$

yani

$$|VD| + |VE| + |VF| = |AD|$$

elde edilir.

Bu eşitlik aşağıdaki gibi düzenlenirse daha şık bir hal alır:

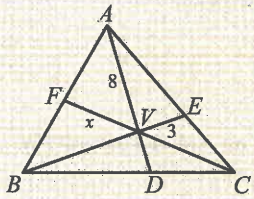
$$|VE| + |VF| = |AD| - |VD| = |VA|$$
$$|VD| + |VF| = |AD| - |VE| = |VB|$$
$$|VD| + |VE| = |AD| - |VF| = |VC|$$

Hatta, doymayıp bu eşitlikleri de taraf tarafa toplarsak;

$$|VA| + |VB| + |VC| = 2 \cdot |AD|$$

elde edilir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$
$|AD| = |BE| = |CF|$
$|VA| = 8$ br
$|VE| = 3$ br
$|VF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

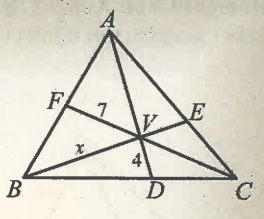
Çözüm: Yukarda, $|AD| = |BE| = |CF|$ olduğunda

$$|VE| + |VF| = |VA|$$

olduğunu kanıtlamıştık. O halde $3 + x = 8$ eşitliğinden $x = 5$ olmalıdır.

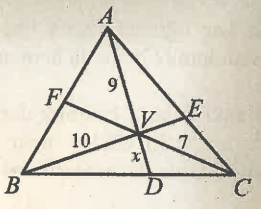
Doğru cevap: B.

38.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$
$|AD| = |BE| = |CF|$
$|VD| = 4$ br
$|VF| = 7$ br
$|VB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



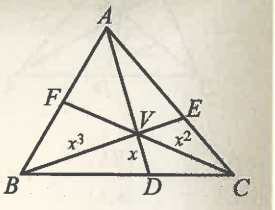
A) 8 B) 9 C) 10 **D) 11** E) 12

39.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$
$|AD| = |BE| = |CF|$
$|VA| = 9$ br
$|VB| = 10$ br
$|VC| = 7$ br
$|VD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{5}{2}$ E) 2

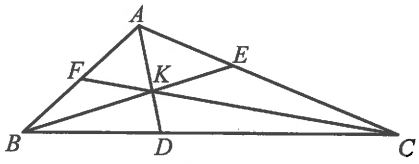
40.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{V\}$
$|AD| = |BE| = |CF|$
$|VD| = x$ br
$|VC| = x^2$ br
$|VB| = x^3$ br
olduğuna göre
$|VA| - |VF|$ farkı kaçtır?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 **E) 1**

MENELAUS, CEVA, VON AUBEL TEOREMLERİNİN UYGULAMASINDA MOMENT TEKNİĞİ

3-4 sene önceydi. Şimdi meslektaş olduğumuz öğrencim Numan Akkoç'a (nam-ı diğer Geonumi) üçgenin ağırlık merkezi olan Spieker noktasının yerini momentle nasıl bulduğumu anlatıyordum. Ne olduysa; Numan'ın 'Hocam, bunu Menelaus'a filan uygulayamaz mıyız?' sorusuyla oldu. Çok beğeneceğinizi düşündüğümüz nur topu gibi bir metot doğmuş oldu. Kendisine, huzurlarınızda teşekkür ediyorum!

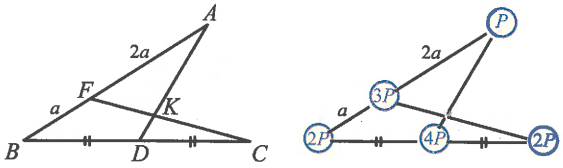


Yukardaki ABC üçgeninde AD, BE ve CF kesenleri bir K noktasında kesişiyor olsunlar. Böyle bir şekilde çoğu zaman

$$\frac{|AF|}{|FB|}, \frac{|BD|}{|DC|}, \frac{|CE|}{|EA|}, \frac{|AK|}{|KD|}, \frac{|BK|}{|KE|} \text{ ve } \frac{|CK|}{|KF|}$$

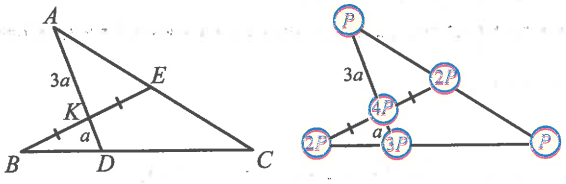
oranlarından herhangi ikisi verilip, diğer dört taneden herhangi biri sorulur. Bu soruları bazen Menelaus, bazen Ceva, bazen de Von Aubel teoremleri çözer. Tabi hangi durumda hangi teoremin kullanılacağını birçok öğrenci karıştırır. Aslında bu tarz soruların tamamı ek çizimlerle çözülebilir ama ne zaman, nereden, nereye ve dahi niye çizileceğini bilmek de öyle her babayiğidin harcı değildir. Az biraz dirsek çürütmek gerekir. Şimdi ''Hocam, benim dirseğim kıymetli, sen bize başka bir yol öğret de ne teoremlerle uğraşalım, ne de ek çizimlerle!'' diyenlere gelsin.

Momentli Menelaus. Normal çözümü zaten basit olan bir örnekle başlıyoruz:



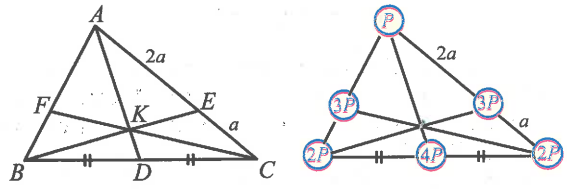
Üstteki şekilde $|AF| : |FB| = 2$ ve $|BD| : |DC| = 1$ olarak verilmiş. $|AK| : |KD|$ ve $|CK| : |KF|$ oranlarının sorulduğunu düşünelim. $|AF| : |FB| = 2$ olduğundan A noktasında P birimlik yük varsa şeklin dengede durması için B noktasında $2P$ birimlik yük olmalıdır. Bu iki yükün bileşkesi de F noktasındaki $3P$ birimlik yüktür. Diğer yandan $|BD| = |DC|$ olduğundan B ve C noktalarındaki yükler eşit birimde olmalıdır. Bu yüzden C noktasına da $2P$ birimlik bir yük koyduk. Bileşkesi de D noktasında $4P$ birimlik bir yük olarak göründü. Şu durumda aynı mantıkla A ve D noktalarındaki yükler sırasıyla P ve $4P$ birim olduğundan $|AK| : |KD| = 4$, C ve F noktalarındaki yükler de sırasıyla $3P$ ve $2P$ olduğundan $|CK| : |KF| = 3 : 2$ olarak bulunur.

Aslında daha önce dediğimiz gibi bu iki oranı da Menelaus teoreminden kolayca bulabilirdik ama bazen tek Menelaus teoreminin soruyu çözmeye yetmediği oluyor. O tarz sorularda metodumuzun kıymeti daha çok anlaşılacaktır. Hemen bir örnek verelim:



$\frac{|AK|}{|KD|}=3$ ve $\frac{|BK|}{|KE|}=1$ verilip $\frac{|BD|}{|DC|}$ ve $\frac{|CE|}{|EA|}$ oranlarının sorulduğunu düşünelim. A'daki yüke P birimlik dersek, D'deki $3P$ birimlik olur. Bu da K'de $4P$ birimlik bileşke demektir. K noktası aynı zamanda B ve E noktalarındaki yüklerin de bileşkesi olduğundan B ve E noktalarındaki yükler $2P$ birimlik olmalıdır. Şu durumda $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{1}{2}$ ve $\frac{|CE|}{|EA|}=1$ olarak bulunur.

Momentli Ceva. Şimdi bir de çözümü Ceva Teoremi'ni bilmeyi gerektiren bir soruyu kendi metodumuzla çözelim.

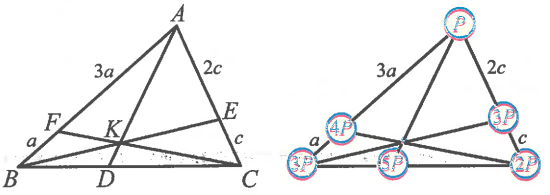


$\frac{|BD|}{|DC|}=1$ ve $\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{1}{2}$ verilip $\frac{|AF|}{|FB|}$'nin sorulduğunu düşünelim. A'daki yüke P birimlik dersek C'deki $2P$ birimlik olur. $|BD|=|DC|$ olduğundan B'deki yük de $2P$ birimlik olur. Şu durumda A ve B'deki yükler sırasıyla P ve $2P$ birimlik olduğundan $\frac{|AF|}{|FB|}=2$ olarak bulunur. Metodun güzelliği şurada: Bir çırpıda

$$\frac{|AK|}{|KD|}=4,\ \frac{|BK|}{|KE|}=\frac{3}{2}\ \text{ve}\ \frac{|CK|}{|KF|}=\frac{3}{2}$$

olduğunu da söyleyebiliyoruz. Hem de hiç işlem yapmadan!

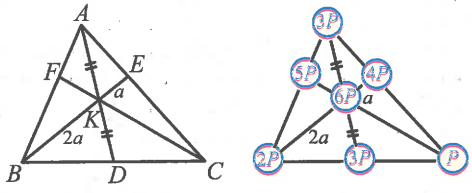
Momentli Von Aubel 1. Şimdi de pratik çözümleri Von Aubel teoremlerini bilmeyi gerektiren örneklere bakalım.



Bu soruda $\frac{|AF|}{|FB|}=3$ ve $\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{1}{2}$ verilmiş. $\frac{|BK|}{|KE|}$ veya $\frac{|CK|}{|KF|}$ oranları sorulsa Menelaus teoremiyle, $\frac{|BD|}{|DC|}$ oranı sorulursa da Ceva teoremiyle işi halledebiliriz. Ama $\frac{|AK|}{|KD|}$ oranı sorulursa Von Aubel teoremi gerekir. Bunu da kaç öğrenci (hatta kaç öğretmen) biliyor ki? Fakat metodumuz bunu da hemencecik çözüyor. Çözelim:

A'daki yüke P birimlik dersek, verilen oranlardan dolayı B ve C'deki yükler sırasıyla $3P$ ve $2P$ birimlik olur. O halde D'de de bunların bileşkesi olarak $5P$ birimlik yük var deriz. Cevabın da $\frac{|AK|}{|KD|}=5$ olduğu anlaşılır.

Momentli Von Aubel 2-3. Şimdi de pratik çözümü 2 veya 3 nolu Von Aubel teoremini bilmeyi gerektiren bir örneğe uygulamamızı yapalım:



$\frac{|AK|}{|KD|}=1$ ve $\frac{|BK|}{|KE|}=2$ verilip $\frac{|CK|}{|KF|}$ oranının sorulduğunu farz edelim. B'deki yüke $2P$ birimlik dersek, verilen oranlardan dolayı E'deki yük $4P$ birimlik olur. K noktasında da bunların bileşkesi olarak $6P$ birimlik yük bulunur deriz. O halde $|AK|=|KD|$ olduğundan A ve D'de $3P$ birimlik yükler bulunur. A ve B'deki yüklerin bileşkesi de F'de $5P$ birimlik yük olarak görünür. C'ye ise P birimlik yük kalır. O halde $\frac{|CK|}{|KF|}=5$ olmalıdır.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üçgensel Bölge Alanı

Tabançarpıyükseklikbölüka'den farklı alan formülleri öğrenmenin vakti geldi sanırım. Üçgenin alanını hesaplamaya yarayan 110 değişik formül bulunmuş bugüne kadar. Tabii ki biz bunların tamamını vermeyeceğiz, fakat temel olan beş-on tanesini kanıtıyla vererek, diğerlerini bulabilmenize ışık tutacağız.

Yazımıza başlamadan önce ufacık bir uyarıda bulunmak istiyorum: Daha önce kelimesi kelimesine öğrendiğimiz üçgenin tanımını tekrar hatırlayalım:

A, B, C doğrusal olmayan üç nokta olsun. $[AB]$, $[AC]$ ve $[BC]$'nin birleşimine ***ABC* üçgeni** denir.

Anladığınız üzere 'üçgen', yukarda bahsedilen koşulları sağlayan üç doğru parçasının birleşimidir. O halde '*üçgenin alanı*' diye bir şey olmaz. Olamaz! Olsa olsa çevresi olabilir, o da o üç doğru parçasının uzunluklarının toplamıdır.

Anlayacağınız; alan hesaplayabilmek için bir bölgeye, yani bir düzlem parçasına ihtiyaç vardır. Üçgenin içi ile kendisinin birleşimine de **üçgensel bölge** dendiğini hatırlayın. O halde doğru olan, '*üçgenin alanı*' yerine '*üçgensel bölgenin alanı*' demektir. Fakat bu yanlış dilimize o kadar çok yerleşmiş ki, biz de bundan ötürü laf salatası yapmayıp üçgensel bölgenin alanı yerine üçgenin alanı diyeceğiz, siz de ne demek istediğimizi anlayacaksınız. Böyle yapmazsak ilerde '*paralelkenarsal bölgenin alanı*' veya '*eşkenardörtgensel bölgenin alanı*' demek zorunda kalacağız ki buna hiç niyetimiz yok. Bazen de '*kenar uzunluğu*' yerine sadece '*kenar*' demeyi yeğleyeceğiz, onda da hatamızı yüzümüze vurmayın.

Alan Aksiyomları. Daha önce de anlattığımız üzere üzerinde çalıştığımız Öklid Geometrisi'nin 21 tane aksiyomu vardı. Bunlardan dördü alan ile ilgili. Şimdi bunları öğrenelim:

Aksiyom 1. *Her çokgensel bölgeye bir tek pozitif sayı karşılık gelir.*

Nasıl ki, bir doğru parçasına tek bir reel sayı karşılık geliyordu ve biz o tek sayıya o doğru parçasının *uzunluğu* diyorduk, çokgensel bölgelere de tek bir reel sayı karşılık gelir, bu sayı da şimdi o bölgenin *alanı* olacak. Nasıl ki $[AB]$'nin uzunluğunu $|AB|$ ile gösteriyorduk, ABC bölgesinin alanını da Alan(ABC) veya $|ABC|$ ile göstereceğiz.

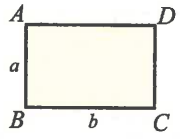
Aksiyom 2. *İki üçgen eş ise bu iki üçgenin alanları birbirine eşittir.*

Eşlik tanımsız olduğu için eş üçgenlerin alanlarını da eşit kabul edeceğiz. Alanları eşit olan geometrik şekillere de **denk** denir. Bilmeyen öğrensin, bilmeyene de öğretsin!

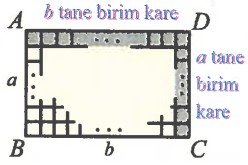
Aksiyom 3. *Eğer R bölgesi R_1 ve R_2 bölgelerinin birleşimi ve R_1 ve R_2'nin arakesiti sonlu sayıda doğru parçası veya noktalardan ibaret ise R'nin alanı R_1 ve R_2'nin alanları toplamına eşittir.*

Alanları da toplayabiliriz demek istiyor. Fakat bazı şartlar var: İki bölgenin kesişimi de bölge ise, iki bölgenin birleşiminin alanı şekillerin ayrı ayrı toplamına eşit olamaz. Bunun olması için, kesişimin sonlu sayıda doğru parçası veya nokta olması lazım.

Aksiyom 4. *Dikdörtgenin alanı, tabanıyla yüksekliğinin çarpımına eşittir.*



Ne demek istediği çok açık, $|ABCD| = a \cdot b$ diyor ama bunu değil de ''*Birim karenin alanı* 1'*dir*'' önermesini aksiyom olarak alanlar da var. Böylelikle üstteki önerme kanıtlanabiliyor. Şöyle ki:



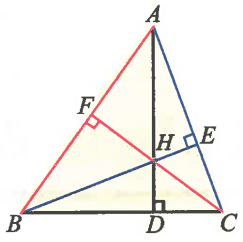
Eni a birim, boyu b birim olan bir dikdörtgenin aslında $a \cdot b$ tane birim kareden oluştuğunu ve her birinin alanı 1 olduğundan dikdörtgen alanının $a \cdot b \cdot 1$ yani $a \cdot b$ olduğunu söylüyorlar.

Her ikisi de doğru, fakat biz dikdörtgen alanını aksiyom olarak alacağız. Böylelikle üçgen alanını artık kanıtlayabileceğiz. Başlıyoruz.

Teorem. *Bir üçgenin alanı, herhangi bir kenarı ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.*

Yani yandaki şekle göre

$|BC| = a$ br
$|AD| = h_a$ br
$|CA| = b$ br
$|BE| = h_b$ br,
$|AB| = c$ br
$|CF| = h_c$ br



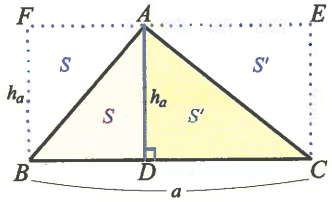
olmak üzere;

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c .$$

Ya da rahmetli dedemin dediği gibi:

Bir müsellesin (Bir üçgenin) *mesaha-i sathiyyesi* (alanı), *kaidesiyle* (tabanıyla) *irtifaının* (yüksekliğinin) *hasılı darbının* (çarpımının) *nısfına* (yarısına) *müsavidir* (eşittir). ☺

Kanıt: Şu an için dikdörtgenin alanından başka bir alan hesabı bilmediğimizden, şekli dikdörtgenle ilişkilendireceğiz.

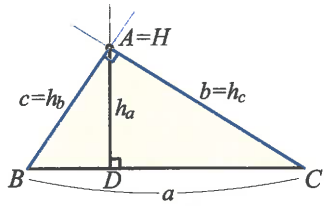


A'dan BC'ye, B ve C noktalarından da AD'ye paraleller çizerek, üst şekildeki gibi $BCEF$ dikdörtgenini oluşturalım. ADB ile AFB ve ADC ile AEC üçgenlerinin eş olduklarından dolayı denk olduklarına dikkat ediniz.

Dikdörtgenin alanı *tabançarpıyükseklik* olduğundan üçgenin alanının dikdörtgeninkinin yarısı olduğu kolayca görülebilir. O halde üçgenin alanı, dikdörtgenin alanının tam yarısıdır.

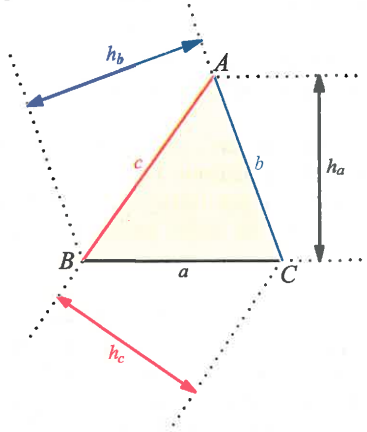
Tabanı ve bu tabana inen yüksekliği verilen üçgenin alanı, bu formülden bulunur. Ayrıca bu formülden üçgenin yüksekliklerinin kenarlarla ters orantılı olduğunu sonucuna da ulaşırız.

Dik Üçgenin Alanı. Dik üçgende iki kenar birbirini dik kestiği için, bu kenarlardan birine inen yükseklik diğer dik kenardır. Bu sayede *dik üçgenin alanı, dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısıdır.*



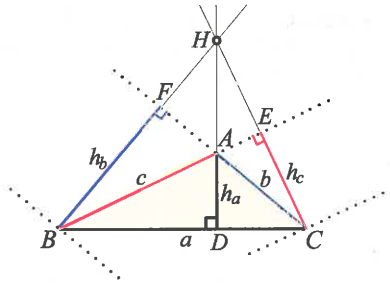
Üst şekilden de görüleceği üzere; $[CA]$'ye inen yükseklik $[BA]$ olduğu gibi, $[BA]$'ya inen yükseklik de $[CA]$'dır. Daha önceki yazılarımızda, bir üçgenin üç yüksekliğinin tek noktada kesiştiğini ve kesişim noktasının diklik merkezi olduğunu söylediğimizden, dik olan A köşesi ABC dik üçgeninin diklik merkezi olmaktadır.

Bir üçgenin yüksekliği, üstteki örnekte olduğu üzere, üçgenin bir kenarı olabildiği gibi, birazdan göreceğiniz üzere üçgenin dışında da olabilir. Yükseklikten temel kasıt, üçgenin bir köşesinin karşısındaki kenara veya bu kenarı taşıyan doğruya uzaklığıdır.



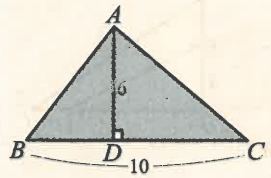
Yani yüksekliğin uzunluğunu, üçgenin herhangi bir köşesinden karşısındaki kenara paralel bir doğru çizerek, bu iki doğru arasındaki uzaklık olarak alabilirsiniz.

Geniş Açılı Üçgenin Alanı. Böyle üçgenlerde iki yükseklik üçgenin dışında kalır. Dıştaki yükseklikler de dışarıda kesiştiği için diklik merkezi üçgenin dışında yer alır.



Üstteki şekilden, geniş açılı bir ABC üçgeninin üç yüksekliğini inceleyebilirsiniz.

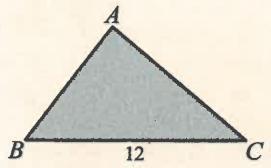
1.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

30

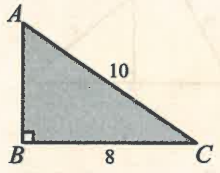
2.



$|ABC| = 36\ br^2$ ise A'nın BC'ye uzaklığı kaç br dir?

6

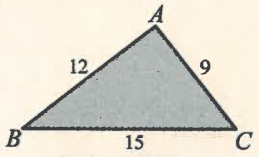
3.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

24

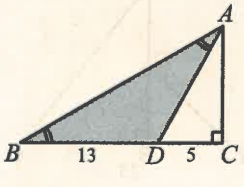
4.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

54

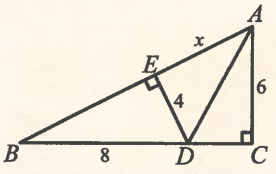
5.



$|ABD|$ kaç br^2 dir?

78

6.



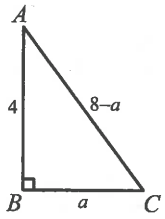
x kaçtır?

$12-4\sqrt{3}$

Örnek. *Dik kenarlarından biri* 4 br *uzunlukta olan bir dik üçgenin, diğer dik kenarıyla hipotenüsünün uzunlukları toplamı* 8 br *ise bu dik üçgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

Çözüm: Üçgeni B açısı dik olan ABC üçgeni farz edelim. $|AB| = 4$ br olsun. $|BC| = a$ br dersek, $|AC| = 8 - a$ br olmalıdır. Taslak şekil aşağıda:



a'nın bulunması soruyu çözecektir. a'yı da Pisagor teoremi yardımıyla bulabiliriz.

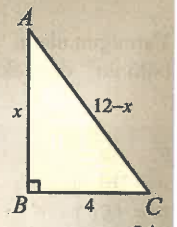
$$4^2 + a^2 = (8-a)^2$$
$$16 + a^2 = 64 - 16a + a^2$$
$$16a = 48$$

eşitliğinden $a = 3$ bulunur. O halde $|ABC| = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ br^2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

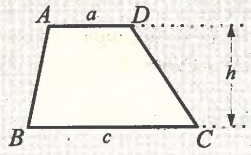
7.

ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BC| = 4$ br
$|AB| = x$ br
$|AC| = 12 - x$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



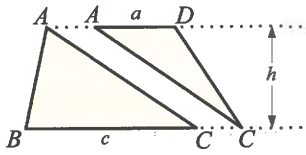
A) 10 B) $\frac{31}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) 11 E) $\frac{34}{3}$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
AD // BC
$|AD| = a$ br
$|BC| = c$ br
Paralel kenarlar arasındaki uzaklık h br olduğuna göre dörtgensel bölgenin alanı kaç br^2 *dir?*



A) $\frac{ac}{h}$ B) $\frac{a+c}{h}$ C) $\frac{cah}{c+a}$ D) $\frac{(c+a)h}{2}$ E) $\frac{(c-a)h}{2}$

Çözüm: Dörtgenin paralel iki kenar olunca, o dörtgene yamuk deniyordu. Soruyu çözünce 'yamuk alanı'nı da öğrenmiş olacağız. Şimdi $[AC]$ köşegenini çizerek, yamuğu iki üçgene ayıralım.



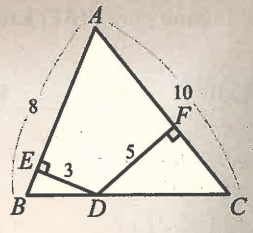
ABC ve *ACD* üçgenlerinin alanlarını toplayınca *ABCD* yamuğunun alanını hesaplamış olacağız.

$$|ABCD| = |ABC| + |ACD|$$
$$= \frac{c \cdot h}{2} + \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(c+a) \cdot h}{2}$$

Yamuğun alanı, 'alt taban artı üst taban, çarpı yükseklik bölü iki'' diye akılda tutulur.

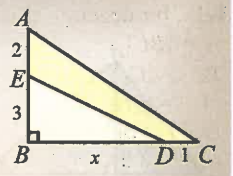
Doğru cevap: D.

8.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$DE \perp AB$
$DF \perp CA$
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 10$ br
$|DE| = 3$ br
$|DF| = 5$ br
olduğuna göre $|ABC|$ **kaç** br^2 **dir?**



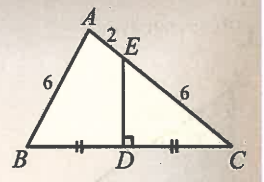
A) 29 B) 32 C) 36 **D) 37** E) 40

9.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|EBD| = |AEDC|$
$|AE| = 2$ br
$|EB| = 3$ br
$|DC| = 1$ br
olduğuna göre $|BD|$ **kaç br dir?**



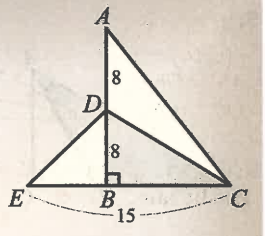
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.
ABC bir üçgen
$ED \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|BA| = |EC| = 6$ br
$|AE| = 2$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ **kaç** br^2 **dir?**



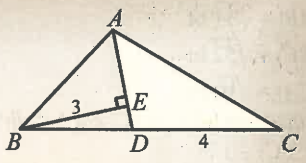
A) $\sqrt{35}$ B) $2\sqrt{35}$ C) $3\sqrt{35}$ **D)** $4\sqrt{35}$ E) $5\sqrt{35}$

11.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp EC$
$|AD| = 8$ br
$|DB| = 8$ br
$|EC| = 15$ br
olduğuna göre
$|EBD| + |ADC|$ **kaç** br^2 **dir?**



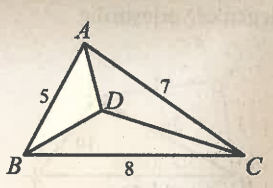
A) 30 **B)** 60 C) 90 D) 120 E) 150

12.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$BE \perp AD$
$|AD| = |BD|$
$|BE| = 3$ br
$|DC| = 4$ br
olduğuna göre $|ADC|$ kaç br^2 dir?



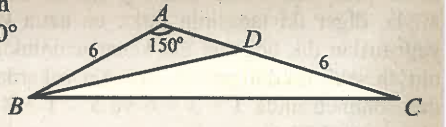
A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 12

13.
ABC bir üçgen
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$|CA| = 7$ br
D noktasını ABC üçgeninin kenarlarına eşit uzaklıkta olduğuna göre $|ADB| : |ABC|$ oranı kaçtır?



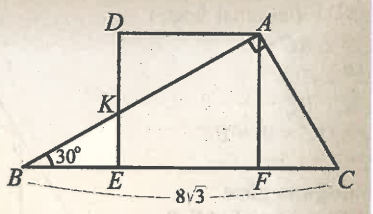
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

14.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = 150°$
$|AB| = 6$ br
$|DC| = 6$ br
olduğuna göre taralı DBC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



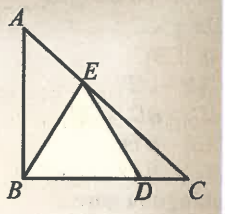
A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

15.
ABC bir dik üçgen
$ADEF$ kare
$CA \perp AB$
$m(B) = 30°$
$|BC| = 8\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|KBE|$ kaç br^2 dir?



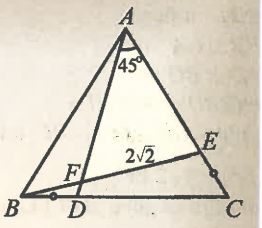
A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) $12\sqrt{3}$ E) 18

16.
ABC bir ikizkenar dik üçgen
DBE bir eşkenar üçgen
$AB \perp BC$
olduğuna göre $\frac{|DBE|}{|ABC|}$ **oranı kaçtır?**



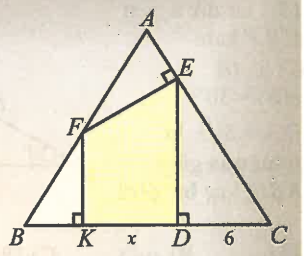
A) $2-\sqrt{3}$ B) $3-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-1$
D) $2\sqrt{3}-2$ E) $2\sqrt{3}-3$

17.
ABC bir eşkenar üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|BD| = |CE|$
$|FE| = 2\sqrt{2}$ br
$m(CAD) = 45°$
olduğuna göre taralı AFE üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



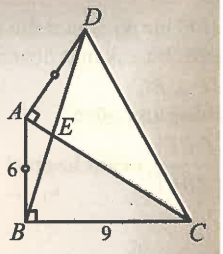
A) $3-\sqrt{3}$ B) 3 C) $3+\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $6-\sqrt{3}$

18.
ABC bir eşkenar üçgen
$ED \perp BC$
$EF \perp AC$
$FK \perp BC$
$|FKDE| = 9 \cdot |FBK|$
$|DC| = 6$ br
olduğuna göre
$|KD| = x$ **kaç br dir?**



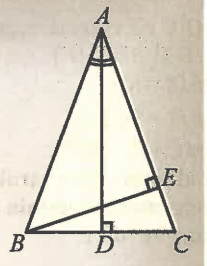
A) 7 B) 8 **C)** 9 D) 10 E) 12

19.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AC$
$AB \perp BC$
$|DA| = |AB|$
$AC \cap BD = \{E\}$
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 9$ br
olduğuna göre
$|DEC|$ **kaç br^2 dir?**



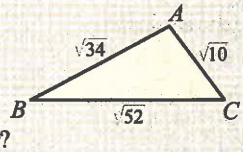
A) 18 B) 21 C) 24 **D)** 27 E) 30

20.
ABC bir üçgen
$BE \perp CA$
$AD \perp BC$
$m(BAD) = m(CAD)$
$|AD| = 6\sqrt{2}$ br
$|BE| = 4\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ **kaç br^2 dir?**



A) 18 **B)** $18\sqrt{2}$ C) 24 D) $24\sqrt{2}$ E) 36

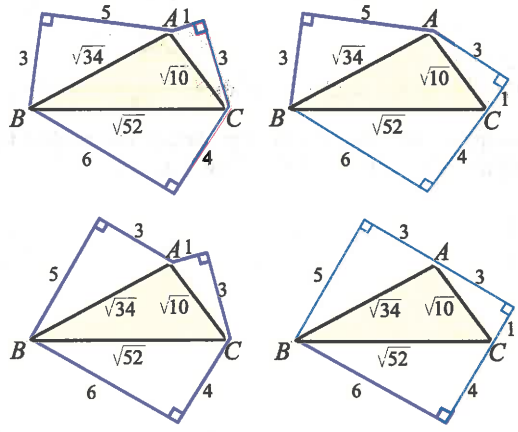
Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = \sqrt{34}$ br
$|BC| = \sqrt{52}$ br
$|CA| = \sqrt{10}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ *kaç* br^2 *dir?*



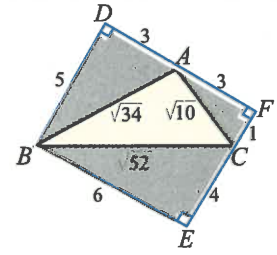
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Bu tip soruları çözmeden önce evvela kenar uzunluklarının Pisagor teoremini sağlayıp sağlamadığına bakılır. Sağlıyorsa üçgen dik üçgen olduğundan, dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısı alanı verir. Ama eğer sağlamıyorsa ve üçgen ikizkenar değilse başka özel bir durum söz konusudur. Şimdi bunu açıklayalım:

Üçgenin en uzun kenarının üzerine üçgenin dışına doğru dik kenar uzunlukları tam sayı olan bir dik üçgen yerleştirilir. Daha sonra da en kısa iki kenarının üzerine üçgenin dışına doğru dik kenar uzunlukları tam sayı olan dik üçgenler yerleştirilir.



En kısa iki kenar üzerine yapıştırılan dik üçgenlerin dik kenar uzunlukları olan dört sayıdan iki tanesinin toplamıyla, diğer iki tanesinin farkı, en uzun kenar üzerine yapıştırılan dik üçgenin dik kenar uzunluklarını verirse, oluşan şekil dikdörtgendir. Örneğin yukardaki 4 durumdan sonuncusunda $3 + 3 = 6$ ve $5 - 1 = 4$ olduğundan oluşan şekil dikdörtgendir.

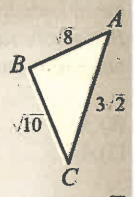


DBEF dikdörtgeninin alanından *ADB*, *BEC* ve *CFA* dik üçgenlerinin alanı çıkartılırsa cevap bulunur.

$|ABC| = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 5/2 - 4 \cdot 6/2 - 1 \cdot 3/2 = 9$ br^2

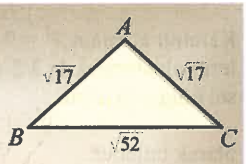
Doğru cevap: E.

21.
ABC bir üçgen
$|AB| = \sqrt{8}$ br
$|BC| = \sqrt{10}$ br
$|CA| = 3\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



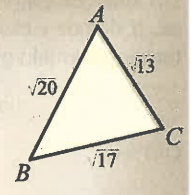
A) 4 **B)** $2\sqrt{5}$ C) 5 D) $2\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{2}$

22.
ABC bir üçgen
$|AB| = \sqrt{17}$ br
$|BC| = \sqrt{52}$ br
$|CA| = \sqrt{17}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{34}$ **D)** $\sqrt{52}$ E) $\sqrt{68}$

23.
ABC bir üçgen
$|AB| = \sqrt{20}$ br
$|BC| = \sqrt{17}$ br
$|CA| = \sqrt{13}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 **E)** 7

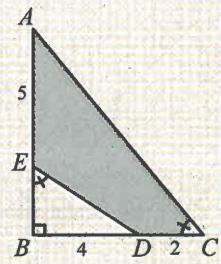
ALANLAR FARKI YARDIMIYLA ALAN HESABI

Henüz ayakta durmayı hatta devrilmeden oturmayı bile beceremeyen küçük bir bebeği nasıl tartarsınız?

Sanırım çoğunuz cevabı bulmuştur: Önce kendim tartılırım, sonra da bebeği kucağıma alıp tekrar tartılırım. İki tartı arasındaki fark bebeğin kilosunu verir! Burada kullanılan mantık, geometri sorularında da kullanılır. Örneğin A alanını hesaplamak zor ama B ve $A + B$ alanlarını hesaplamak kolaysa A'yı $A + B$'den B'yi çıkartarak buluruz.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$m(C) = m(BED)$
$|AE| = 5$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 2$ br

olduğuna göre $AEDC$ dörtgensel bölgesinin alanı kaç br^2 *dir?*



A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 30

Çözüm: $|EB|$ değerini bulabilirsek, ABC ve EBD üçgenlerinin alanını bulmuş olacağız, pozitif farkları da cevap olacak. Bu üçgenlerin ikişer iç açısı eş olduğundan, bu üçgenler benzerdir. $|EB| = x$ br olsun diyerek ''şadırvan'' yaparsak;

$$x\cdot(x+5) = 4\cdot(4+2)$$
$$x^2 + 5x - 24 = 0$$
$$(x+8)\cdot(x-3) = 0$$

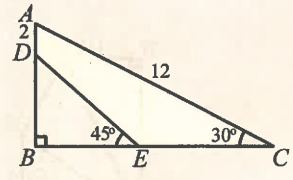
eşitliğine ulaşırız. Şu durumda $x = 3$ olduğundan

$$|AEDC| = 6\cdot 8/2 - 3\cdot 4/2 = 18 \text{ br}^2$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

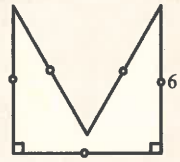
24.



$|ADEC|$ kaç br^2 dir?

$18\sqrt{3} - 8$

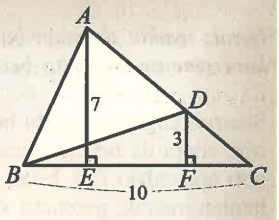
25.



Eşkenar beşgen şeklindeki bölgenin alanı kaç br^2 dir?

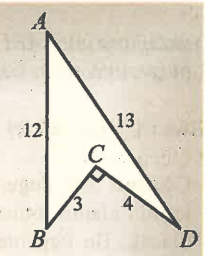
$36 - 9\sqrt{3}$

26.
ABC bir üçgen
$AE \perp BC$
$DF \perp BC$
$|AE| = 7$ br
$|DF| = 3$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre
$|ABD|$ kaç br^2 dir?



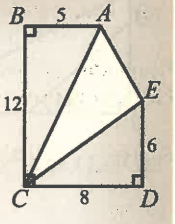
A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 45

27.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BC \perp CD$
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 4$ br
$|BA| = 12$ br
$|AD| = 13$ br
olduğuna göre $|ABCD|$ kaç br^2 dir?



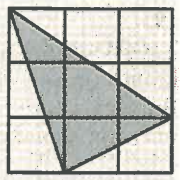
A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

28.
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$CD \perp DE$
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 8$ br
$|DE| = 6$ br
olduğuna göre $|ACE|$ kaç br^2 dir?



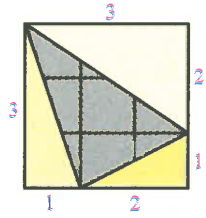
A) 30 B) 33 C) 36 D) 39 E) 42

Örnek. *Yandaki şekil 9 adet birim kareden oluşturulmuştur. Buna göre taralı üçgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?*



A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

Çözüm: En büyük karenin, taralı üçgensel bölgenin dışında kalan kısımlarının birer dik üçgen olduğunu görünüz. O halde karenin alanından, o dik üçgenlerin alanlarını çıkartırsak cevaba ulaşmış olacağız.



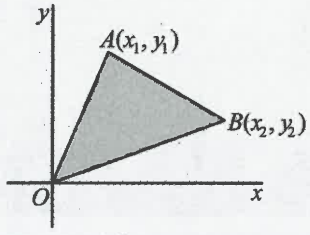
Karenin alanının $3^2 = 9$ olduğunu not edelim. Dik üçgenlerin alanlarıysa 1, 3/2 ve 3 olduğundan taranmış üçgensel bölgenin alanı

$$9 - 1 - 3/2 - 3 = 7/2$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

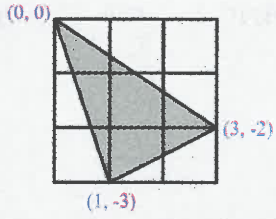
Uyarı. Bu tarz soruları çözmek için bir pratik yolumuz da var: Üçgeni, bir köşesi orijinle çakışacak şekilde dik koordinat sistemine yatırmak.



Yukardaki AOB üçgeninin A, O, B köşelerinin koordinatları sırasıyla (x_1, y_1), $(0, 0)$, (x_2, y_2) olsun. A'dan x eksenine, B'den de y eksenine bir paralel çizip dikdörtgen oluşturup, yukardaki gibi alan hesaplayınca

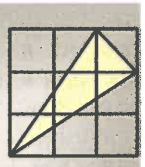
$$|AOB| = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

çıkıyor.



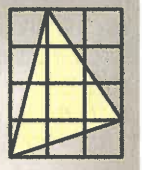
O halde yukardaki soruda da sol üst köşeyi (0, 0) alırsak, diğerleri (1, −3) ve (3, −2) olduğundan formül gereği alan $\frac{1}{2} \cdot |1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3)| = \frac{7}{2}$ olur.

29.
Yandaki şekil 9 adet birim kareden oluşturulmuştur.
Buna göre taralı üçgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



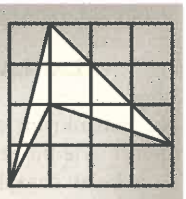
A) 2 **B)** 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

30.
Yandaki şekil 12 adet eş kareden oluşturulmuştur.
Taralı dörtgensel bölgenin alanı 22 br^2 olduğuna göre kullanılan karelerin her birinin alanı kaç br^2 dir?



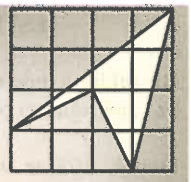
A) 3 B) 3,5 **C)** 4 D) 4,5 E) 5

31.
Yandaki şekil 16 adet birim kareden oluşturulmuştur.
Buna göre taralı dörtgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 7

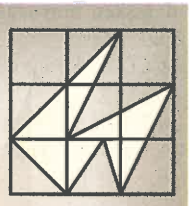
32.
Yandaki şekil 16 adet birim kareden oluşturulmuştur.
Buna göre taralı dörtgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 6 E) 7

33.
Yandaki şekil 9 adet birim kareden oluşturulmuştur.

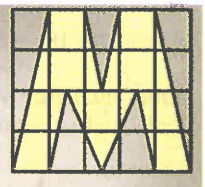
Buna göre taralı yedigensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 2 B) $\frac{5}{2}$ **C)** 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

34.
Yandaki şekil 20 adet birim kareden oluşturulmuştur.

Buna göre M harfi şeklinde taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

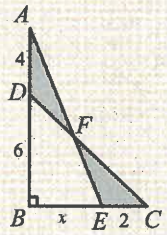


A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 **E)** 12

EŞİT ALANLI BÖLGELER

Bir şeklin içinde eşit alanlı iki bölge olması durumunda ne yapacağımızı öğreneceğiz.

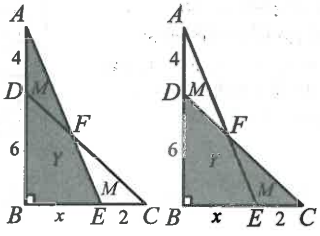
Örnek. *ABE ve DBC birer dik üçgen*
AB ⊥ BC
AE ∩ CD = {F}
|ADF| = |FEC|
|AD| = 4 br
|DB| = 6 br
|EC| = 2 br
olduğuna göre |BE| = x kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Taralı ve tarasız bölgelerin alanlarına birer değişken atayacağız yani bir nevi onları isimlendireceğiz.



$|ADF| = |FEC| = M$ br^2 ve $|DBEF| = Y$ br^2 olsun. Görüldüğü üzere ABE ve DBC dik üçgenleri $M + Y$ br^2 olarak eşit alana sahiptirler.

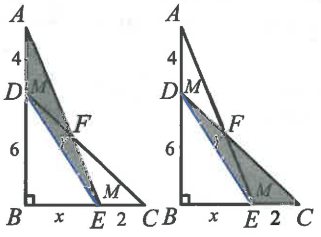
$$|ABE| = \frac{(6+4)\cdot x}{2}$$

ve

$$|DBC| = \frac{6\cdot(x+2)}{2}$$

olduğundan $10x = 6x + 12$ eşitliği çözülerek $x = 3$ olur.

İkinci yol. $DBEF$ yerine DEF bölgesine Y br^2 dersek işlemleri daha kısaltmış oluruz.



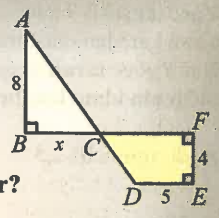
Alanı $M + Y$ olan üçgenlerin tabanları da belli, yükseklikleri de.

$$|ADE| = \frac{4\cdot x}{2} = 2x \text{ ve } |DEC| = \frac{2\cdot 6}{2} = 6$$

olduğundan $2x = 6$ ve $x = 3$ bulunur.

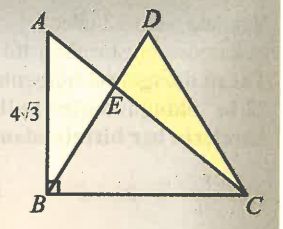
Doğru cevap: B.

35.
AB ⊥ BF, BF ⊥ FE, FE ⊥ ED
BF ∩ DA = {C}
|DE| = 5 br
|EF| = 4 br
|AB| = 8 br
|ABC| = |CDEF|
olduğuna göre |BC| = x kaç br dir?



A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{17}{3}$ C) 6 D) $\frac{19}{3}$ E) $\frac{20}{3}$

36.
ABC bir dik üçgen
DBC bir eşkenar üçgen
AB ⊥ BC
AC ∩ BD = {E}
|ABE| = |CDE|
|AB| = 4√3 br
olduğuna göre eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu kaç br dir?



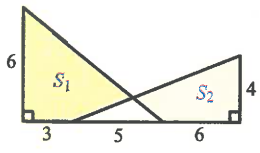
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

ALANLAR FARKINI HESAPLAMAK

Ne zamanki bir alan probleminde $S_1 - S_2$ soruluyor, o zaman öyle bir yerin alanına S_3 deyin ki; $S_1 + S_3$ de $S_2 + S_3$ de kolay hesaplanabiliyor olsun. O zaman

$$(S_1 + S_3) - (S_2 + S_3) = S_1 - S_2$$

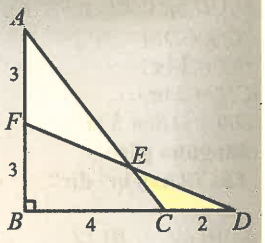
işlemiyle cevaba ulaşırsınız.



Örneğin, yukardaki soruda $S_1 - S_2$ sorulursa, tabanı 5 br olan üçgenin alanına S_3 diyeceğiz. $S_1 + S_3 = 24$ ve diğer yandan $S_2 + S_3 = 22$ olduğundan $S_1 - S_2 = 2$ olarak bulunur.

37.

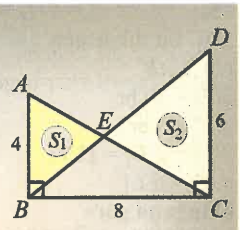
$AB \perp BC$
$|AF| = 3$ br
$|FB| = 3$ br
$|BC| = 4$ br
$|CD| = 2$ br
olduğuna göre taralı üçgensel bölgelerin alanlarının pozitif farkı kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

38.

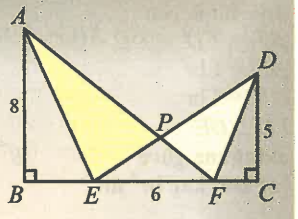
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$AC \cap BD = \{E\}$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 6$ br
olduğuna göre
$|CDE| - |ABE| = S_2 - S_1$ farkı kaç br^2 dir?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

39.

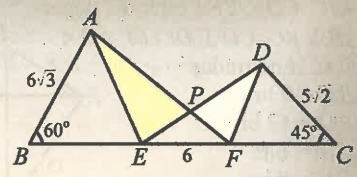
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$[EF] \subset [BC]$
$AF \cap DE = \{P\}$
$|AB| = 8$ br
$|EF| = 6$ br
$|CD| = 5$ br
olduğuna göre
$|AEP| - |PFD|$ farkı kaç br^2 dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

40.

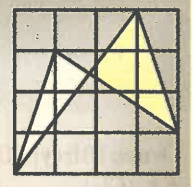
$m(ABC) = 60°$
$m(BCD) = 45°$
$[EF] \subset [BC]$
$AF \cap DE = \{P\}$
$|AB| = 6\sqrt{3}$ br
$|EF| = 6$ br
$|CD| = 5\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|AEP| - |PFD|$ farkı kaç br^2 dir?



A) 9 B) 10 C) 11 **D) 12** E) 13

41.

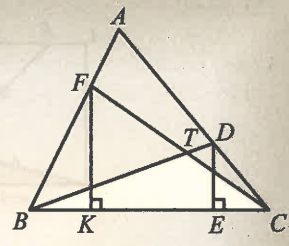
Yandaki şekil 16 adet birim kareden oluşturulmuştur.
Buna göre farklı renklerle taranmış üçgenlerin alanlarının pozitif farkı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{1}{2}$ **B) 1** C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

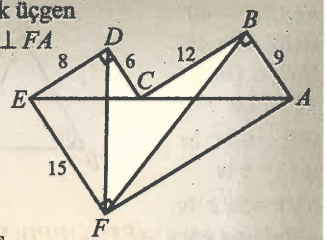
42.

ABC bir üçgen
$FK \perp BC$
$DE \perp BC$
$|FK| = 2 \cdot |DE|$
$|FBT| = 12$ br^2
$|CDT| = 1$ br^2
olduğuna göre
$|CTB|$ kaç br^2 dir?



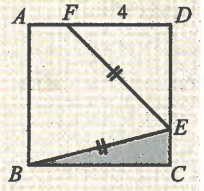
A) 8 B) 9 **C) 10** D) 11 E) 12

43.
ABC, CDE, EFA birer dik üçgen
$AB \perp BC$, $CD \perp DE$, $EF \perp FA$
E, C, A doğrudaş
$|BA| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 6$ br
$|DE| = 8$ br
$|EF| = 15$ br
olduğuna göre taranmış
***BCDF* dörtgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?**



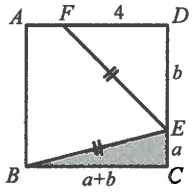
A) 60 B) 64 C) 72 **D) 78** E) 80

Örnek [Birey]. *ABCD kare*
$E \in [CD]$
$F \in [AD]$
$|BE| = |EF|$
$|FD| = 4$ br
olduğuna göre BCE üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

Çözüm: $|CE| = a$ br ve $|ED| = b$ br diyelim. $|BC| = a + b$ br olur. Şu durumda taralı bölgenin alanını bulabilmek için $a \cdot (a + b)$ çarpımına ihtiyaç duyuyoruz. Gerekli işlemler yapılınca bulacağımızı umut ediyoruz.



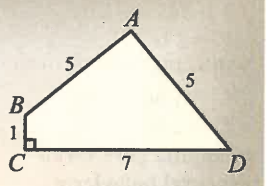
BCE ve *EDF* dik üçgenleri eşit boyda hipotenüse sahip olduklarından

$$a^2 + (a+b)^2 = b^2 + 4^2$$
$$a^2 + a^2 + 2ab + b^2 = b^2 + 4^2$$
$$2a^2 + 2ab = 4^2$$
$$a^2 + ab = 8$$

bulunur. Zaten sorulan alan değeri $a(a + b)/2$ olduğundan cevap 4 br^2 olmalıdır.

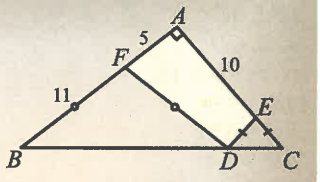
Doğru cevap: D.

44.
ABCD bir dörtgen
$BC \perp CD$
$|BC| = 1$ br
$|CD| = 7$ br
$|DA| = |AB| = 5$ br
olduğuna göre
$|ABCD|$ kaç br^2 dir?



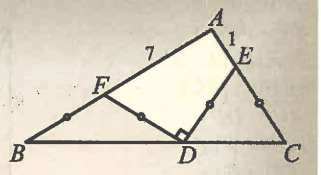
A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 **E) 16**

45.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|AE| = 10$ br
$|AF| = 5$ br
$|BF| = |FD| = 11$ br
$|DE| = |EC|$
olduğuna göre
$|AFDE|$ kaç br^2 dir?



A) 28 B) 32 **C) 36** D) 42 E) 47

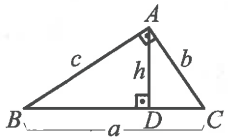
46.
ABC bir üçgen
$|BF| = |FD| = |DE| = |EC|$
$|AE| = 1$ br
$|AF| = 7$ br
$FD \perp DE$
olduğuna göre
$|AFDE|$ kaç br^2 dir?



A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 **E) 16**

Teorem. *Bir dik üçgenin iki dik kenarının çarpımı, hipotenüsü ile ona ait yüksekliğin çarpımına eşittir.*

Kanıt: İki farklı tabana göre alan hesaplayacağız.

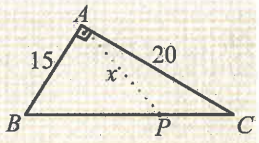


Uzunluğu b br olan kenara inen yükseklik c br, uzunluğu a br olan kenara inen yükseklik h br olduğundan

$$b \cdot c = a \cdot h$$

olur.

Örnek. *CAB bir dik üçgen*
$|BA| = 15$ br
$|AC| = 20$ br
[BC] üzerinde değişken bir P noktası alınıyor.
Buna göre $|AP| = x$
en az kaç olabilir?



A) 10 B) 12 C) 12,5 D) 15 E) 16

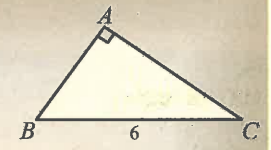
Çözüm: $|AP|$'nin en az olması, hipotenüse inen yükseklik olmasıyla mümkün. Pisagor teoreminden $|BC| = 25$ br bulunur ve iki türlü alan formülü yazılırsa

$$15 \cdot 20 = 25 \cdot |AP|$$

eşitliğinden $|AP| = 12$ br bulunur.

Doğru cevap: B.

47.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$|BC| = 6$ br
olduğuna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alanının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

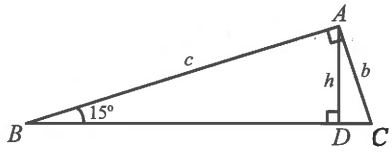


A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

Örnek. *Bir 15°-75°-90° üçgeninde iki dik kenarın çarpımının, hipotenüse inilen dikmenin karesine oranı kaçtır?*

A) 16 B) 8 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Dik kenar uzunlukları b ve c br, hipotenüse indirilen dikmenin uzunluğu h br olsun. bc/h^2 değeri soruluyor. *ABC* üçgeni, 15°-75°-90° üçgeni olduğundan hipotenüsün boyu, ona ait yüksekliğin boyunun 4 katıdır. Yani $|BC| = 4h$ br dir.



İki farklı şekilde alan yazarsak;

$$4h \cdot \frac{h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$$

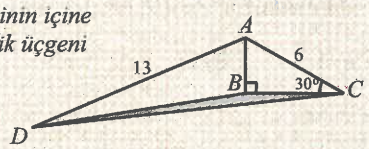
eşitliğinden $b \cdot c = (2h)^2$ olur. O halde istenilen oran

$$\frac{b \cdot c}{h^2} = 4$$

olarak bulunur.

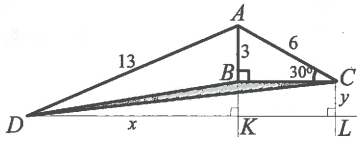
Doğru cevap: C.

Örnek. *ADC üçgeninin içine yandaki gibi ABC dik üçgeni çizilmiştir.*
$m(ACB) = 30°$
$|AC| = 6$ br
$|AD| = 13$ br
$|ABD| = 2\sqrt{3} \cdot |BCD|$
olduğuna göre $|BCD|$ *kaç* br^2 *dir ?*



A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

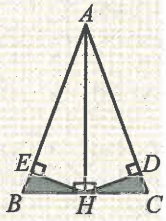
Çözüm: D'den BC'ye paralel bir doğru çizerek DLC dik üçgeni oluşturulursa $[DK]$, ABD üçgeninin, $[CL]$ de BCD üçgeninin yüksekliği olur.



$|ABD| = 2\sqrt{3} \cdot |BCD|$ eşitliğinden $x = 6y$ bulunur, AKD üçgeninde Pisagor Teoremi'nde yerine yazılırsa $y = 2$ ve $x = 12$ bulunur. O halde $|BCD| = 3\sqrt{3}$ br^2 bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [ÖSS 2003]. *ABC bir üçgen*
$|AH| \perp |BC|$, $|HD| \perp |AC|$, $|HE| \perp |AB|$
$|AB| = |AC|$
$|BC| = 4$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre taralı üçgenlerin toplam alanı kaçtır?



A) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{17}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{17}}{8}$

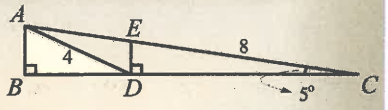
Çözüm: ABC ikizkenar olduğundan, tepeden indirilen yükseklik tabanı ikiye böler, böylece $|BH| = |HC| = 2$ br olur. AHC dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden $|DC| = 1/2$ br bulunur. O halde $|HD| = \frac{\sqrt{15}}{2}$ br, dolayısıyla

$$|HDC| = = \frac{\sqrt{15}}{8} \text{ br}^2$$

ve taralı alanlar eş olduğundan toplamları $\frac{\sqrt{15}}{4}$ br^2 olur.

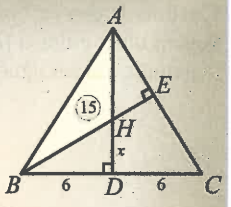
Doğru cevap: B.

48.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$ED \perp BC$
$m(BCA) = 5°$
$|AD| = 4$ br
$|EC| = 8$ br
olduğuna göre $|ABD|$ kaç br^2 dir?



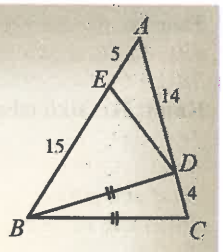
A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

49.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$BE \perp CA$
$|BD| = |DC| = 6$ birim
$|ABH| = 15$ br^2
olduğuna gore
$|HD| = x$ kaçtır?



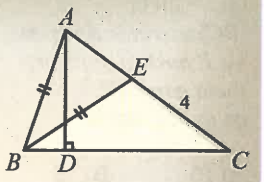
A) 2 B) 3 **C) 4** D) 5 E) 6

50.
ABC bir üçgen
$|BC| = |BD|$
$|CD| = 4$ br
$|DA| = 14$ br
$|AE| = 5$ br
$|EB| = 15$ br
olduğuna göre
$|EBD|$ kaç br^2 dir?



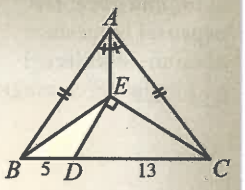
A) 63 B) 60 C) 56 D) 42 E) 30

51.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|CA| = |CB|$
$|AB| = |BE|$
$2 \cdot |AD| = 3 \cdot |AE|$
$|EC| = 4$ br
olduğuna göre
$|EBC|$ kaç br^2 dir?



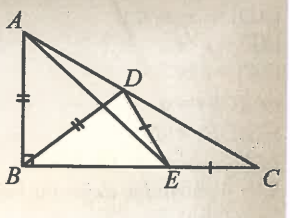
A) 16 B) 12 **C) 8** D) 6 E) 4

52.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(BAE) = m(EAC)$
$CE \perp ED$
$|BD| = 5$ br
$|DC| = 13$ br
olduğuna göre
$|EBD|$ kaç br^2 dir?



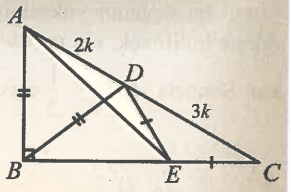
A) 10 B) $\frac{25}{2}$ C) 15 D) 25 E) 30

53.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |BD|$
$|DE| = |EC|$
$|AEC| = 12$ br^2
olduğuna göre
$|DBE|$ kaç br^2 dir?



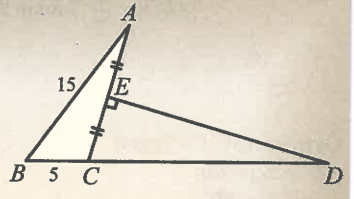
A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

54.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |BD|$
$|DE| = |EC|$
$3 \cdot |AD| = 2 \cdot |DC|$
$|DBE| = 15$ br^2
olduğuna göre
$|AED|$ kaç br^2 dir?



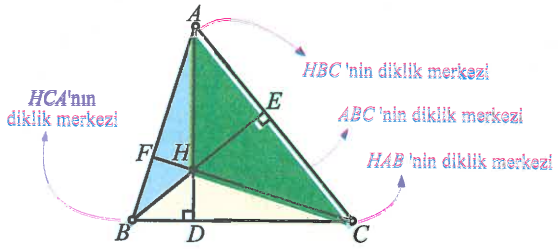
A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

55.
ABC bir üçgen
B, C, D doğrudaş
$DE \perp AC$
$|AE| = |EC|$
$|ECD| = 2 \cdot |ABC|$
$|AB| = 15$ br
$|BC| = 5$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



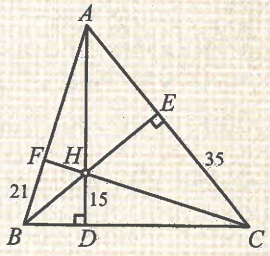
A) 15 B) 25 C) 30 D) 40 E) 60

Diklik Merkezinin Bazı Alan Problemlerindeki Rolü. Herhangi bir ABC üçgeni ve o üçgenin H'de kesişen üç yüksekliğini çizelim. H'nin ABC üçgeninin diklik merkezi olduğunu daha önce söylemiştik. Şimdi söyleyeceğimiz ise şu:



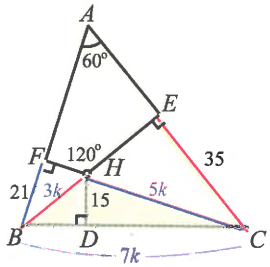
ABC üçgeninin üç köşesi de H'yi köşelere birleştirerek elde edilen üçgenlerin diklik merkezidir. Örneğin, HBC üçgeninde BC'ye inen yükseklik HD, CH'ye inen yükseklik BF ve HB'ye inen yükseklik CE tek bir A noktasında kesişirler, bu yüzden A noktası HBC'nin diklik merkezidir. Benzer şekilde B noktası HCA'nın, C noktası da HAB'nin diklik merkezidir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE \cap CF = \{H\}$
$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$|HD| = 15$ br
$|BF| = 21$ br
$|EC| = 35$ br
olduğuna göre
$m(CAB)$ kaç derecedir?



A) 30 B) 36 C) 45 D) 60 E) 75

Çözüm: $[AD]$ ve $[BE]$, ABC üçgeninin yüksekliklerinden ikisi olduğundan onların kesişim noktasından geçen $[CF]$ de üçüncü yüksekliktir. O halde $CF \perp AB$ olduğunu not edelim. Şu durumda $[HD]$, $[FB]$ ve $[EC]$ doğru parçaları BCH üçgeninin yükseklikleridir.



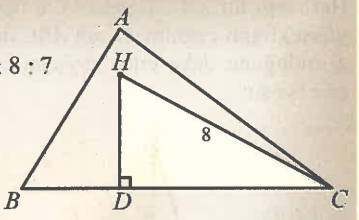
Kenarlar ile o kenarlara inen yükseklikler ters orantılı olduğundan

$$|BC| : |CH| : |HB| = 7 : 5 : 3$$

olur. O halde 3-5-7 üçgeni özelliğinden $m(BHC) = m(FHE) = 120^\circ$ olur. $AFHE$ dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından $m(BAC) = 60^\circ$ olarak bulunur.

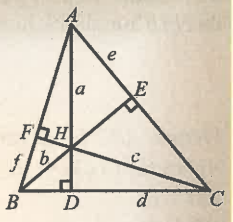
Doğru cevap: D.

56.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$|AB| : |BC| : |CA| = 5 : 8 : 7$
$HD \perp BC$
$|CH| = 8$ br
olduğuna göre
$|HDC|$ kaç br^2 dir?



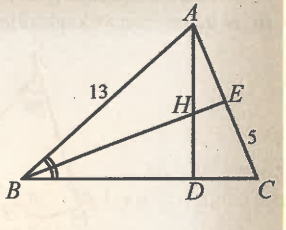
A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 8 **D)** $8\sqrt{3}$ E) 16

57.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AH| = a$ br, $|BH| = b$ br
$|CH| = c$ br, $|DC| = d$ br
$|EA| = e$ br, $|FB| = f$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



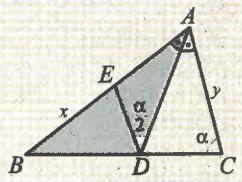
A) $ad+be+cf$ **B)** $\frac{1}{2}(ad+be+cf)$ C) $2\cdot(ad+be+cf)$
D) $ae+bf+cd$ E) $\frac{1}{2}(ae+bf+cd)$

58.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|BA| = |BC|$
$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$|AB| = 13$ br
$|EC| = 5$ br
olduğuna göre
$|AD|$ kaç birimdir?

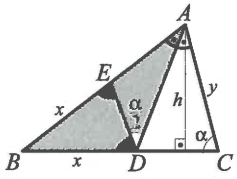


A) $\frac{100}{13}$ **B)** $\frac{120}{13}$ C) $\frac{140}{13}$ D) $\frac{160}{13}$ E) $\frac{180}{13}$

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
[AD] iç açıortay
$|BE| = x$ br
$|AC| = y$ br
$m(ACB) = \alpha$
$m(ADE) = \alpha/2$
olduğuna göre $|ABD|$'nin
x ve y cinsinden değerini bulalım.

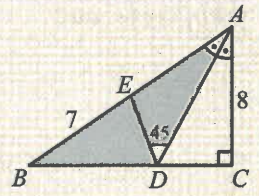


Çözümü: AED ve ADC üçgenlerinde açılar adlandırılırsa, *iki iç açının toplamı üçüncü açının dışını verir* teoremi gereğince EBD üçgenini ikizkenar buluruz. O halde $|BD| = x$ br dir.



Şimdi bu üçgenin yüksekliğini bulacağız. A'dan BC'ye dikme indirirsek, $\sin\alpha = h/y$ olacağından $h = y\cdot\sin\alpha$ çıkar. Sonuçta $|ABD| = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin\alpha$.

Örnek. *ACB dik üçgen*
AD iç açıortay
$m(ADE) = 45^\circ$
$|BE| = 7$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre
$|ABD|$ kaç br^2 dir?



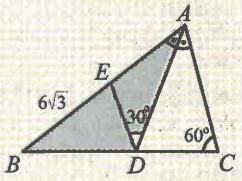
A) 28 B) 24 C) 21 D) 14 E) 7

Çözüm: Biz sadece değerleri yukardaki formülde yerine koyacağız ama siz bir de formülü kullanmadan çözünüz.

$$|ABD| = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\sin 90^\circ = 28.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD iç açıortay
$m(ACB) = 60^\circ$
$m(ADE) = 30^\circ$
$|BE| = 6\sqrt{3}$ br
$|ADB| = 216$ br^2
olduğuna göre $|AC|$ kaç br *dir?*



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

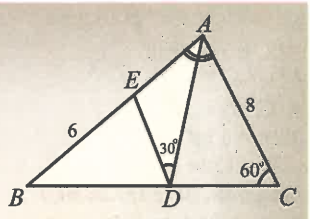
Çözüm: Yine son verdiğimiz teorem gereğince

$$|ADB| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot|AC|\cdot\sin 60^\circ = 216 \text{ br}^2$$

eşitliğinden $|AC| = 16$ br bulunur.

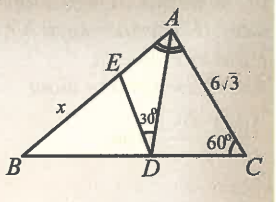
Doğru cevap: E.

59.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(ACB) = 60°$
$m(ADE) = 30°$
$|EB| = 6$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre
taralı ABD üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



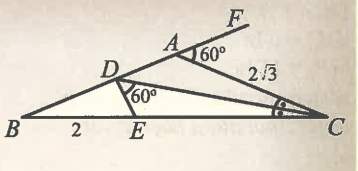
A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 **D)** $12\sqrt{3}$ E) 24

60.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(ACB) = 60°$
$m(EDA) = 30°$
$|EB| = x$ br
$|ABD| = 45$ br^2
$|AC| = 6\sqrt{3}$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 6 B) 8 C) 9 **D)** 10 E) 12

61.
ABC bir üçgen
$[CD]$ iç açıortay
D, A, F doğrusal
$m(CAF) = 60°$
$m(CDE) = 60°$
$|BE| = 2$ br
$|AC| = 2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|DBC|$ kaç br^2 dir?

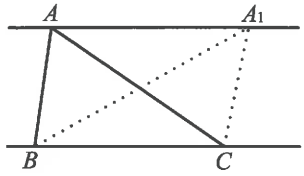


A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

ALAN KAYDIRMA PROBLEMLERİ

Teorem. *Tabanı sabit olan bir üçgenin tepesi tabana paralel olarak kaydırılırsa alanı değişmez.*

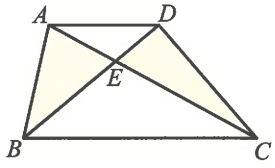
Kanıt: Rastegele bir ABC üçgeni çizelim. ABC üçgeninin A köşesinden BC'ye paralel olacak şekilde bir doğru çizelim. Bu doğrunun üzerinde A'dan farklı bir A_1 noktası alalım.



Paralel iki doğru arasındaki uzaklıklar her yerde aynı olduğundan BAC üçgeni ile BA_1C üçgeninin yükseklikleri birbirlerine eşittir. Tabanları da birbirlerine eşit olduğundan alan değişmez.

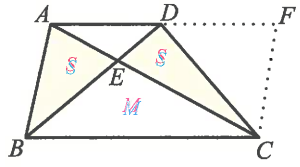
A, B, C, A_1 noktalarının bir yamuk belirttiğini fark ettiniz değil mi? Hemen buradan çıkan şu özelliği bir sonuç olarak verelim:

Sonuç 1: $ABCD$, köşeleri E'de kesişen AD // BC şeklinde bir yamuk olsun.



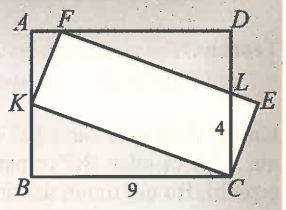
ABC ile DBC üçgenlerinin alanları eşit olacağından ve her ikisinde de EBC bölgesi ortak olduğundan ABE ile DEC üçgensel bölgelerinin alanı her daim birbirine eşit olur.

Sonuç 2: $ABCD$ yamuğunu, alt şekildeki gibi DF ve CF doğrularını çizerek $ABCF$ paralelkenarına tamamlarsak;



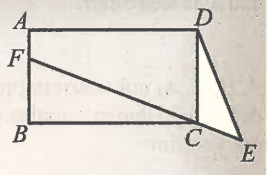
DBC üçgensel bölgesinin alanının paralelkenarının alanının yarısı olduğu görülür.

62.
$ABCD$ ve $CEFK$ birer dikdörtgen
$EF \cap CD = \{L\}$
$|BC| = 9$ br
$|CL| = 4$ br
olduğuna göre $|CEFK|$ kaç br^2 dir?



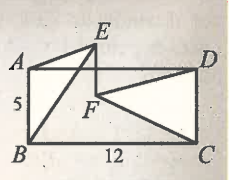
A) 18 B) 27 **C) 36** D) 45 E) 72

63.
$ABCD$ bir dikdörtgen
E, C, F doğrusal
$|ABCD| = 8 \cdot |CED|$
olduğuna göre
$\frac{|FC|}{|CE|}$ **oranı kaçtır?**



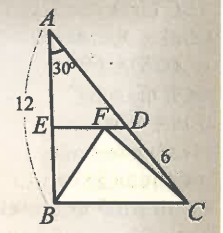
A) 8 B) 6 C) 5 **D) 4** E) 2

64.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$EF // AB$
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre
$|EAB| + |DFC|$
toplamı kaç br^2 dir?



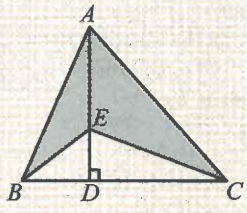
A) 60 B) 48 **C) 30** D) 24 E) 15

65.
ABC bir üçgen
$ED // BC$
$m(CAB) = 30°$
$|CD| = 6$ br
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre taralı BCF üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) 36 **B) 18** C) 15 D) 12 E) 9

Soru Tipi. *ABC üçgeninin BC kenarına ait yüksekliği olan AH üzerinde keyfi bir P noktası alınırsa; $ABPC$ dörtgeninin alanı $\frac{|AP| \cdot |BC|}{2}$ olur.*

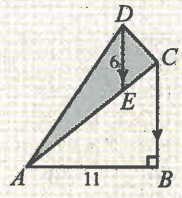


Çözümü: Taralı iki üçgenin toplamı bize dörtgenin alanını verecek:

$$|ABPC| = |ABP| + |ACP|$$
$$= \frac{|AP| \cdot |BH|}{2} + \frac{|AP| \cdot |HC|}{2}$$
$$= \frac{|AP| \cdot (|BH| + |HC|)}{2} = \frac{|AP| \cdot |BC|}{2}$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

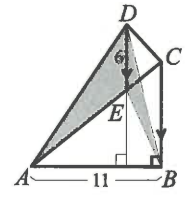
Örnek. *$ABCD$ bir dörtgen*
$AB \perp BC$
$[AC]$ köşegen
$DE // CB$
$|DE| = 6$ br
$|AB| = 11$ br
olduğuna göre ACD üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) 11 B) 22 C) 33 D) 66 E) 132

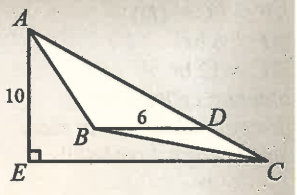
Çözüm: D ve E noktalarını B ile birleştirelim. $DE // CB$ olduğundan DCE ile DBE üçgenleri denktir. O halde bize $ADBE$ konkav dörtgeninin alanı soruluyor gibi davranabiliriz. $DE \perp AB$ olduğundan, öğrendiğimiz teorem gereği

$|ABDE| = \frac{11 \cdot 6}{2} = 33$ br^2 olmalıdır.



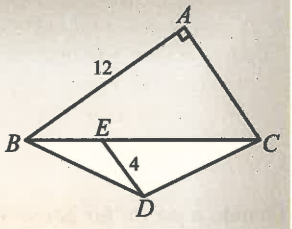
Doğru cevap: C.

66.
AEC bir dik üçgen
$AE \perp EC$
$BD \,//\, EC$
$|BD| = 6$ br
$|AE| = 10$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



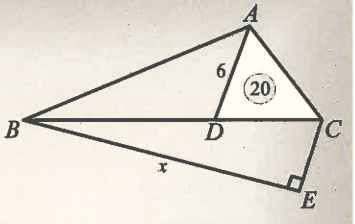
A) 24 **B) 30** C) 36 D) 45 E) 60

67.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BC]$ köşegen
$DE \,//\, CA$
$|AB| = 12$ br
$|DE| = 4$ br
olduğuna göre
$|BDC|$ kaç br^2 dir?



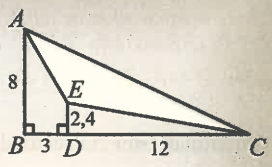
A) 48 B) 36 C) 28 **D) 24** E) 12

68.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BC]$ köşegen
$BE \perp EC$
$|AD| = 6$ br
$|BC| = 3 \cdot |DC|$
$|ADC| = 20$ br^2
olduğuna göre
$|BE| = x$ kaç br dir?



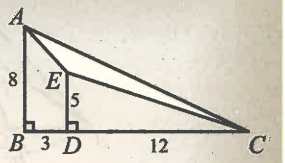
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 **E) 20**

69.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$ED \perp DC$
$|AB| = 8$ br
$|ED| = 2{,}4$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 12$ br
olduğuna göre $|AEC|$ kaç br^2 dir?



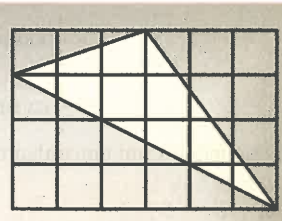
A) 20 B) 24 C) 28 **D) 30** E) 36

70.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$ED \perp DC$
$|AB| = 8$ br
$|ED| = 5$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 12$ br
olduğuna göre $|AEC|$ kaç br^2 dir?



A) 10 **B)** $\frac{21}{2}$ C) 11 D) $\frac{23}{2}$ E) 12

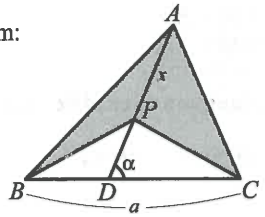
71.
Yandaki şekil 24 adet birim kareden oluşturulmuştur.
Buna göre taralı üçgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 6 B) 6,5 C) 7 **D) 7,5** E) 8

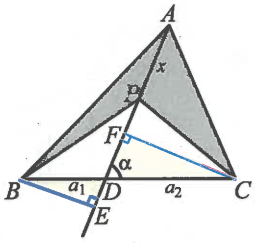
Teorem. *ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde herhangi bir D noktası alınsın. m(ADC) = α olsun. AD üzerindeki bir P noktası için ABPC konkav dörtgensel bölgesinin alanı* $\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot|BC|\cdot\sin\alpha$*'dır.*

Anlatılmak isteneni resmedelim:



$|BC| = a$ br
$|AP| = x$ br
$m(ADC) = \alpha$ ise
$|ABPC| = \frac{1}{2}ax\sin\alpha$.

Kanıt: $[AD]$'yi D yönünde uzatıp B ve C köşelerinden bu doğruya dikler indirelim. Dikme ayakları da sırasıyla E ve F olsun



$|BD| = a_1$ br ve $|DC| = a_2$ br olsun. BED ve CFD dik üçgenlerinden

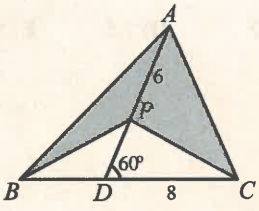
$$|BE| = a_1\cdot\sin\alpha$$
$$|CF| = a_2\cdot\sin\alpha$$

olduğunu not edelim. Taralı iki üçgenin alanları toplamı bize dörtgenin alanını verecek:

$$\begin{aligned}|ABPC| &= |ABP| + |APC| \\ &= \frac{1}{2}xa_1\sin\alpha + \frac{1}{2}xa_2\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}x\sin\alpha(a_1 + a_2) \\ &= \frac{1}{2}ax\sin\alpha\end{aligned}$$

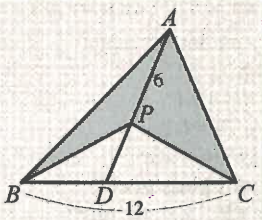
olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

72.



$|ABPC| = 18\sqrt{3}$ br^2 ise $|BD|$ kaç br dir?

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AP \cap BC = \{D\}$
$|AP| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre ABPC dörtgensel bölgesinin alanı en çok kaç br^2 *olabilir?*



A) 17 B) 18 C) 35 D) 36 E) 72

Çözüm: $m(ADC) = \alpha$ olsun.

$$|ABPC| = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\cdot\sin\alpha = 36\cdot\sin\alpha$$

olacağını öğrenmiştik. Demek ki alanın en büyük değerini alması, sin α'nın en büyük değerini almasıyla mümkündür. sin α da en çok 1 olabileceğinden alanın en büyük değeri 36 olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, kenarları a* br *ve* $8 - 2a$ br *olan dikdörtgenin alanı en çok kaç* br^2 *olur?* (ÖSS-1999)

A) 32 B) 24 C) 16 D) 12 E) 8

Çözüm: $a\cdot(8 - 2a)$ yani $2\cdot a\cdot(4 - a)$ çarpımının en büyük değeri soruluyor. Daha önce toplamları sabit olan sayıların (a ve $4 - a$) çarpımlarının en büyük olduğu anın sayıların birbirlerine eşit oldukları an olduğunu söylemiştik. O halde $a = 4 - a$ eşitliğinden $a = 2$ olması gerektiği anlaşılır ki cevap 8'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir kenarı* $4 - x$ br, *bu kenara inen yüksekliği* $x + 12$ br *olan bir üçgenin alanı en çok kaç* br^2 *olabilir?*

A) 32 B) 24 C) 16 D) 12 E) 8

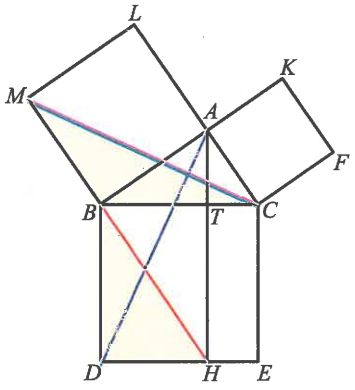
Çözüm: $4 - x$ ile $x + 12$ sayılarının toplamlarının sabit olduğuna dikkat ediniz. O halde çarpımlarının maksimum olması eşit olmalarına bağlıdır. $4 - x = x + 12$ eşitliğinden $x = -4$ bulunur. O halde taban 8 br, bu tabana ait yükseklik de 8 br olduğundan alan en çok 32 br^2 olabilir.

Doğru cevap: A.

PİSAGOR TEOREMİ'NİN KANITLARI

Bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

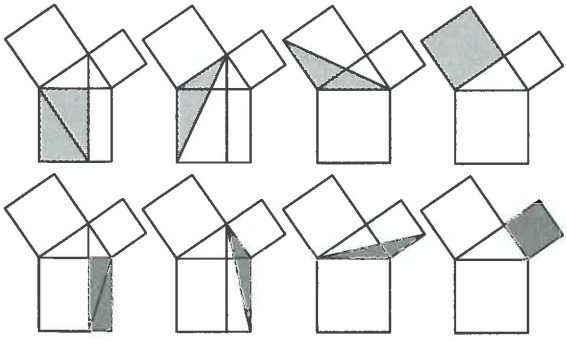
Kanıt 1: Öklid'in Elementler isimli eserinde verdiği kanıtı sunuyoruz.



Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve A açısı dik olan bir ABC üçgeninin üç kenarı üzerine üçgenin dışına doğru birer kare yerleştirilsin. Eğer iki küçük karenin ($ACFK$ ve $ABML$) alanları toplamının ($b^2 + c^2$), büyük karenin ($BCED$) alanına (a^2) eşit olduğu gösterilirse kanıt bitmiş demektir.

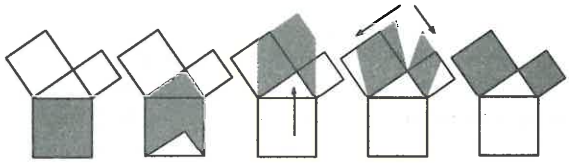
M ile C'yi ve A ile D'yi birleştirelim. MBC ile ABD üçgenlerinin eş olduğu aşikar. $|MBC| = \frac{1}{2}c^2$ olduğundan $|ABD| = \frac{1}{2}c^2$ olmalıdır.

A köşesinden DE'ye inen dikme ayağı H olsun. AH // BD olduğundan $|ABD| = |HBD| = \frac{1}{2}c^2$'dir. Bu alanlar da $BDHT$ dikdörtgeninin alanının yarısıdır. O halde $BDHT$ dikdörtgeninin alanı c^2 imiş. Simetrik işlemler AE ve BF doğruları için yapılırsa $THEC$ dikdörtgeninin de alanı b^2 bulunur. Dolayısıyla $a^2 = b^2 + c^2$.

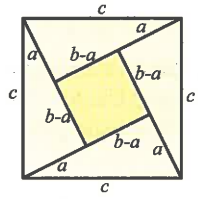


Euclid'in yaptığı bu kanıtın zarifliğini aslında yazılardan değil, yukarıdaki şekle bakarak anlayabilirsiniz. Sanırım söze gerek kalmadı şimdi.

Kanıt 2: Sanırım bunda da yorum yapmak boş.



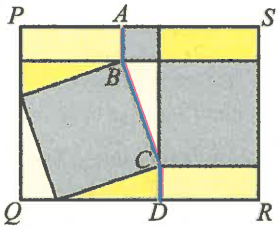
Kanıt 3: Dik kenarları a br ve b br, hipotenüsü c br olan dört eş dik üçgen şekildeki gibi yerleştirilirse ortada küçük bir kare oluşur (Neden?).



Dört eş dik üçgen ile küçük karenin alanları toplamı büyük karenin alanına eşit olmalıdır. O halde

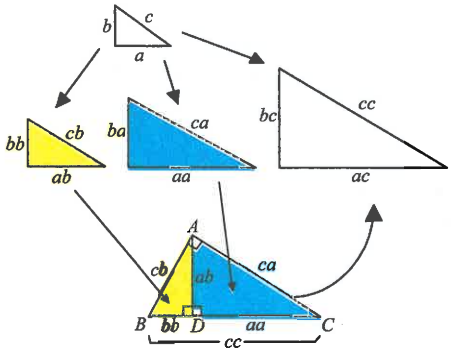
$$4(ab/2) + (b-a)^2 = c^2$$
$$2ab + b^2 - 2ab + a^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Kanıt 4: Bu kanıt da *Hüseyin Demir*'e ait. Üstad bunu 1931'de Darüşşafaka'da ortaokul öğrencisi iken yapmış.



Sadece $ABCD$ kırık çizgisinin $PQRS$ dikdörtgenini alanca eşit iki bölgeye ayırdığına konsantre olun. *Bhaskara*'ya layık bir rakip değil mi? Ne dersiniz?

Kanıt 5: Aşağıdaki muhteşem kanıt da bizim geometricilerimizden Alparslan Ceran'a ait:

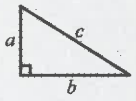


Meraklı bir vatandaş yapılmış tüm Pisagor kanıtlarını toplamaya karar vermiş, en son duyduğumda 370'de idi.

DİK ÜÇGENLERİN ALANINI HESAPLAMAK İÇİN BAZI PRATİK YOLLAR

''Yahu dik üçgenin alanını hesaplamakta ne var?'' diye düşünüyor olabilirsiniz. Haklısınız, eğer dik üçgenin kenarlarından ikisinin uzunluğu verilirse bir sorun yok ama bazen bu değerler hali hazırda verilmez, başka bilgilerden buldurulmak istenir. Şimdi bu tip sorulara örnekler vereceğiz.

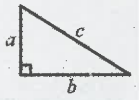
1. (a, b), (a, c) ve (b, c) çiftlerinden biri biliniyorsa. Eğer a ile b biliniyorsa alan zaten $\frac{a\cdot b}{2}$ işlemiyle bulunur. Eğer b ile c veya a ile c biliniyorsa Pisagor teoremi yardımıyla bilinmeyen dik kenar uzunluğu bulunarak yukarıdaki gibi sonuca gidilir.



2. $(a + b, c)$ çifti biliniyorsa. Pisagor teoreminden $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bu eşitlikte bazı çarpanlara ayırma oyunları yapacağız.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$
$$(a+b)^2 - 2ab = c^2$$
$$2ab = (a+b)^2 - c^2$$

elde edilir. Diğer yandan dik üçgenin alanı $\frac{a\cdot b}{2}$ olduğundan



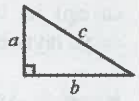
$$|ABC| = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}$$

yazılabilir.

3. $(a - b, c)$ çifti biliniyorsa. $a^2 + b^2$ toplamının aynı zamanda $(a - b)^2 + 2ab$ olduğunu da biliyoruz. O halde buradan da $a\cdot b$ çarpımını çekerek sonuca ulaşabiliriz.

$$(a-b)^2 + 2ab = c^2$$
$$2ab = c^2 - (a-b)^2$$

olduğundan



$$|ABC| = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}$$

yazılabilir.

Örnek. *Dik kenar uzunluklarının toplamı* 8 br, *hipotenüsü* 6 br *olan bir dik üçgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 14 E) 24

Çözüm: Dikkat ettiyseniz sorumuzda dik kenar uzunlukları değil, onların toplamı belli. Bu durumla ilgili

$$|ABC| = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}$$

formülünü çıkarmıştık. Onu kullanacağız:

$$\frac{8^2 - 6^2}{4} = 7 \text{ br}^2.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Dik kenar uzunluklarının farkı* 8 br, *hipotenüsü* 10 br *olan bir dik üçgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 18

Çözüm: Bu sefer de dik kenar uzunlukları yerine onların farkı verilmiş. Bu durumla ilgili

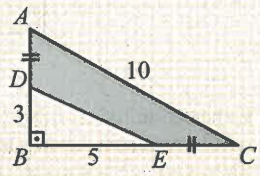
$$|ABC| = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}$$

formülünü çıkarmıştık. Onu kullanacağız:

$$\frac{10^2 - 8^2}{4} = 9 \text{ br}^2.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$|AB| \perp |BC|$
$|AD| = |CE|$
$|BD| = 3$ br
$|BE| = 5$ br
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre
$|ADEC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 15 B) 15,5 C) 16 D) 16,5 E) 17

Çözüm: Bulduğumuz formülün kıymeti anlaşılsın diye önce ''başkaları'' gibi çözelim ☺

Birinci yol. $|AD| = |EC| = x$ br diyelim.

$$(x+3)^2 + (x+5)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 6x + 9 + x^2 + 10x + 25 = 100$$
$$2x^2 + 16x = 66$$
$$x^2 + 8x = 33$$

Denklemin bu aşamasında, x'i bulmak için dakikalarca uğraş veren arkadaşlara buradan bir el sallıyoruz☺

$$|BCED| = |ABC| - |DBE|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(x+3)\cdot(x+5) - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(x^2 + 8x + 15 - 15) = \frac{33}{2}.$$

İkinci yol. Soruda dik kenar uzunlukları farkının sabit olduğunu (2 br) fark etmek lazım. O zaman

$$|ABC| = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}$$

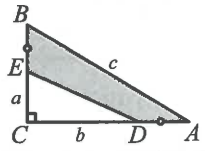
formülü gereğince

$$|ABC| = \frac{10^2 - 2^2}{4} = 24 \text{ br}^2$$

olarak bulunur. DBE üçgeninin alanı olan 7,5 br^2 bu değerden çıkartılınca cevap 16,5 br^2 olarak bulunmuş olur.

Doğru cevap: D.

Uyarı 1: Eğer aşağıdaki gibi bir soruda;

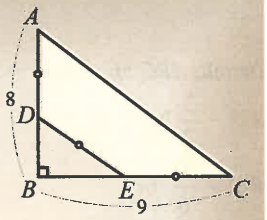


veriler $c = a + b$ olacak şekilde verilmişse taralı alanla tarasız alan birbirlerine eşit olurlar. Çünkü o durumda

$$|ABC| = \frac{c^2 - (b-a)^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} = ab$$

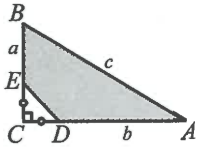
olacaktır. Aynı zamanda ECD dik üçgeninin alanı $\frac{ab}{2}$ olduğundan, $BEDA$ dörtgeninin alanı da mecburen $\frac{ab}{2}$ olacaktır. Bu da eşit alanlı olmaları anlamına gelir.

73.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$AC \cap ED = \{F\}$
$|AD| = |DE| = |EC|$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 9$ br
olduğuna göre $ADEC$ dörtgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 30

Uyarı 2: Şekil, $c = a + b$ iken Uyarı 1'deki gibi değil de aşağıdaki gibi olursa da

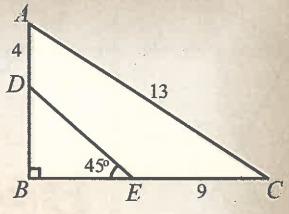


dik kenar uzunluklarının farkı yine $b - a$ olacağından

$$|ABC| = ab$$

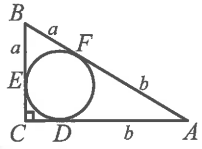
eşitliği hala geçerli olacaktır.

74.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(BED) = 45°$
$|AD| = 4$ br
$|EC| = 9$ br
$|CA| = 13$ br
olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



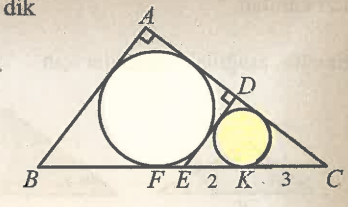
A) 18 B) 24 C) 26 D) 30 E) 36

Uyarı 3: İçine iç teğet çemberi çizilmiş dik üçgende hem $|CD| = |CE|$ hem de $|AB| = |BE| + |DA| = a + b$ olduğundan, o dik üçgenin de alanı $a \cdot b$'dir.



O durumda $|BF| = a$ br ve $|FB| = b$ br olacağından dik üçgenin alanı, çemberin hipotenüsü ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımı olur diye servis ederler.

75.
Şekilde ABC ve DEC dik üçgenlerinin iç teğet çemberleri çizilmiştir. DE, iki çembere de teğet olup F ve K değme noktalarıdır.
$|EK| = 2$ br
$|KC| = 3$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



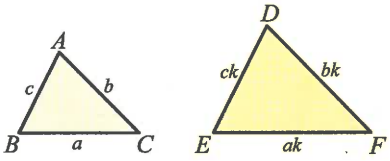
A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

Geometri Notları

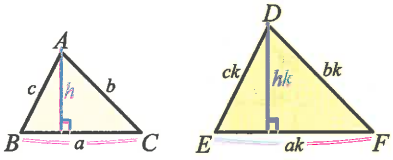
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Benzerlik-Alan İlişkisi

Birbirine benzer iki üçgenin kenarları arasında bir oran olduğu gibi alanları arasında da bir oran vardır. Bu oran benzerlik oranına eşit değil ama karesidir. Şimdi bunun sebebini öğrenelim:

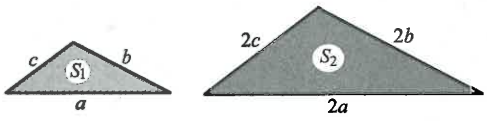


Sağdaki *DEF* üçgeni, soldaki *ABC* üçgeniyle benzer olsun. İddiamız şu: *DEF* üçgeninin tüm kenar uzunlukları *ABC* üçgeninin tüm kenar uzunluklarının *k* katıysa, alanı k^2 katıdır. Kanıtlayalım:

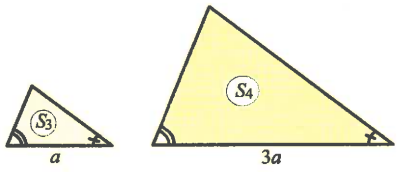


Sağdaki üçgen soldakinin *k* katıysa, tabana inen yüksekliği de *k* katıdır. Soldakinin alanı $\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$ br^2 iken sağdakinin alanı $\frac{1}{2}\cdot ak\cdot hk=\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot h\right)k^2$ br^2 olur. Bu da iddiamızı kanıtlar.

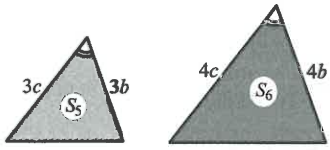
Örneğin, aşağıdaki üçgenler için



benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$,



benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olduğundan $\frac{S_3}{S_4}=\frac{1}{9}$,



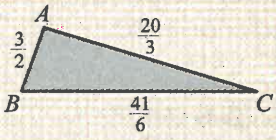
benzerlik oranı $\frac{3}{4}$ olduğundan $\frac{S_5}{S_6}=\frac{9}{16}$'dır.

Örnek. *ABC bir üçgen*

$|AB|=\frac{3}{2}$ br

$|BC|=\frac{41}{6}$ br

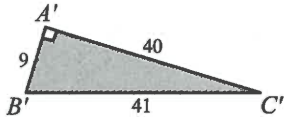
$|CA|=\frac{20}{3}$ br



olduğuna göre |ABC| kaç birimkaredir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Kesirli ifadeleri tam sayı yapmak maksadıyla, verilen kenar uzunluklarını paydaların OKEK'i olan 6 ile çarpalım. Yeni uzunluklar 9-40-41 olur. Şimdi bu kenar uzunluklarına sahip *A'B'C'* üçgenini çizelim.

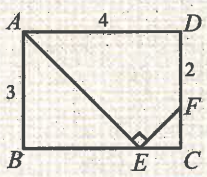


Daha önce dik üçgen notlarında da verdiğimiz üzere bu üçgen, $9^2 + 40^2 = 41^2$ olduğundan dik üçgendir. *ABC* ile *A'B'C'* üçgenleri 1:6 oranında benzer olduklarından alanları oranı 1:36 olmalıdır. $|A'B'C'| = 180$ br^2 olduğundan $|ABC| = 5$ br^2 dir.

Doğru cevap: D.

Hem kenar uzunlukları hem de alanı rasyonel sayı olan böyle üçgenlere **rasyonel üçgen** denir. Alanı 1, 2, 3 veya 4 br^2 olan rasyonel üçgen yoktur. Rasyonel üçgenlerin alanı tam sayı olarak en az 5 br^2 olur, o da yukarda verdiğimiz (3/2, 20/3, 41/6) üçgeniyle olur.

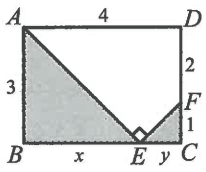
Örnek [ÖSS 2000].
ABCD bir dikdörtgen
$AE \perp EF$
$|AB| = 3$ br
$|AD| = 4$ br
$|DF| = 2$ br



olduğuna göre $\frac{|ABE|}{|ECF|}$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

Çözüm: Benzerlik dersinden, yan şekilde taranmış olan *ABE* ve *ECF* üçgenlerinin benzer olduğunu hatta $|AB|\cdot|FC| = |BE|\cdot|EC|$ olduğunu biliyoruz.



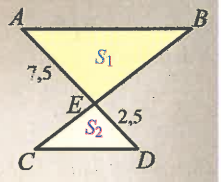
$|BE| = x$ br ve $|EC| = y$ br olsun. $|FC| = 1$ br olduğundan x ile y'nin çarpımları 3, toplamları 4'tür.
O halde $x = 3$ ve $y = 1$'dir. Şu durumda bahsi geçen üçgenlerin benzerlik oranı 3:1 olarak bulunduğundan

$$\frac{|ABE|}{|ECF|} = 3^2 = 9$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

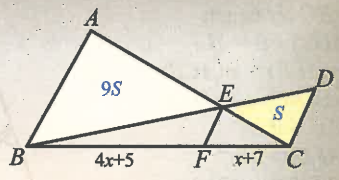
1.
AB // CD
$AD \cap BC = \{E\}$
$|AE| = 7{,}5$ br
$|ED| = 2{,}5$ br
$|AEB| = S_1$ br^2
$|DEC| = S_2$ br^2



olduğuna göre $\frac{S_2}{S_1}$ **oranı kaçtır?**

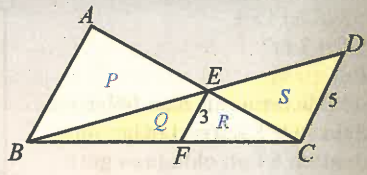
A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{15}$

2.
AB // EF // DC
$AC \cap BD = \{E\}$
$|BF| = 4x + 5$ br
$|FC| = x + 7$ br
$|ABE| = 9\cdot|EDC|$
olduğuna göre
x kaçtır?



A) 2 B) 5 C) 9 **D) 16** E) 23

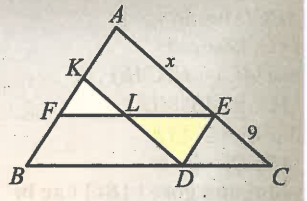
3.
AB // EF // DC
$AC \cap BD = \{E\}$
$|EF| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|ABE| = P$ br^2
$|EBF| = Q$ br^2
$|EFC| = R$ br^2
$|ECD| = S$ br^2



olduğuna göre $\frac{P+R}{Q+S}$ **oranı kaçtır?**

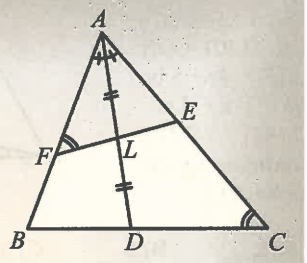
A) 2 **B)** $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

4.
ABC bir üçgen
FE // BC
KD // AC
ED // AB
$9\cdot|KFL| = 4\cdot|LDE|$
$|EC| = 9$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



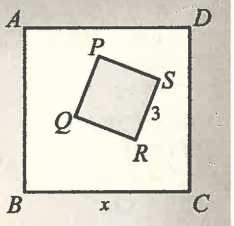
A) 12 **B)** 15 C) 18 D) 21 E) 24

5.
$[ABC]$ bir üçgen
$AD \cap FE = \{L\}$
$m(AFE) = m(ACB)$
$m(CAD) = m(DAB)$
$|AL| = |LD|$
$|AFE| = 2$ br^2
olduğuna göre
$|BCEF|$ kaç br^2 dir?



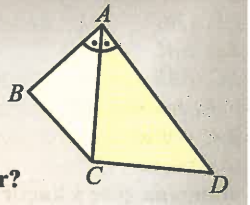
A) 4 **B) 6** C) 8 D) 9 E) 10

6.
$[ABCD]$ bir kare
$[PQRS]$ bir kare
$|SR| = 3$ br
$|BC| = x$ br
Şekilde taranmış olan bölgenin alanı $[PQRS]$ karesel bölgesinin alanının 8 katı olduğuna göre x kaçtır?



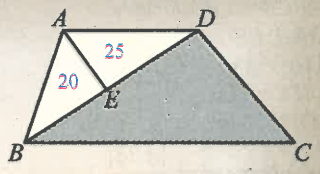
A) $3\sqrt{2}$ B) 6 C) $6\sqrt{2}$ **D) 9** E) 27

7.
$[ABCD]$ bir dörtgen
$[AC]$ köşegen
$m(DAC) = m(CAB)$
$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
$3 \cdot |BC| = 2 \cdot |CD|$
$|ABCD| = 26$ br^2
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



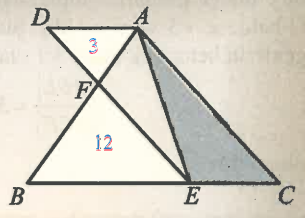
A) 4 B) 6 **C) 8** D) 9 E) 10

8.
$[ABCD]$ bir dörtgen
$AD \,//\, BC$
$AE \,//\, DC$
$|ABE| = 20$ br^2
$|AED| = 25$ br^2
olduğuna göre
$|DBC|$ kaç br^2 dir?



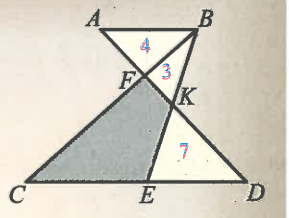
A) 72 B) 75 C) 78 D) 80 **E) 81**

9.
$[ABC]$ ve $[ADE]$ birer üçgen
$AB \cap DE = \{F\}$
$DA \,//\, BC$
$DE \,//\, AC$
$|ADF| = 3$ br^2
$|FBE| = 12$ br^2
olduğuna göre
$|AEC|$ kaç br^2 dir?



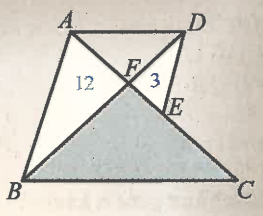
A) 8 **B) 9** C) 10 D) 11 E) 12

10.
$AD \cap BC = \{F\}$
$AD \cap BE = \{K\}$
$AB \,//\, CD$
$|AFB| = 4$ br^2
$|BFK| = 3$ br^2
$|KED| = 7$ br^2
olduğuna göre
$|FCEK|$ kaç br^2 dir?



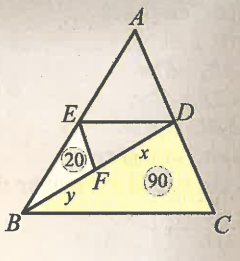
A) 12 B) 15 C) 16 **D) 18** E) 20

11.
$AC \cap BD = \{F\}$
$AD \,//\, BC$
$DE \,//\, AB$
$|DFE| = 3$ br^2
$|ABF| = 12$ br^2
olduğuna göre
$|FBC|$ kaç br^2 dir?



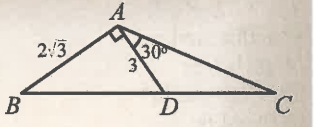
A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

12.
ABC bir üçgen
$ED \,//\, BC$
$|EBF| = 20$ br^2
$|BCD| = 90$ br^2
$|DF| = x$ br
$|FB| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ kaçtır?



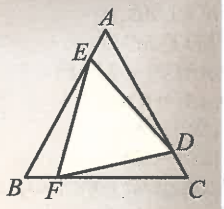
A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

13.
ABC bir üçgen
$DA \perp AB$
$m(CAD) = 30°$
$|DA| = 3$ br
$|AB| = 2\sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



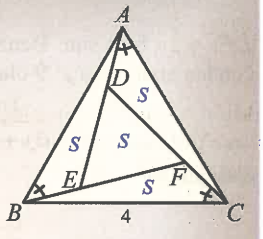
A) $6\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$ D) 9 E) 12

14.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AD| = 4 \cdot |DC|$
$|CF| = 4 \cdot |FB|$
$|BE| = 4 \cdot |EA|$
olduğuna göre $\frac{|DEF|}{|ABC|}$ kaçtır?



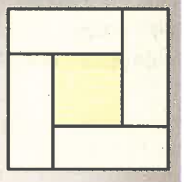
A) $\frac{11}{25}$ B) $\frac{12}{25}$ C) $\frac{13}{25}$ D) $\frac{14}{25}$ E) $\frac{3}{5}$

15.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(ABE) = m(BCF) = m(CAD)$
$D \in [AE]$
$E \in [BF]$
$F \in [CD]$
$|BC| = 4$ br
***ABE*, *BCF*, *CAD* ve *DEF* üçgensel bölgeleri eşit alana sahipse $|AD|$ kaç br dir?**



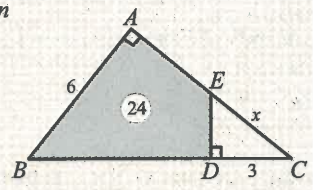
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-1$ E) $\sqrt{5}-2$

16.
Yandaki kare, bir küçük kare ve birbirine eş dört dikdörtgenden oluşturulmuştur.
Bu beş çokgensel bölgenin alanları birbirlerine eşitse dikdörtgenlerden birinin boyu eninin kaç katıdır?



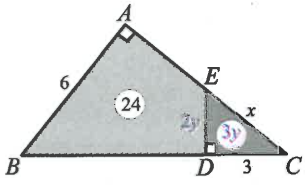
A) 2 B) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ C) 3 D) $1+\sqrt{5}$ E) $3-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
ED ⊥ BC
$|ABDE| = 24$ br^2
$|AB| = 6$ br
$|DC| = 3$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{13}$ D) $\sqrt{14}$ E) $\sqrt{15}$

Çözüm: *CDE* ile *CAB* üçgenlerinin benzerliğini Metin Şentürk bile görmüştür.



$|DE| = 2y$ br olsun. Benzerlik oranı $2y/6$ yani $y/3$ olduğundan alan oranı $y^2/9$ olur. Diğer yandan alanlar oranı

$$\frac{3y}{3y+24} = \frac{y}{y+8}$$

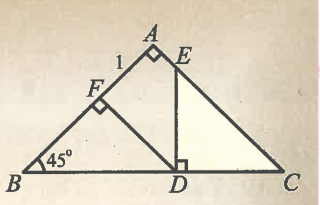
olduğundan

$$\frac{y^2}{9} = \frac{y}{y+8}$$

olur. Eşitlik çözülürse $y = 1$ bulunur. *EDC* üçgeninde Pisagor Teoremi'nden de $x = \sqrt{13}$ bulunur.

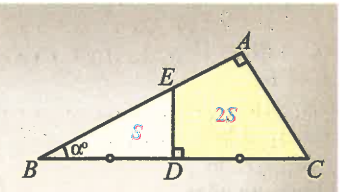
Doğru cevap: C.

17.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
ED ⊥ BC
DF ⊥ AB
$m(B) = 45°$
$|ABC| = 3\cdot|EDC|$
$|AF| = 1$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



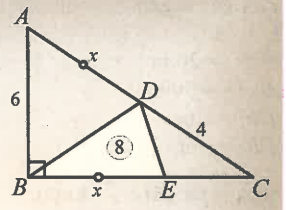
A) $2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 **E)** $2\sqrt{3}$

18.
ABC bir üçgen
BA ⊥ AC
ED ⊥ BC
$|BD| = |DC|$
$m(B) = \alpha°$
$|AEDC| = 2\cdot|EBD|$
olduğuna göre α kaçtır?



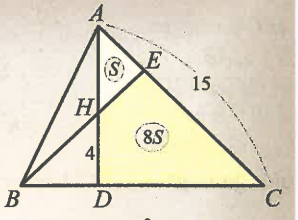
A) 15 B) 18 C) 22,5 **D)** 30 E) 45

19.
ABC bir üçgen
AB ⊥ BC
$|AB| = 6$ br
$|CD| = 4$ br
$|EBD| = 8$ br^2
olduğuna göre
$|AD| = |BE| = x$ kaç br dir?



A) 6 B) 7 **C)** 8 D) 9 E) 10

20.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AHE| = S$ br^2
$|DCEH| = 8S$ br^2
$|HD| = 4$ br
$|AC| = 15$ br



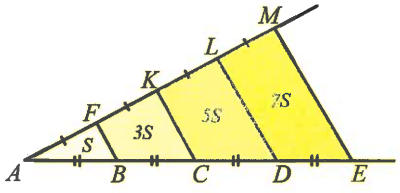
olduğuna göre $|BH|\cdot|HE|$ çarpımı kaç br^2 dir?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 **E)** 20

EŞİT ARALIKLARLA ÇİZİLEN PARALEL DOĞRULAR

Şimdi, benzerliğin doğurduğu çok güzel bir dizi göreceğiz. Hemen ilgili teoremi verip, açıklamamızı kanıtında yapalım:

Teorem. *Bir açısal bölgeyi eşit aralıklarla kesen paralel doğrular, bu bölgeyi bir üçgen ve sonsuz sayıda yamuğa ayırır. Boyutları devamlı büyüyen bu yamukların alanı, üçgenin alanının sırasıyla 3, 5, 7, 9, 11, ... katı olur.*



Kanıt: Yukardaki şekilde

$$|AF| = |FK| = |KL| = |LM| = \dots$$
$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = \dots$$

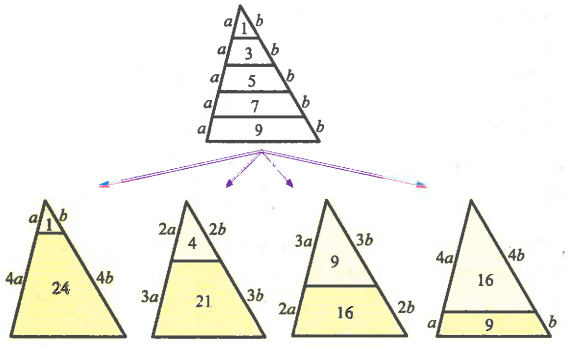
olsun. Böyle olunca

$$FB \,//\, KC \,//\, LD \,//\, ME \,//\, \dots$$

olacağını biliyoruz. Ayrıca *ABF*, *ACK*, *ADL*, *AEM*, ... üçgenleri de benzer olurlar. En küçük görünen iki bölgeyle işlemlere başlayalım: *ABF* ile *ACK* üçgenleri benzerdir. Benzerlik oranı 1/2 olduğundan, alanlar oranı 1/4 olmalıdır.

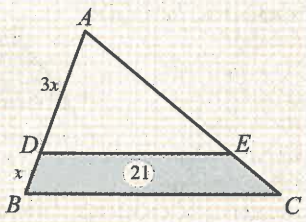
$|ABC| = S$ br^2 ise $|ADE| = 4S$ br^2 yani $|BCDE| = 3S$ br^2 olmalı. Bu şekilde devam edilirse S, $3S$, $5S$, $7S$, ... dizisi karşımıza çıkar.

Bu teorem sayesinde, verilmiş bir üçgeni tam sayı dilime ayırmak mümkünse, her dilimin alanını rahatlıkla yazmak mümkündür. Şöyle ki:



Aslında bu değerlerin gerçek alanı değil de bir diğerine göre oranı belirttiğini söylememize gerek yoktur herhalde...

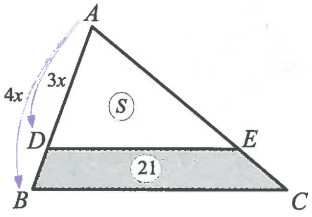
Örnek. *ABC bir üçgen*
D ∈ [*AB*]
E ∈ [*AC*]
DE // *BC*
$|AD| = 3x$ br
$|DB| = x$ br
$|DBCE| = 21$ br^2
olduğuna göre
ADE üçgensel bölgesinin alanı kaç birimkaredir?



A) 9 B) 18 C) 21 D) 27 E) 81

Çözüm: İki yoldan çözelim:

Birinci yol. *ADE* ile *ABC* üçgenlerinin 3/4 oranında benzer olduklarını biliyoruz. O halde bu üçgenlerin alanları oranı 9/16 olmalıdır.

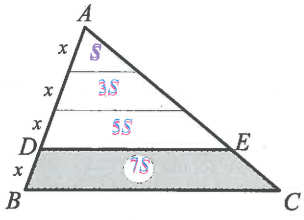


$|ADE| = S$ br^2 olsun. O halde

$$\frac{S}{S+21} = \frac{9}{16}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu orantı çözülürse $S = 27$ bulunur.

İkinci yol. [*AD*] kenarını şekildeki gibi üç eşit parçaya bölüp bu noktalardan *DE*'ye paraleller çizelim. Alanların S, $3S$, $5S$, $7S$ olacağını kanıtlamıştık.



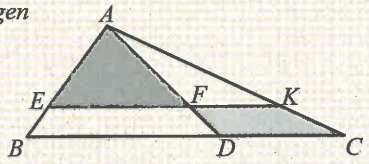
Bizim $7S$ dediğimiz yer, soruda 21 olarak verildiğinden $S = 3$ olmalıdır. O halde

$$|ADE| = S + 3S + 5S = 9S = 27 \text{ br}^2$$

olarak bulunur.

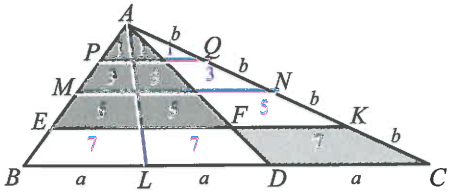
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
EK // BC
AD ∩ EK = {F}
|AK| = 3·|KC|
|BD| = 2·|DC|
olduğuna göre
şekilde taranmış
olan AEF ve DCKF bölgelerinin alanları oranı kaçtır?



A) $\frac{9}{7}$ B) $\frac{10}{7}$ C) 2 D) $\frac{15}{7}$ E) $\frac{18}{7}$

Çözüm: $|DC|$'ye a br dersek $|BD| = 2a$ br, $|KC|$'ye b br dersek $|AK| = 3b$ br olur. Şimdi $|BD|$'yi iki eşit parçaya ayıran $|AL|$'yi, daha sonra da $|AK|$'yi üç eşit parçaya ayıran EK'ye paralel MN ve PQ doğrularını çizeceğiz.

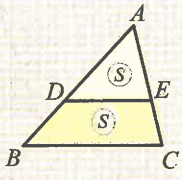


Son olarak, eşit aralıklarla parsellenen bu bölgelerin alanlarını üzerlerine yazalım. Görüldüğü üzere taralı bölgelerin alanları oranı 18/7'dir.

Doğru cevap: E.

Bu tip sorularda yan kenarların oranından alanlar oranına gidilebileceği gibi alanlar oranından yan kenarlar oranına da gidilebilir. Bunla ilgili bir soru çözelim şimdi:

Örnek [ÖSS 1995].
ABC bir üçgen
D ∈ [AB]
E ∈ [AC]
DE // BC
|ADE| = |DBCE|
olduğuna göre $\frac{|AD|}{|AB|}$ *oranı kaçtır?*

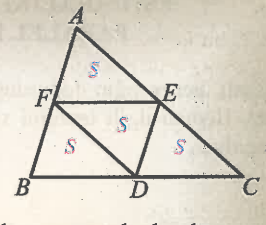


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 1

Çözüm: ADE ile ABC üçgenlerinin benzer olduğunu biliyoruz. Sorulan $|AD|/|AB|$ oranı da bu üçgenlerin benzerlik oranına eşittir. Alanlar oranı 1 : 2 olduğundan benzerlik oranı $1:\sqrt{2}$ olur.

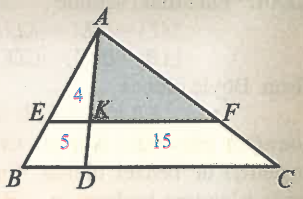
Doğru cevap: B.

21.
Yandaki ABC üçgeninde AFE, FBD, EDC ve FDE üçgensel bölgelerinin alanları birbirlerine eşittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



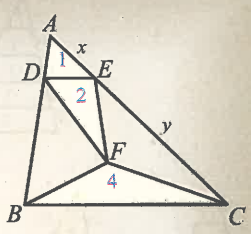
A) D, E, F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.
B) FD // AC, DE // BA ve EF // CB
C) AFE, FBD, EDC ve FDE üçgenleri eştir.
D) DEF**'nin çevresi,** ABC**'nin çevresinin 1/4'üdür.**
E) $|AB| = 2\cdot|ED|$, $|BC| = 2\cdot|FE|$ ve $|CA| = 2\cdot|DF|$

22.
ABC bir üçgen
AD ∩ EF = {K}
EF // BC
$|AEK| = 4$ br^2
$|EBDK| = 5$ br^2
$|KDCF| = 15$ br^2
olduğuna göre
|AKF| kaç br^2 dir?



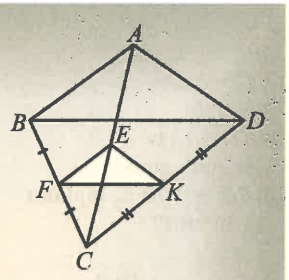
A) 8 B) 9 C) 10 **D)** 12 E) 13

23.
ABC bir üçgen
DE // BC
|AE| = x br
|EC| = y br
$|ADE| = 1$ br^2
$|DFE| = 2$ br^2
$|FBC| = 4$ br^2
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



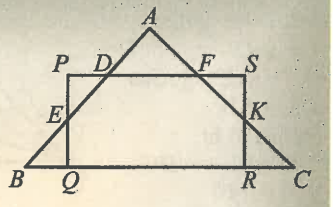
A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{3}$

24.
$ABCD$ bir dörtgen
$|AE| = |EC|$
$|BF| = |FC|$
$|CK| = |KD|$
$|ABD| = 12$ br^2
olduğuna göre taralı EFK üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



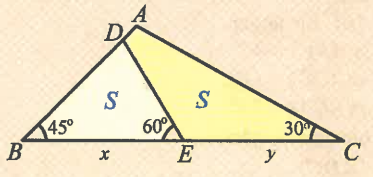
A) 6 B) 4 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) 2

25.
ABC bir üçgen
$PQRS$ bir dikdörtgen
$|AD| = |DE| = |EB|$
$|AF| = |FK| = |KC|$
olduğuna göre $\frac{|PQRS|}{|ABC|}$ **kaçtır?**



A) $\frac{6}{7}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{10}{11}$

26.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = 45°$
$m(BCA) = 30°$
$m(DEB) = 60°$
$|BE| = x$ br
$|EC| = y$ br



olup $|DBE| = |ADEC|$ olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranı kaçtır?

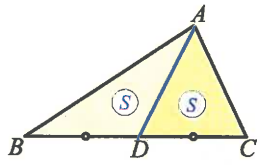
A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt[4]{12}-1$

TABANLAR ORANINDAN ALANLAR ORANININ BULUNMASI

Yüksekliği aynı uzunlukta olan üçgenlerin alanları oranları, yüksekliklerin indiği tabanların uzunluklarının oranıyla bulunur.

Teorem. *Bir üçgende kenarortay, üçgeni iki eşit alanlı üçgene böler.*

Kanıt: Üçgenimiz ABC, kenarortayımız da $[AD]$ olsun.



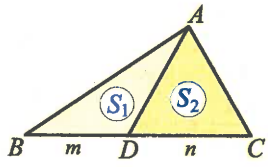
ABD ve ACD üçgenlerinin hem tabanları hem de yükseklikleri eşit olduğundan $|ABD| = |ACD|$.

Aslında bu teorem, çok daha genel olan şu teoremin özel halidir:

Teorem. *Bir üçgende bir kesen, kenarı hangi oranda bölüyorsa, oluşan iki üçgen toplam alanı o oranda paylaşır.*

Yani, yandaki üçgene göre

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$.



Kanıt: ABD ve ACD üçgenlerinin A'dan inen yükseklikleri eşittir. Bu yüksekliğe h br dersek;

$$|ABD| = \frac{m \cdot h}{2}$$

ve

$$|ACD| = \frac{n \cdot h}{2}$$

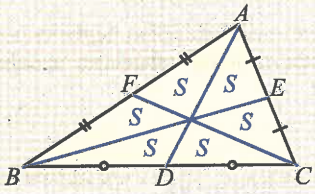
olur. Bu iki değeri birbirine bölersek;

$$\frac{|ABD|}{|ACD|} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

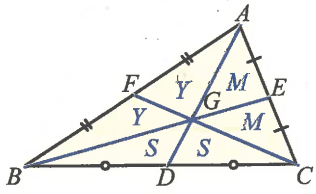
bulunur.

Görüldüğü üzere, $m = n$ olursa $[AD]$ keseni kenarortay olur. Demek ki $m = n$ olursa $S_1 = S_2$ oluyormuş.

Örnek. *Bir üçgenin üç kenarortayı da çizilirse, oluşan 6 küçük üçgenin eşit alanlı olduklarını gösteriniz.*

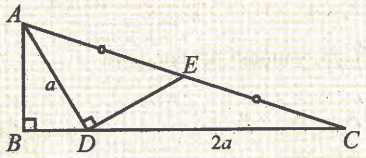


Çözüm: Ceva teoreminden dolayı, üçünün tek noktada kesişeceğini biliyoruz. Kesişim noktasına G diyerek işlemlere başlayalım.



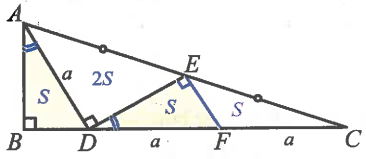
$|BGD| = |DGC| = S$ olduğunu kanıtladık. Benzer şekilde $|CGE| = |EGA| = M$ ve $|AGF| = |FGB| = Y$ olsun. $|CE| = |EA|$ olduğundan $M + 2S = M + 2Y$ olur, yani $Y = S$'dir. Diğer yandan $|AF| = |FB|$ olduğundan $Y + 2S = Y + 2M$ yani $M = S$'dir. Altı üçgenin de alanı S olduğundan kanıt bitmiş oldu.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$AD \perp DE$
$|AE| = |EC|$
$|DC| = 2\cdot|AD|$
olduğuna göre $\dfrac{|ABC|}{|ABD|}$ *kaçtır?*



A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

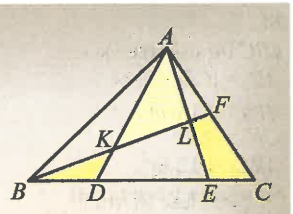
Çözüm: AD'ye paralel olacak şekilde yandaki $[EF]$'yi çizelim.



Sorudaki verileri yerine yazdığımızda DFE üçgeninin $30°$-$60°$-$90°$ üçgeni olduğu görülecektir. Aynı şekilde ABD üçgeni de $30°$-$60°$-$90°$ üçgeni olacaktır. Alanları oranları yerlerine yazıldığında $\dfrac{|ABC|}{|ABD|} = 5$ olarak bulunur.

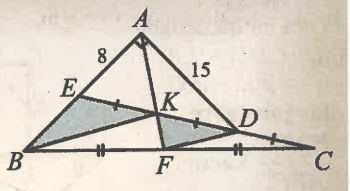
Doğru cevap: E.

27.
ABC bir üçgen
$|BC| = 2\cdot|DE|$
$|AF| = |FC|$
$|AKL| = 12$ br^2
olduğuna göre
$|KBD| + |CFLE|$ toplamı kaç br^2 dir?



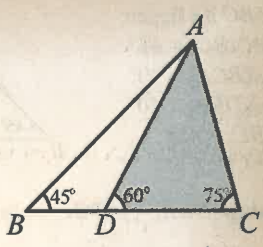
A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

28.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$
C, D, K, E doğrusal
$|AE| = 8$ br
$|AD| = 15$ br
$|EK| = |KD| = |DC|$
$|BF| = |FC|$
olduğuna göre taranmış *BKE* ve *DKF* üçgensel bölgelerinin alanları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?



A) 45 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

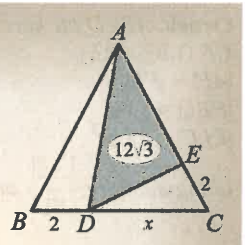
29.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = 45°$
$m(ADC) = 60°$
$m(BCA) = 75°$
olduğuna göre
$\dfrac{|ADC|}{|ABC|}$ **oranı kaçtır?**



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

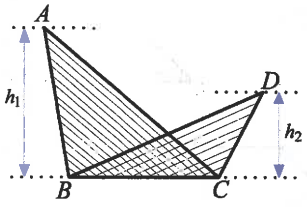
30.
ABC bir eşkenar üçgen
$|BD| = |CE| = 2$ br
$|ADE| = 12\sqrt{3}$ br^2

olduğuna göre
$|DC| = x$ kaç br dir?



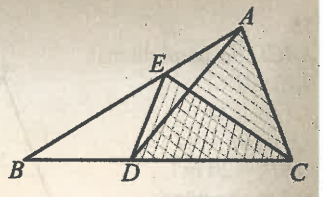
A) 5 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 **D)** $4\sqrt{3}$ E) 7

Bazen de alanlar oranı, tabanlar oranından değil, yüksekliklerin oranından bulunur. Tabii burada üçgenlerin tabanlarının eşit uzunlukta olması lazım ki, yükseklikler oranı alanlar oranını versin. Örneğin,



yukardaki şekilde ABC ile DBC üçgenlerinin $[BC]$ tabanları ortak olduğundan alanları oranı yüksekliklerinin oranı yani $\frac{h_1}{h_2}$'dir.

31.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$E \in [AB]$
olduğuna göre
$\frac{|EDC|}{|ADC|}$ **oranını**
aşağıdakilerden hangisi verir?

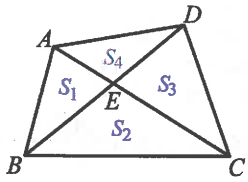


A) $\frac{|BD|}{|DC|}$ B) $\frac{|BD|}{|BC|}$ C) $\frac{|BE|}{|EA|}$ **D)** $\frac{|BE|}{|BA|}$ E) $\frac{|ED|}{|AD|}$

Teorem. *Bir ABCD dörtgeninde köşegenlerin çizimi ile oluşan dört üçgenin karşılıklı olarak alanlarının çarpımı eşittir.*

Yani köşegenlerin kesişim noktası yandaki gibi E olan bir ABCD dörtgeninde

$|EAB|\cdot|ECD| = |EDA|\cdot|EBC|$

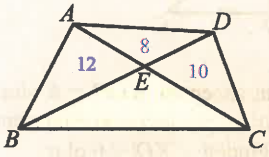


Kanıt: $|EAB| = S_1$, $|EBC| = S_2$, $|ECD| = S_3$, $|EDA| = S_4$ olsun.

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{|BE|}{|ED|} = \frac{S_2}{S_3}$$

olduğundan $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$'tür.

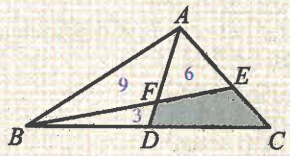
32.



$|BEC|$ kaç br^2 dir?

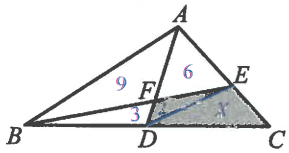
15

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap BE = \{F\}$
$|EAF| = 6$ br^2
$|FAB| = 9$ br^2
$|FBD| = 3$ br^2
olduğuna göre
$|FDCE|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 7 B) $\frac{50}{7}$ C) $\frac{52}{7}$ D) $\frac{54}{7}$ E) 8

Çözüm: Köşegenleri çizilmiş bir dörtgende çaprazların alanları çarpımının eşit olduğunu biliyoruz. O halde $|FDE| = 2$ br^2 dir.



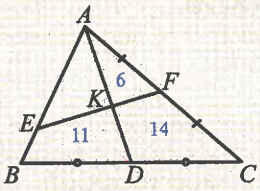
DEC üçgeninin alanına da X diyelim.

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{12}{X+8} = \frac{5}{X}$$

olduğundan $X = \frac{40}{7}$ olur. $S = X + 2$ diye $S = \frac{54}{7}$'dir.

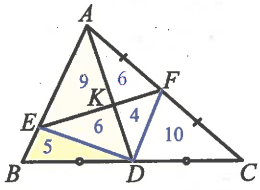
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AD \cap EF = \{K\}$
$|AF| = |FC|$
$|BD| = |DC|$
$|AKF| = 6$ br^2
$|KDCF| = 14$ br^2
$|EBDK| = 11$ br^2
olduğuna göre $\frac{|AE|}{|EB|}$ *oranı kaçtır?*



A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Çözüm: $[AD]$ kenarortay olduğundan $|ABD| = |ADC| =$ 20 olması gerekir. O halde $|AKE| = 9$'dur.

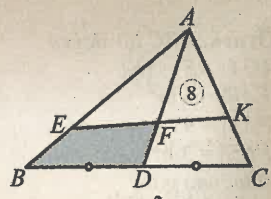


$[DF]$ kenarortayı çizilirse aynı sebepten $|KDF| = 4$ olur. *AEDF* dörtgeninde *çaprazların çarpımları eşittir* teoremi gereğince $4 \cdot 9 = 6 \cdot |EKD|$ eşitliğinden $|EKD| = 6$ olur.

$\frac{|DAE|}{|DEB|} = \frac{15}{5} = 3 = \frac{|AE|}{|EB|}$ olur.

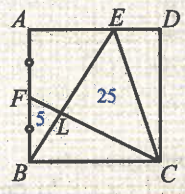
Doğru cevap: C.

33.
ABC bir üçgen
A, F, D ve *E, F, K* doğrusal
$|BD| = |DC|$
$|AK| = 2 \cdot |KC|$
$|AE| = 3 \cdot |EB|$
$|AFK| = 8$ br^2
olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



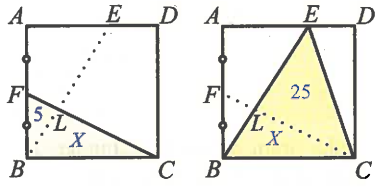
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

Örnek. *ABCD bir kare*
$CF \cap BE = \{L\}$
$|AF| = |FB|$
$|FBL| = 5$ br^2
$|ELC| = 25$ br^2
olduğuna göre $\frac{|AE|}{|ED|}$ *oranı kaçtır?*



A) 1,6 B) 1,75 C) 1,8 D) 2 E) 2,5

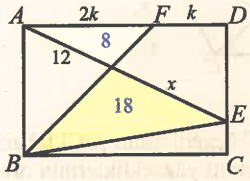
Çözüm: $|EBC|$ karenin yarısı ama $|FBC|$ karenin çeyreğidir.



O halde, demek ki $|EBC| = 2 \cdot |FBC|$. Buradan $|BLC| = 15$ çıkar. Buradan sırasıyla $|FB|$, $|FLE|$, $|AFE|$, $|AE|$ ve $|ED|$ bulunur, cevap 2 çıkar.

Doğru cevap: D.

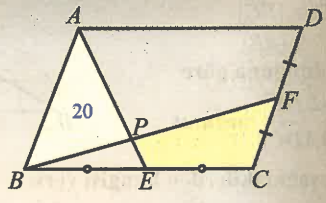
34.



ABCD dikdörtgen ise x kaçtır?

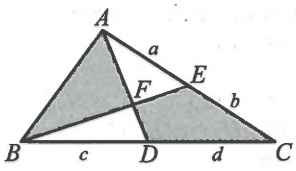
18

35.
ABCD bir paralelkenar
$|BE| = |EC|$
$|CF| = |FD|$
$AE \cap BF = \{P\}$
$|ABP| = 20$ br^2
olduğuna göre
$|PECF|$ kaç br^2 dir?

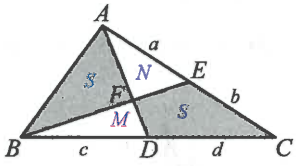


A) 18 **B) 20** C) 24 D) 25 E) 30

Teorem. *ABC bir üçgen*
AD ∩ BE = {F}
|AE| = a br
|EC| = b br
|BD| = c br
|DC| = d br
|ABF| = |FDCE| ise a·c = b·d.



Kanıt: $|ABF| = |FDCE| = S$ br^2, $|FBD| = M$ br^2 ve $|AFE| = N$ br^2 olsun.

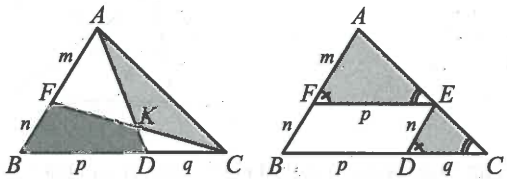


$\frac{S+M}{S+N}$ oranı hem $\frac{b}{a}$ hem de $\frac{c}{d}$ olduğundan

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$$

yani $a \cdot c = b \cdot d$ olur.

Bu teoremin oldukça güzel bir sonucu var.

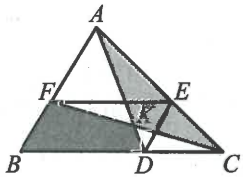


Üstte sol şekildeki *FBDK* ile *AKC* bölgelerinin eşit alanlı olmasını sağlayan $m \cdot q = n \cdot p$ eşitliğini

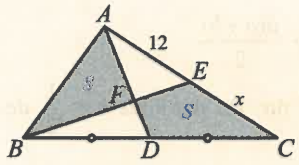
$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

şeklinde düzenlersek; üç köşesi *F*, *B* ve *D* olan paralelkenarın dördüncü köşesinin [*AC*] üzerinde olduğunu anlarız. Bunu hemen üstteki sağ şekilden *AFE* ile *EDC* üçgenlerinin benzerliğinden görebilirsiniz. Şu durumda; şöyle bir teoremi kanıtlamış olduk:

ABC bir üçgen ve
BDEF bir paralelkenar ise
|BDKF| = |AKC|.



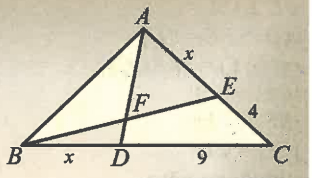
36.



x kaçtır?

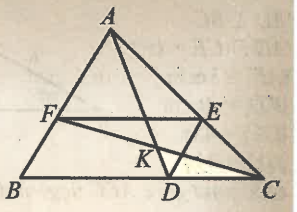
12

37.
ABC bir üçgen
AD ∩ BE = {F}
|EC| = 4 br
|CD| = 9 br
|ABF| = |DCEF|
olduğuna göre
***|AE| = |BD| = x* kaç br dir?**



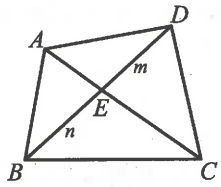
A) 4 B) 5 C) 6 D) 6,5 E) 9

38.
ABC bir üçgen
FBDE bir paralelkenar
AD ∩ CF = {K}
2·|AF| = 3·|FB|
|ABC| = 15·|KDC|
olduğuna göre
$\frac{|AK|}{|KD|}$ **oranı kaçtır?**

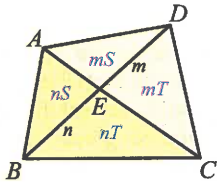


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Teorem. *Bir ABCD dörtgeninde köşegenlerin kesiştiği nokta E olsun.*
$|DE| = m$ br ve $|EB| = n$ br ise $\frac{|ADC|}{|ABC|} = \frac{m}{n}$ *olur.*



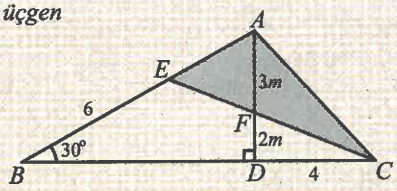
Kanıt: Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin tabanları oranı alanları oranına eşit olduğundan $|ABE| = n \cdot S$ br^2 dersek, $|AED| = m \cdot S$ br^2 olur. Benzer şekilde $|BEC| = n \cdot T$ br^2 ise $|ECD| = m \cdot T$ br^2 olur.



O halde

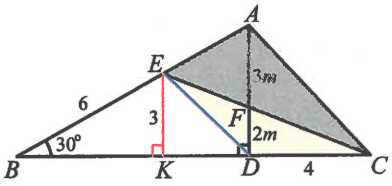
$$\frac{|ADC|}{|ABC|} = \frac{m \cdot S + m \cdot T}{n \cdot S + n \cdot T} = \frac{m \cdot (S+T)}{n \cdot (S+T)} = \frac{m}{n}.$$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(B) = 30°$
$AD \perp BC$
$AD \cap CE = \{F\}$
$|AF| = 3m$ br
$|FD| = 2m$ br
$|DC| = 4$ br
$|BE| = 6$ br
olduğuna göre AEC üçgeninin alanı kaçtır?



A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

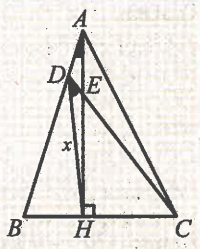
Çözüm: $\frac{|AEC|}{|EDC|} = \frac{3}{2}$ olduğundan EDC üçgeninin alanını bulursak soruyu çözmüş olacağız.



E'den BC'ye indirilen dikmenin boyu 30°-60°-90° üçgeninden dolayı 3'tür. O halde $|EDC| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ olduğundan $|AEC| = 9$ bulunur.

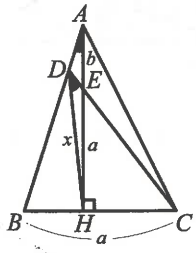
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$AH \perp BC$
$CD \cap AB = \{E\}$
$|EH| = |BC|$
$m(BAH) = m(HDC)$
$|DH| = x$ br
$|ABC| = k \cdot x^2$ br^2
olduğuna göre k kaçtır?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: $|EH| = |BC| = a$ br ve $|EA| = b$ br olsun.



HAD ve HDE üçgenlerinin benzerliğinden

$$x^2 = |HE| \cdot |HA| = a \cdot (a + b)$$

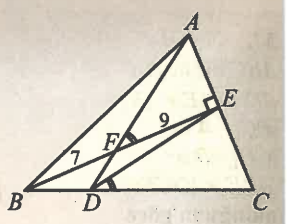
çıkar. Diğer taraftan

$$|ABC| = \frac{a(a+b)}{2}$$

olduğundan $|ABC| = \frac{1}{2}x^2$'dir. Bu durumda $k = \frac{1}{2}$ demektir.

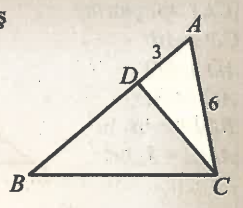
Doğru cevap: B.

39.
ABC bir üçgen
$BE \perp CA$
$AD \cap BE = \{F\}$
$m(AFE) = m(EDC)$
$|DE| = |CA|$
$|BF| = 7$ br
$|FE| = 9$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



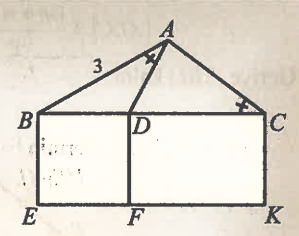
A) 100 B) 96 C) 80 D) 72 E) 64

40.
Yandaki ABC üçgeninde taranmış üçgenle ABC üçgeni benzerdir.
$|AC| = 6$ br
$|AD| = 3$ br
$|CAD| = 4$ br^2
olduğuna göre
$|DBC|$ kaç br^2 dir?



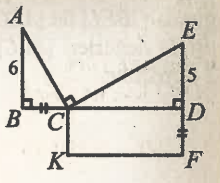
A) 8 B) 9 C) 10 **D) 12** E) 16

41.
ABC bir üçgen
$BEFD$ bir kare
$DFKC$ bir dikdörtgen
$m(DAB) = m(BCA)$
$|AB| = 3$ br
olduğuna göre
$|BEKC|$ kaç br^2 dir?



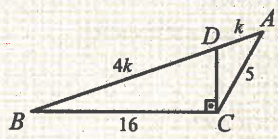
A) 10 **B) 9** C) 6 D) $\frac{9}{2}$ E) 3

42.
$AB \perp BD$
$AC \perp CE$
$BD \perp EF$
$CKFD$ bir dikdörtgen
$|BC| = |DF|$
$|AB| = 6$ br
$|ED| = 5$ br
olduğuna göre $|CKFD|$ kaç br^2 dir?



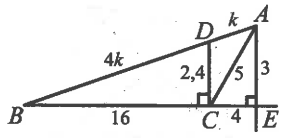
A) 60 **B) 30** C) 24 D) 20 E) 15

Örnek. *ABC bir üçgen*
$DC \perp BC$
$|BD| = 4 \cdot |DA|$
$|BC| = 16$ br
$|AC| = 5$ br
olduğuna göre $|BDC|$ kaçtır?



A) 19 B) 19,2 C) 19,4 D) 19,6 E) 19,8

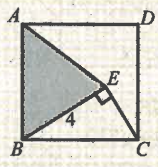
Çözüm: $|DC|$'yi bulan soruyu çözer. Orantılı doğru parçaları verildiğinde Tales Teoremi'ni hatırlıyorduk. A'dan BC'ye indirilen dikme ayağı E olsun.



Tales Teoremi gereği $|CE| = 4$ br, bundan dolayı da $|AE| = 3$ br olur. Buradan $|DC| = 2{,}4$ br bulunur ki $|BCD| = 19{,}2$ br^2 olarak bulunur.

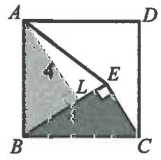
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir kare*
BEC dik üçgen
$BE \perp EC$
$|BE| = 4$ br
olduğuna göre
ABE üçgeninin alanı kaç br^2 *dir?*



A) 32 B) 24 C) 16 D) 12 E) 8

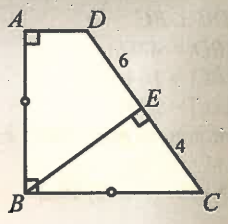
Çözüm: A'dan BE'ye inilen dikme ayağı L olsun. ALB ile BEC üçgenleri eştir.



$|BE| = |AL| = 4$ br olduğundan $|ABE| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ br^2 dir.

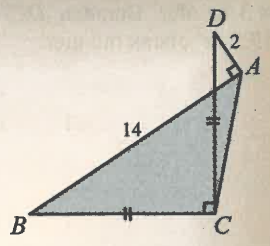
Doğru cevap: E.

43.
ABCD bir dik yamuk
AD // *BC*
AB ⊥ *BC*
BE ⊥ *CD*
$|AB| = |BC|$
$|DE| = 6$ br
$|EC| = 4$ br
olduğuna göre
$|ABCD|$ **kaç br² dir?**



A) 60 B) 56 C) 50 D) 48 E) 36

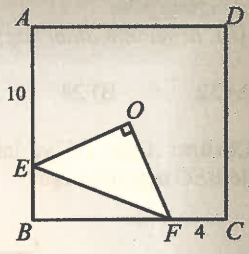
44.
ABC bir üçgen
BC ⊥ *CD*
BA ⊥ *AD*
$|BC| = |CD|$
$|DA| = 2$ br
$|BA| = 14$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ **kaç br² dir?**



A) 28 B) 36 C) 42 D) 48 E) 51

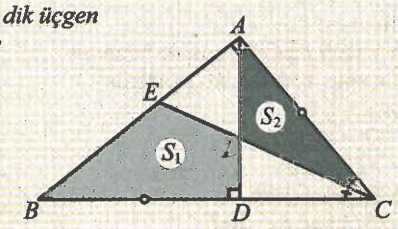
45.
ABCD bir kare
O karenin merkezi
FO ⊥ *OE*
$|FC| = 4$ br
$|AE| = 10$ br

olduğuna göre
$|FOE|$ **kaç br² dir?**



A) 26 B) 27 C) 28 **D) 29** E) 30

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
[CE] iç açıortay
CA ⊥ *AB*
AD ⊥ *BC*
$|AC| = |BD|$
$|BDLE| = S_1$ br²
$|ALC| = S_2$ br²



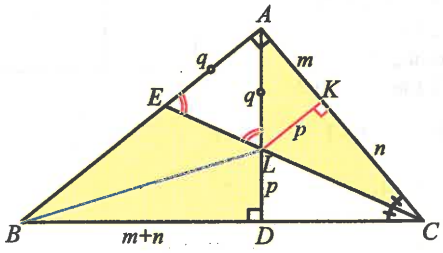
olduğuna göre $\frac{S_1}{S_2}$ *oranı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Çözüm: *L*'den *AC*'ye indirilen dikme ayağına *K* diyelim. $|LD| = |LK|$ olduğunu biliyoruz. Bunların boylarına *p* br diyelim. $|AK| = m$ br ve $|KC| = n$ br olsun. Bu durumda $|BD| = m + n$ br olur. Dikkat edilecek olursa

$$|ALC| = \frac{(m+n)\cdot p}{2} = |BDL|.$$

Geriye $|EBL|$ kaldı.



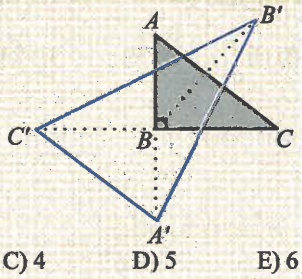
Şu aşamada *ALE* üçgeninde *L* ve *E* açılarının eşliği görülmeli. *EAC* ve *LDC* dik üçgenlerinin iç açılarından bunu görebilirsiniz. Bu sebeple $|AE| = q$ br olsun dersek, $|AL| = q$ br olur. Şimdi buraya dikkat:

$$|ABL| = \frac{(m+n)\cdot q}{2} = |CAE|$$

olup *ABL* ve *CAE* üçgenlerinde *AEL* bölgesi ortak olduğundan $|BEL|$ ile $|ALC|$ eşit olmalıdır. Hem $|BEL|$ hem de $|BDL|$ değerleri $|ALC|$'ye eşit bulunduğundan cevabımız 2 olmalıdır.

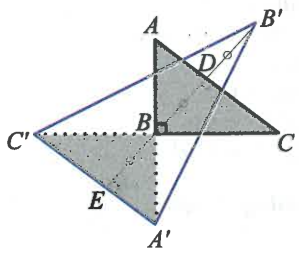
Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi bir dik üçgenin köşelerinin karşısındaki kenarlara göre simetriklerinin belirttiği üçgenin alanı, ilk üçgenin alanının kaç katıdır?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $|BA| = |BA'|$, $|BC| = |BC'|$ ve $m(ABC) = m(A'BC')$ olduğundan ABC ile $A'BC'$ üçgenleri eştir. Bu yüzden eşit alan ölçüsüne sahiptirler. Geriye $B'BC'$ ve $B'BA'$ üçgenlerinin alanları toplamını bulmak kaldı.



BB' doğrusunun AC'yi kestiği noktaya D, $A'C'$ doğrusunu kestiği noktaya da E diyelim. $|BB'| = 2\cdot|BE|$ olduğundan

$$\begin{aligned}|B'BC'| + |B'BA'| &= 2\cdot|BEC'| + 2\cdot|BEA'| \\ &= 2\cdot[|BEC'| + |BEA'|] \\ &= 2\cdot|A'BC'| \\ &= 2\cdot|ABC|\end{aligned}$$

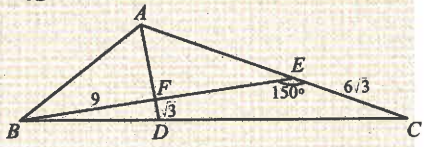
olur ki buradan

$$|A'B'C'| = 3\cdot|ABC|$$

olduğu çıkar.

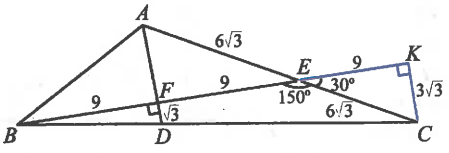
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD ⊥ BE
m(BEC) = 150°
|FD| = √3 br
|BF| = 9 br
|EC| = 6√3 br
olduğuna göre |ABC| kaç br² dir?



A) $27\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{3}$ C) $48\sqrt{3}$ D) $54\sqrt{3}$ E) $60\sqrt{3}$

Çözüm: BE doğrusunu E yönünde uzatarak ECK 30°-60°-90° üçgenini oluşturalım.



$|EC| = 6\sqrt{3}$ br olduğundan $|EK| = 9$ br ve $|KC| = 3\sqrt{3}$ br olur. BFD ile BKC üçgenlerinin benzerliğinden $|FK| = 18$ br, dolayısıyla $|FE| = 9$ br bulunur. Diğer yandan AFE ile CKE üçgenlerinin eşliğinden $|ABC| = 2\cdot|BCE|$ olduğunu anlıyoruz. O halde

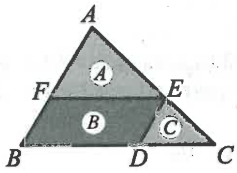
$$|ABC| = 2\cdot\frac{18\cdot 3\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}\text{ br}^2$$

olarak bulunur.

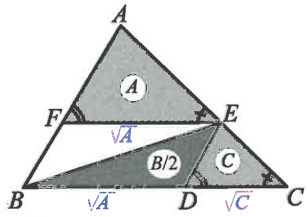
Doğru cevap: D.

Şimdi, benzerlik-alan ilişkisine ait bir dizi teorem vereceğiz. Hepsinin mantığı aynı, birini anlayın, sırtınız yere gelmez!

Teorem. *ABC bir üçgen*
FBDE bir paralelkenar
|AFE| = A br²
|FBDE| = B br²
|EDC| = C br²
ise $B^2 - 4AC = 0$.



Kanıt: AF // ED ve FE // DC olduğundan A.A. gereğince AFE ile EDC üçgenleri benzerdir. Bu üçgenlerin alanları oranı $\frac{A}{C}$ olduğundan benzerlik oranı $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$ olmalıdır.



O halde $|FE| = |BD| = \sqrt{A}$ br dersek, $|DC| = \sqrt{C}$ br olur. Şimdi $[BE]$'yi çizelim. $|BED| = B/2$ olduğunu biliyoruz.

$$\frac{B/2}{C} = \frac{|BED|}{|EDC|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$$

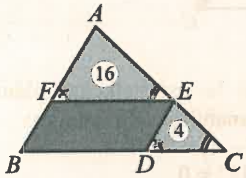
eşitliğinde iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{B^2}{4C^2} = \frac{A}{C}$$

yani C'lerin biri sadeleşirse $B^2 = 4AC$ bulunur ki kanıt tamamlanmış olur.

Sonuçtaki $B^2 - 4AC$ ifadesi ikinci dereceden denklemlerin diskriminantını hatırlattığından ve o değer genelde Δ ile gösterildiğinden bu teoreme **"Δ = 0 teoremi"** diyeceğiz. İlerde adı geçince "Ne bu?" demeyin...

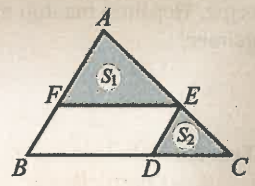
46.



$|BDEF|$ kaç br² dir?

47.
ABC bir üçgen
BDEF bir paralelkenar

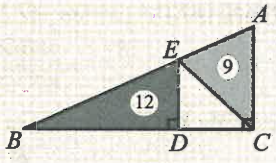
$|AFE| = S_1$ br^2
$|EDC| = S_2$ br^2



olduğuna göre *FBDE* paralelkenarının alanının S_1 ve S_2 türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

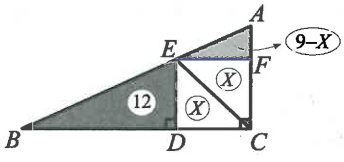
A) $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$ B) $2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$ C) $4\sqrt{S_1 \cdot S_2}$
D) $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$ E) $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BC ⊥ CA
ED ⊥ BC
$|EBD| = 12$ br^2
$|AEC| = 9$ br^2
olduğuna göre
$|EDC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) 18

Çözüm: Derhal *E*'den *BC*'ye bir paralel çizelim. *AC*'yi kestiği nokta da *F* olsun. $|EDC| = X$ br^2 dersek, $|ECF| = X$ br^2 ve $|AEF| = 9 - X$ br^2 olur.



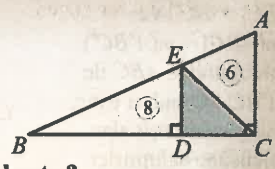
EDCF dikdörtgeni nihayetinde bir paralelkenar olduğundan ''$\Delta = 0$ teoremi''ni kullanabiliriz. Kullanalım:

$$(2X)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (9 - X) = 0$$
$$4X^2 + 48X - 432 = 0$$
$$X^2 + 12X - 108 = 0$$
$$(X + 18) \cdot (X - 6) = 0$$

eşitliğinden $X = 6$ olarak bulunur.

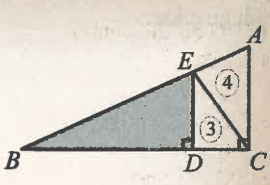
Doğru cevap: C.

48.
ABC bir dik üçgen
BC ⊥ CA
ED ⊥ BC
$|EBD| = 8$ br^2
$|AEC| = 6$ br^2
olduğuna göre $\frac{|BD|}{|DC|}$ **oranı kaçtır?**



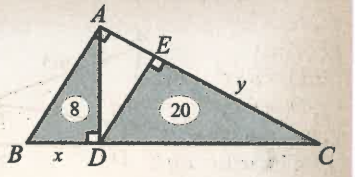
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

49.
ABC bir dik üçgen
BC ⊥ CA
ED ⊥ BC
$|AEC| = 4$ br^2
$|EDC| = 3$ br^2
olduğuna göre
$|EBD|$ **kaç** br^2 **dir?**



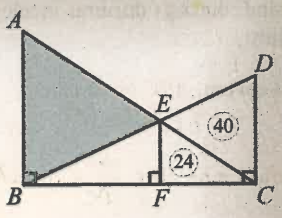
A) 6 B) 7 C) 9 D) 12 E) 24

50.
ABC bir üçgen
CA ⊥ AB
AD ⊥ BC
DE ⊥ AC
$|ABD| = 8$ br^2
$|EDC| = 20$ br^2
olduğuna göre $|BD| \cdot |EC| = x \cdot y$ **çarpımı kaçtır?**



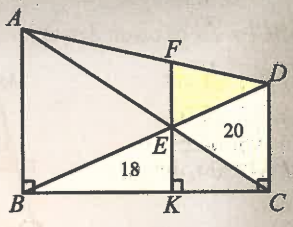
A) $4\sqrt{5}$ B) $8\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{10}$ D) $6\sqrt{10}$ E) $8\sqrt{10}$

51.
ABC ve BCD birer üçgen
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$EF \perp BC$
$|EFC| = 24$ br^2
$|DEC| = 40$ br^2
olduğuna göre
$|ABE|$ kaç br^2 dir?



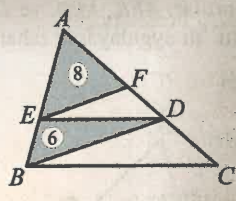
A) 60 B) 72 C) 84 **D) 90** E) 96

52.
$ABCD$ bir dik yamuk
$AB \perp BC$
$BC \perp CD$
$FK \perp BC$
$|EBK| = 18$ br^2
$|DEC| = 20$ br^2
olduğuna göre
$|FED|$ kaç br^2 dir?



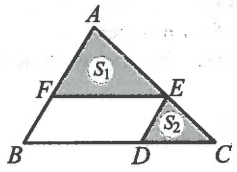
A) 15 B) 14 **C) 12** D) 10 E) 8

53.
ABC bir üçgen
$ED \,//\, BC$
$EF \,//\, BD$
$|AEF| = 8$ br^2
$|EBD| = 6$ br^2
olduğuna göre
$|DBC|$ kaç br^2 dir?

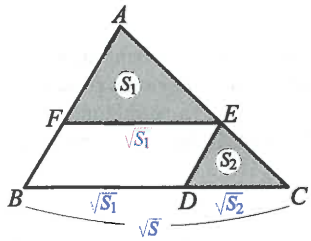


A) 8 **B) 9** C) 10 D) 11 E) 12

Teorem. *ABC bir üçgen*
FBDE bir paralelkenar
$|AFE| = S_1$ br^2
$|EDC| = S_2$ br^2
$|ABC| = S$ br^2
ise $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.



Kanıt: AFE ile EDC üçgenlerinin benzer olduğunu biliyoruz. Hatta bu üçgenlerin de ABC ile olduğunu... Alanları sırasıyla S_1, S_2 ve S olduğundan, karşılıklı kenar uzunlukları da sırasıyla bu değerlerin kareköküyle orantılıdır.



Yani, $|FE| = \sqrt{S_1}$ br olsun dersek,

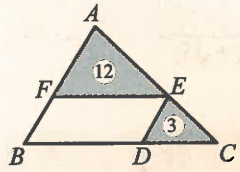
$$|DC| = \sqrt{S_2} \text{ ve } |BC| = \sqrt{S} \text{ br}$$

olur. $|FE| = |BD|$ ve $|BC| = |BD| + |DC|$ eşitliğinden

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$$

olduğu kanıtlanır.

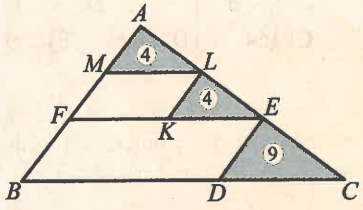
54.



$BDEF$ paralelkenar ise $|ABC|$ kaç br^2 dir?

27

55.

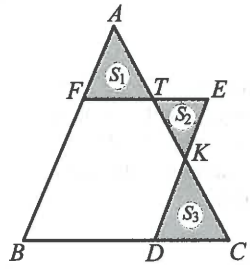


$BDEF$ ve $FKLM$ paralelkenar ise $|ABC|$ kaç br^2 dir?

49

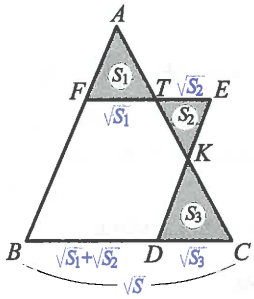
Şimdi de paralelkenarın üçgenin içine sığmayıp dışarı taştığı duruma göz atacağız. Yani E noktası üçgenin dışında olursa n'olur? İlgili teoremi verelim:

Teorem. *ABC bir üçgen*
FBDE bir paralelkenar
FE ∩ AC = {T}
ED ∩ AC = {K}
|ABC| = S br²
|AFT| = S₁ br²
|TKE| = S₂ br²
|KDC| = S₃ br²
ise $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$.



Kanıt: Yine aynı mantığı kullanacağız. *ABC*, *AFT*, *KET* ve *KDC* üçgenlerinin benzer olduğunu biliyoruz. Alanları sırasıyla S, S_1, S_2 ve S_3 olduğundan, karşılıklı kenar uzunlukları da sırasıyla bu değerlerin kareköküyle orantılıdır.

$|BC|=\sqrt{S}$ br olsun dersek;
$|FT|=\sqrt{S_1}$ br
$|TE|=\sqrt{S_2}$ br
$|DC|=\sqrt{S_3}$ br
olur.



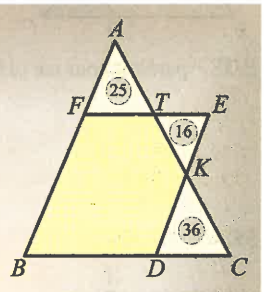
$|BD|=|FE|$
$|FE|=|FT|+|TE|$
ve $|BC|=|BD|+|DC|$
eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

eşitliğine kolaylıkla ulaşılır.

56.
ABC bir üçgen
BDEF bir paralelkenar
$|AFT| = 25$ br²
$|TKE| = 16$ br²
$|KDC| = 36$ br²

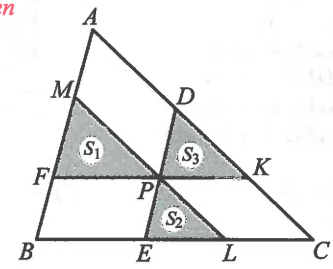
olduğuna göre
|BDKTF| kaç br² dir?



A) 144 B) 148 C) 164 D) 169 E) 209

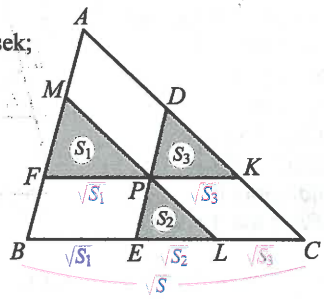
Şimdi de paralelkenarın bir köşesinin üçgenin iç bölgesinde kaldığı durumu inceleyeceğiz. İlgili teoremi verelim:

Teorem. *ABC bir üçgen*
DE ∩ FK ∩ LM = {P}
AB // DE
BC // FK
CA // LM
|MFP| = S₁
|PEL| = S₂
|DPK| = S₃
|ABC| = S
ise
$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$.



Kanıt: *ABC*, *MFP*, *PEL* ve *DPK* ve üçgenleri benzerdir. Alanları sırasıyla S, S_1, S_2 ve S_3 br² olduğundan karşılıklı kenar uzunlukları da sırasıyla $\sqrt{S}$, $\sqrt{S_1}$, $\sqrt{S_2}$ ve $\sqrt{S_3}$ ile orantılıdır.

$|BC|=\sqrt{S}$ br olsun dersek;
$|FP|=\sqrt{S_1}$ br
$|EL|=\sqrt{S_2}$ br
$|PK|=\sqrt{S_3}$ br
olur.



$|FP|=|BE|$
$|PK|=|LC|$
ve $|BC|=|BE|+|EL|+|LC|$ eşitlikleri birlikte düşünülürse

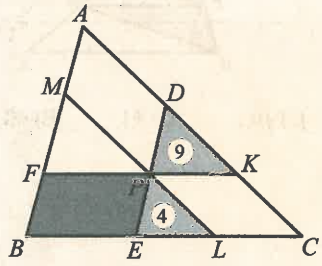
$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

eşitliğine beklenmedik rahatlıkla ulaşılır.

Bu teoreme, taralı bölgeler Mitsubishi'nin amblemini anımsattığı için *Mitsubishi Teoremi* diyebilirsiniz ☺

Bazen şekildeki taralı olmayan paralelkenarların alanları sorulur. *AFK*, *MBL* ve *DEC* üçgenlerinde ''Δ = 0 teoremi''ni uygulayarak rahatlıkla bulabilirsiniz.

57.

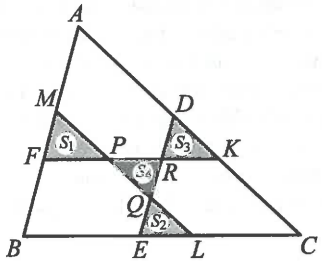


$|ABC| = 81$ br² olup
DE // AB, *FK // BC* ve *LM // CA* ise *|BEPF|* kaç br² dir?

16

Teorem. *ABC bir üçgen*
DE // AB
FK // BC
LM // CA

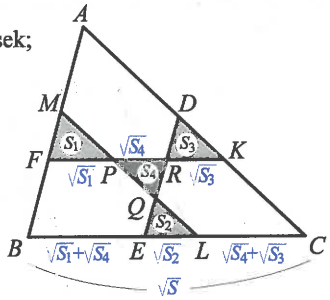
$|ABC| = S$ br^2
$|MFP| = S_1$ br^2
$|QEL| = S_2$ br^2
$|DRK| = S_3$ br^2
$|PQR| = S_4$ br^2



ise $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + 2\sqrt{S_4}$.

Kanıt: Aynı hareketlerle devam ediyoruz: *ABC*, *MFP*, *QEL*, *DRK* ve *QRP* üçgenleri benzerdir. Alanları sırasıyla S, S_1, S_2, S_3 ve S_4 br^2 olduğundan karşılıklı kenar uzunlukları da sırasıyla $\sqrt{S}$, $\sqrt{S_1}$, $\sqrt{S_2}$, $\sqrt{S_3}$ ve $\sqrt{S_4}$ ile orantılıdır.

$|BC| = \sqrt{S}$ br olsun dersek;
$|FP| = \sqrt{S_1}$ br
$|EL| = \sqrt{S_2}$ br
$|RK| = \sqrt{S_3}$ br
$|PR| = \sqrt{S_4}$ br
olur.



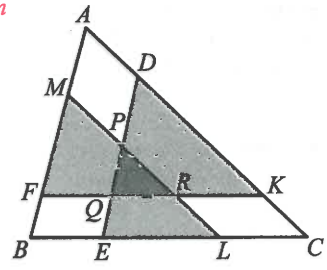
$|FR| = |BE|$
$|PK| = |LC|$
ve $|BC| = |BE| + |EL| + |LC|$ eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + 2\sqrt{S_4}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem. *ABC bir üçgen*
DE // AB
FK // BC
LM // CA

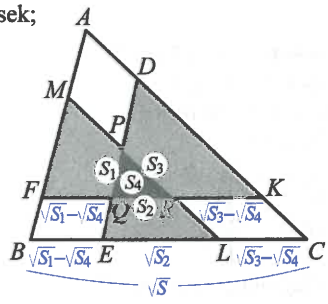
$|ABC| = S$ br^2
$|MFR| = S_1$ br^2
$|PEL| = S_2$ br^2
$|DQK| = S_3$ br^2
$|PQR| = S_4$ br^2



ise $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} - 2\sqrt{S_4}$.

Kanıt: Aynı hareketlerle devam ediyoruz: *ABC*, *MFR*, *PEL*, *DQK* ve *PQR* üçgenleri benzerdir. Alanları sırasıyla S, S_1, S_2, S_3 ve S_4 br^2 olduğundan karşılıklı kenar uzunlukları da sırasıyla $\sqrt{S}$, $\sqrt{S_1}$, $\sqrt{S_2}$, $\sqrt{S_3}$ ve $\sqrt{S_4}$ ile orantılıdır.

$|BC| = \sqrt{S}$ br olsun dersek;
$|FR| = \sqrt{S_1}$ br
$|EL| = \sqrt{S_2}$ br
$|QK| = \sqrt{S_3}$ br
$|QR| = \sqrt{S_4}$ br
olur. O halde
$|FQ| = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_4}$
$|RK| = \sqrt{S_3} - \sqrt{S_4}$

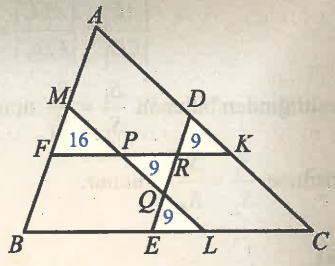


bulunur. Diğer yandan $|FQ| = |BE|$, $|RK| = |LC|$ ve $|BC| = |BE| + |EL| + |LC|$ eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} - 2\sqrt{S_4}$$

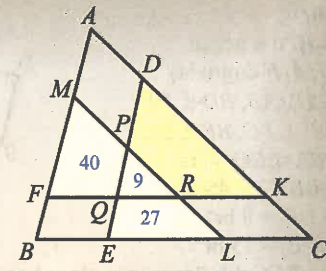
eşitliğine ulaşılır.

58.
ABC bir üçgen
DE // AB
FK // BC
LM // CA
$|MFP| = 16$ br^2
$|PQR| = 9$ br^2
$|DRK| = 9$ br^2
$|QEL| = 9$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



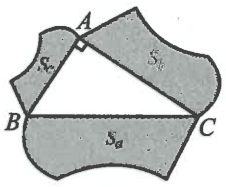
A) 144 B) 169 C) 196 D) 225 E) 256

59.
ABC bir üçgen
DE // AB
FK // BC
LM // CA
$|PQR| = 9$ br^2
$|QELR| = 27$ br^2
$|PMFQ| = 40$ br^2
$|ABC| = 225$ br^2
olduğuna göre
$|RKDP|$ kaç br^2 dir?

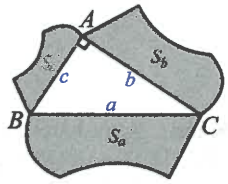


A) 40 B) 49 C) 55 D) 64 E) 72

Teorem. *Bir dik üçgenin üç kenarı üzerine üçgenin içine ya da dışına doğru benzer şekiller yerleştirilirse, dik kenarlar üzerine yerleştirilenlerin alanları toplamı hipotenüs üzerine yerleştirilen şeklin alanına eşittir.*
Yani; şekle göre $S_b + S_c = S_a$'dır.

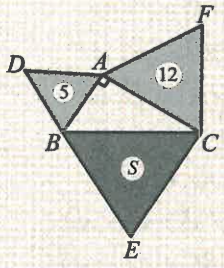


Kanıt: Benzer şekillerin alanları oranı, benzerlik oranının karesidir. Benzerlik oranı $a : b : c$ olduğundan alan oranı $a^2 : b^2 : c^2$ olmalıdır.
$S_a = a^2 \cdot k$
$S_b = b^2 \cdot k$
$S_c = c^2 \cdot k$
olsun. Pisagor teoreminden $b^2 + c^2 = a^2$ olduğunu bildiğimizden $S_b + S_c = S_a$'dır.



Örnek. *ABC dik üçgen*
ADB, BEC, CFA
birer eşkenar üçgen
CA ⊥ AB

$|ADB| = 5$ br^2
$|AFC| = 12$ br^2
$|BEC| = S$ br^2
olduğuna göre S kaçtır?

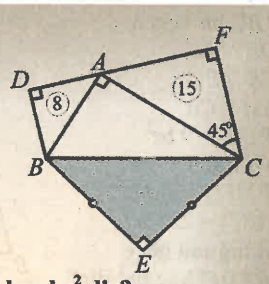


A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Tüm eşkenar üçgenler birbiriyle benzer olduklarından yukardaki teoremin şartları sağlanmaktadır. O halde $S = 5 + 12 = 17$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

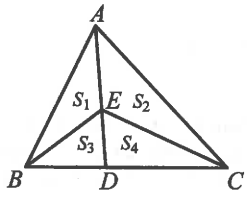
60.
ABC dik üçgen
D, A, F doğrudaş
CA ⊥ AB, BD ⊥ DF
DF ⊥ FC, BE ⊥ EC
$|BE| = |EC|$
$m(ACF) = 45°$
$|ADB| = 8$ br^2
$|AFC| = 15$ br^2
ise *BEC* dik üçgeninin alanı kaç br^2 dir?



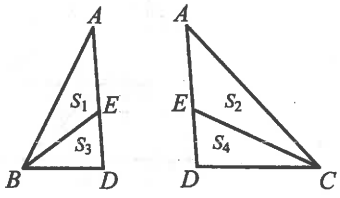
A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

Yeniden Menelaus – Ceva – Von Aubel Teoremleri. Üçgenin alan hesaplamaları, üçgende yepyeni teoremlerin bulunmasına yol açtığı gibi, bilinen köklü teoremlerin basit kanıtlarını da vermiştir. Yazımızın bu kısmında daha önce öğrendiğimiz Menelaus, Ceva ve Von Aubel teoremlerini alan özellikleriyle kanıtlayacak, ardından bu teoremlerle çözülen alan problemlerine göz atacağız. Önce yazıda çok kullanacağımız bir teoremi öğrenelim.

Teorem. *ABC bir üçgen ve E noktası bu üçgenin AD keseni üzerinde herhangi bir nokta ise; şekilde verilen alan değerleri arasında*
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$
bağıntısı geçerlidir.



Kanıt: *ABC* üçgenini oluşturan iki üçgeni aşağıdaki gibi ayıralım.

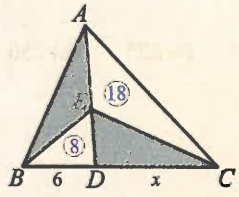


Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranıdır ya, $|AE| : |ED|$ değerini hem soldaki üçgenden hem de sağdaki üçgenden bulup, bulduklarımızı birbirine eşitleyeceğiz.

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|ABE|}{|EBD|} = \frac{S_1}{S_3}$$
$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AEC|}{|EDC|} = \frac{S_2}{S_4}$$

eşitliğinden bulunan $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_2}{S_4}$ orantısında içler yer değiştirilirse $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$ bulunur.

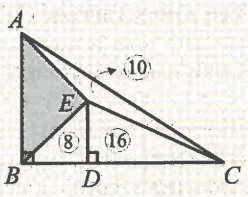
61.



Taralı alanlar eşit ise x kaçtır?

9

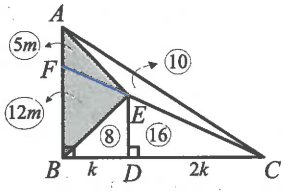
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$ED \perp BC$
$|EBD| = 8$ br^2
$|EDC| = 16$ br^2
$|AEC| = 10$ br^2



olduğuna göre
ABE üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 *dir?*

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Kanıt: *CE*'nin *AB*'yi kestiği noktaya *F* diyelim.



$$\frac{|AFE|}{|AEC|} = \frac{|FE|}{|EC|} = \frac{|FBE|}{|EBC|}$$

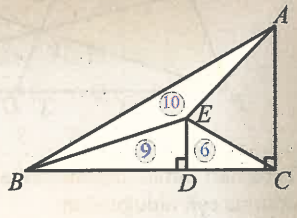
Olduğundan

$$\frac{|AFE|}{10} = \frac{|FBE|}{24}$$

olur ki; buradan $|AFE| = 5m$ br^2 dersek $|FBE| = 12m$ br^2 olur. Diğer yandan *EDC* ile *FBC* üçgenlerinin benzerliğinden *EDC* üçgensel bölgesinin alanı $4S$ br^2 ise *FBDE* dörtgensel bölgesinin alanı $5S$ br^2 olmalıdır. Bu da $12m + 8 = 20$ olması demektir. $m = 1$ bulunduğundan $|ABE| = 17$ br^2 olur.

Doğru cevap: E.

62.
ABC dik üçgen
$BC \perp CA$
$ED \perp BC$
$|ABE| = 10$ br^2
$|EBD| = 9$ br^2
$|EDC| = 6$ br^2
olduğuna göre
$\frac{|AC|}{|ED|}$ **oranı kaçtır?**

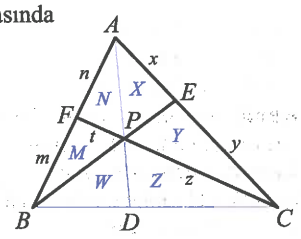


A) 2 **B) 2,5** C) 3 D) 3,5 E) 4

Şimdi de bu kadar kolay ve anlaşılabilir bir teoremin neler becerdiğine bakacağız. Menelaus ve Ceva teoremleri bu bağıntı ile çok kolay kanıtlanabiliyor.

Menelaus Teoremi'nin Alan Yardımıyla Kanıtı.

Bir *ABC* üçgeni ve *P* noktasında kesişen *AD*, *BE*, *CF* kesenlerini çizelim. Uzunluk ve alanları yandaki gibi adlandıralım.



Bir önceki teorem gereği

$$\frac{M+N}{W+Z} = \frac{X}{Y}$$

olur. O halde $\frac{W+Z}{M+N}.\frac{X}{Y} = 1$'dir. Şimdi eşitliğin sol yanını $\frac{M}{M}$ ile çarpalım.

$$\frac{M}{M}.\frac{W+Z}{M+N}.\frac{X}{Y} = 1$$

eşitliğini $\frac{M}{M+N}.\frac{X}{Y}.\frac{W+Z}{M} = 1$ şeklinde yazmakta bir mahzur yoktur. Alan oranlarını kenar oranlarına dönüştürürsek,

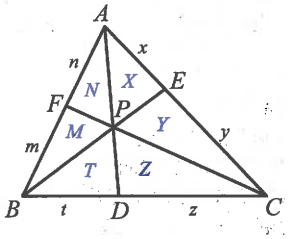
$$\frac{m}{m+n}.\frac{x}{y}.\frac{z}{t} = 1$$

olan Menelaus Teoremi'ni kanıtlamış oluruz.

Ceva Teoremi'nin Alan Yardımıyla Kanıtı.

Yine bir *ABC* üçgeni ve *P* noktasında kesişen *AD*, *BE*, *CF* kesenlerini çizelim.

Uzunluk ve alanları yandaki gibi adlandıralım.



Daha önce öğrendiğimiz teorem gereği;

$$\frac{M+N}{T+Z} = \frac{X}{Y},\ \frac{T+Z}{Y+X} = \frac{M}{N} \text{ ve } \frac{Y+X}{M+N} = \frac{Z}{T}$$

olur.

$$\frac{M+N}{T+Z}.\frac{T+Z}{Y+X}.\frac{Y+X}{M+N} = 1$$

diye $\frac{X}{Y}.\frac{M}{N}.\frac{Z}{T} = 1$ olur ki, alan oranlarını kenar oranlarına dönüştürürsek,

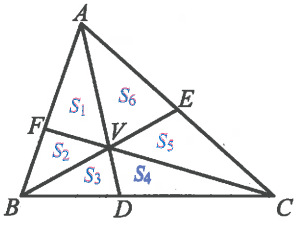
$$\frac{x}{y}.\frac{m}{n}.\frac{z}{t} = 1$$

olan Ceva Teoremi'ni kanıtlamış oluruz.

Hatta bunlar kadar meşhur olmayan Van Aubel teoremlerini de alan kuralları ile kanıtlayabiliriz.

Von Aubel Teoremi (1)'in Alan Yardımıyla Kanıtı.

Bir ABC üçgeni ve V noktasında kesişen AD, BE, CF kesenlerini çizelim.



Uzunluk ve alanları yandaki gibi adlandıralım.

$$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_5+S_6}{S_3+S_4}$$

ve

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{S_6}{S_5}=\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$$

değerlerini taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{|AF|}{|FB|}+\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{S_1+S_2+S_5+S_6}{S_3+S_4}=\frac{|AV|}{|VD|}$$

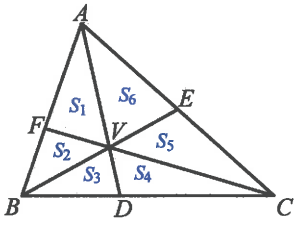
bulunur ki

$$\frac{|AV|}{|VD|}=\frac{|AF|}{|FB|}+\frac{|AE|}{|EC|}$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

Von Aubel Teoremi (2)'nin Alan Yardımıyla Kanıtı.

Yine bir ABC üçgeni ve V noktasında kesişen AD, BE, CF kesenlerini çizelim.



Uzunluk ve alanları yandaki gibi adlandıralım.

$$\frac{|AV|}{|AD|}=\frac{S_1+S_2+S_5+S_6}{|ABC|}$$

$$\frac{|BV|}{|BE|}=\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{|ABC|}$$

$$\frac{|CV|}{|CF|}=\frac{S_3+S_4+S_5+S_6}{|ABC|}$$

oranlarını toplayalım. Sağ taraf tam 2 eder.

$$\frac{|AV|}{|AD|}+\frac{|BV|}{|BE|}+\frac{|CV|}{|CF|}=2$$

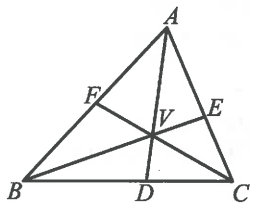
olduğu kanıtlanmış olur.

Von Aubel Teoremi (3)'ün Alan Yardımıyla Kanıtı.

Yandaki ABC üçgeninde

$$|AV|=|AD|-|VD|$$
$$|BV|=|BE|-|VE|$$
$$|CV|=|CF|-|VF|$$

olduğunu not edelim.



Önce cebirsel olarak kanıtlayacağız, sonra sentetik kanıtı vereceğiz. Yukardaki eşitlikleri 2 nolu Von Aubel teoreminde yerlerine yazalım.

$$\frac{|AV|}{|AD|}+\frac{|BV|}{|BE|}+\frac{|CV|}{|CF|}=2$$

$$\frac{|AD|-|DV|}{|AD|}+\frac{|BE|-|EV|}{|BE|}+\frac{|CF|-|FV|}{|CF|}=2$$

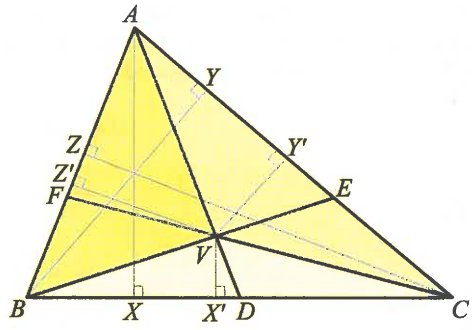
$$1-\frac{|DV|}{|AD|}+1-\frac{|EV|}{|BE|}+1-\frac{|FV|}{|CF|}=2$$

$$\frac{|DV|}{|AD|}+\frac{|EV|}{|BE|}+\frac{|FV|}{|CF|}=1$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

.

Şimdi geometrik kanıta geldi sıra. Üçgenin üç yüksekliğini çizip V'den kenarlara birer dikme indirelim.



Tabanları ortak üçgenlerin alanları oranı yükseklikleri oranına eşit olduğundan;

$$\frac{|VBC|}{|ABC|}=\frac{|VX'|}{|AX|}=\frac{|DV|}{|AD|}$$

$$\frac{|VCA|}{|ABC|}=\frac{|VY'|}{|BY|}=\frac{|EV|}{|BE|}$$

$$\frac{|VAB|}{|ABC|}=\frac{|VZ'|}{|CZ|}=\frac{|FV|}{|CF|}$$

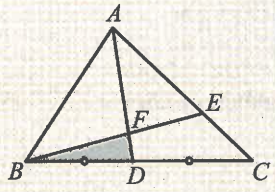
olur. Bu eşitliklerin üçü birden toplanırsa, en soldakilerin toplamı 1 çıkacağından, en sağdakilerin toplamı da

$$\frac{|DV|}{|AD|}+\frac{|EV|}{|BE|}+\frac{|FV|}{|CF|}=1$$

olmalıdır.

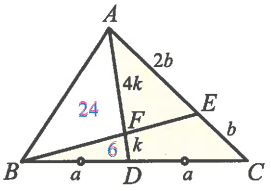
Kanıtlar bitti. Şimdi Menelaus, Ceva ve Von Aubel teoremleriyle rahatça çözülen alan problemlerine göz atacağız. Önce birkaç örnek çözelim.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| \cap |BE| = \{F\}$
$|BD| = |DC|$
$|AE| = 2\cdot|EC|$
$|FBD| = 6$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 60 B) 66 C) 72 D) 78 E) 84

Çözüm: FBD üçgeninin alanına 6'yı yazalım. Şimdi şekle bakalım, neyi bilseydik 'o zaman şuranın alanı da şu olur' diyebilirdik? $|AF| : |FD|$ oranını değil mi?



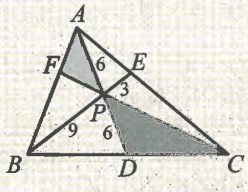
Bu yüzden B'den başlayan bir Menelaus teoremi yazacağız.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{|AF|}{|FD|}=1$$

eşitliğinden aradığımız oran 4 olarak bulunur. Bu sebeple $|DF| = k$ br dersek $|AF| = 4k$ br olur. O halde $|ABF| = 24$ br^2 dir. $|ABD| = 30$ br^2 olup $[AD]$ kenarortay olduğundan $|ABC| = 60$ br^2 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AD| \cap |BE| \cap |CF| = \{P\}$
$|AP| = |PD| = 6$ br
$|BP| = 9$ br
$|PE| = 3$ br
$|CF| = 20$ br
olduğuna göre $\dfrac{|AFP|}{|CPD|}$ *kaçtır?*



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{9}$

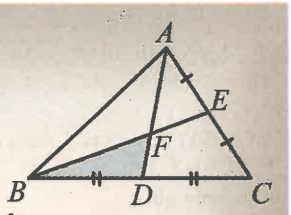
Çözüm: APF ile CPD açıları eş ve $|AP| = |PD|$ olduğundan $|FP|/|PC|$ bize sonucu verecektir. $|FP| = x$ olsun. Üsteki teoreme göre;

$$\frac{6}{12}+\frac{3}{12}+\frac{x}{20}=1$$

olması gerekir, ki buradan $x = 5$ bulunur. O halde $|PC| = 15$ ve istenilen oran $5/15 = 1/3$ olarak bulunur.

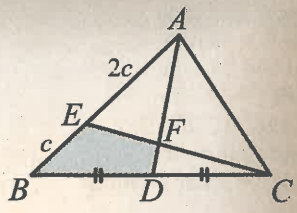
Doğru cevap: B.

63.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$E \in [AC]$
$|BD| = |DC|$
$|CE| = |EA|$
$|FBD| = 4$ br^2
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



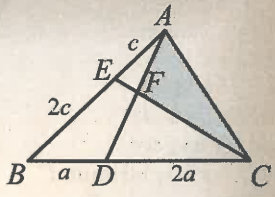
A) 12 B) 16 C) 20 **D)** 24 E) 30

64.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DC|$
$|AE| = 2\cdot|EB| = 2c$ br
olduğuna göre
$\dfrac{|BDFE|}{|ABC|}$ **oranı kaçtır?**



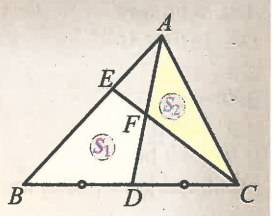
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{15}$ **D)** $\frac{7}{30}$ E) $\frac{13}{60}$

65.
ABC bir üçgen
$|DC| = 2\cdot|BD| = 2a$ br
$|BE| = 2\cdot|EA| = 2c$ br
$AD \cap CE = \{F\}$
$|AFC| = 6$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



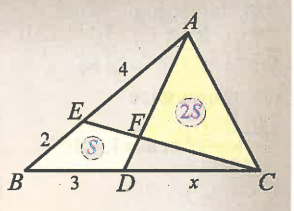
A) 21 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

66.
ABC bir üçgen
$|AB| = 3|AE|$
$|BD| = |DC|$
$|AFC| = S_2$ br^2
$|EBDF| = S_1$ br^2
olduğuna göre
$\frac{S_1}{S_2}$ **oranı kaçtır?**



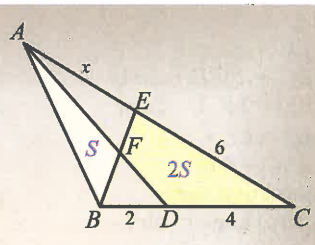
A) $\frac{5}{3}$ B) 2 C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 3

67.
ABC bir üçgen
$|AE| = 4$ birim
$|EB| = 2$ birim
$|BD| = 3$ birim
$|AFC| = 2\cdot|BDFE|$
olduğuna göre
$|DC| = x$ **kaç birimdir?**



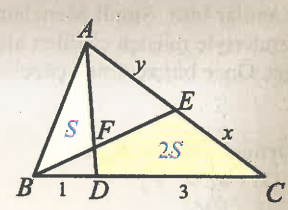
A) 6 B) 7 C) $\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{7}$ **E)** $\sqrt{7}+1$

68.
ABC bir üçgen
$|BD| = 2$ birim
$|DC| = 4$ birim
$|CE| = 6$ birim
$|EFDC| = 2\cdot|ABF|$
olduğuna gore
$|AE| = x$ **kaç birimdir?**



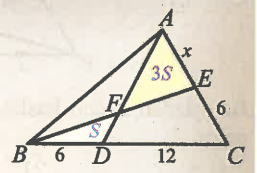
A) 4 B) $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{13}-1$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{7}+1$

69.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|BD| = 1$ birim
$|DC| = 3$ birim
$|CE| = x$ br
$|EA| = y$ br
$|EFDC| = 2\cdot|ABF|$
olduğuna göre $6x / y$ oranı kaçtır?



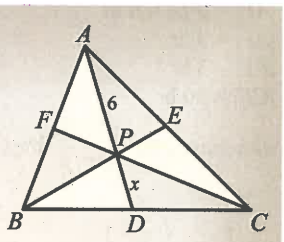
A) 9 B) $\sqrt{145}$ C) 12 **D)** $\sqrt{145}-7$ E) $6\sqrt{3}-3$

70.
ABC bir üçgen
$|BD| = 6$ birim
$|CD| = 12$ birim
$|CE| = 6$ birim
$|AFE| = 3\cdot|FBD|$
olduğuna göre
$|AE| = x$ **kaç br dir?**



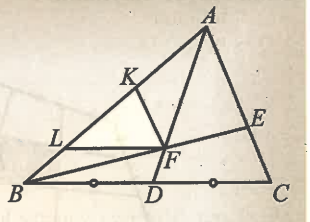
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 **E)** 6

71.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
AFP, BDP ve CEP üçgensel bölgeleri denktir.
$|AP| = 6$ br
olduğuna göre
$|PD| = x$ **kaç br dir?**



A) 2 **B)** 3 C) 4 D) 5 E) 6

72.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|BD| = |DC|$
$|AE| = 2\cdot|EC|$
$FK \,//\, CA$
$FL \,//\, CB$
olduğuna göre $|KLF|$, $|ABC|$'nin yüzde kaçıdır?

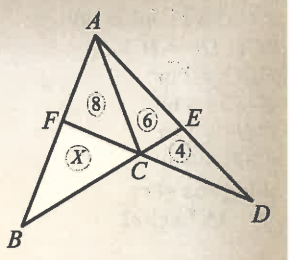


A) 12 B) 15 **C)** 16 D) 18 E) 20

73.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BE \cap DF = \{C\}$

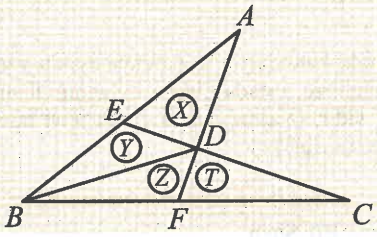
$|DEC| = 4$ br^2
$|EAC| = 6$ br^2
$|CAF| = 8$ br^2
$|CFB| = X$ br^2

olduğuna göre $7X$ kaçtır?



A) 58 B) 60 C) 62 **D)** 64 E) 66

Örnek. *Aşağıdaki şekilde X, Y, Z, T arasında bir bağıntı bulunuz.*

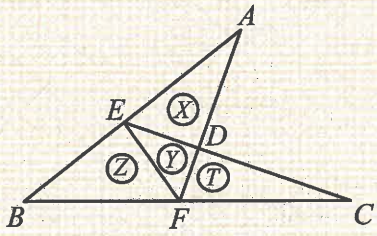


Çözüm: Bir Menelaus Teoremi iş görür.

$\frac{T}{T+Z}\cdot\frac{Y}{X}\cdot\frac{X+Y}{Z}=1$ eşitliğini şöyle düzenleyeceğiz:

$$\frac{X+Y}{X/Y}=\frac{T+Z}{T/Z}.$$

Örnek. *Yukardaki şekilde X, Y, Z, T arasında bir bağıntı bulunuz.*



Çözüm: Yine Menelaus Teoremi'yle işi halledeceğiz.

$$\frac{T+Y}{T+Y+Z}\cdot\frac{Z}{X+Y}\cdot\frac{X}{Y}=1$$

eşitliği düzenlenirse $\frac{T}{Y}+1=\left(\frac{Y}{X}+1\right)\cdot\left(\frac{T}{Z}+\frac{Y}{Z}+1\right)$ çıkar.

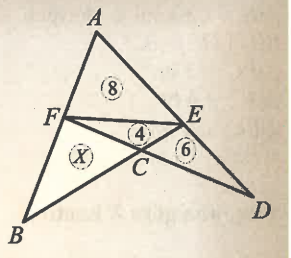
Bir daha düzenlersek

$$\frac{T}{Y}=\frac{YT+YY+YZ+TX+YX}{XZ}.$$

74.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BE \cap DF = \{C\}$

$|DEC| = 6$ br^2
$|EFC| = 4$ br^2
$|EAF| = 8$ br^2
$|CFB| = X$ br^2

olduğuna göre X kaçtır?

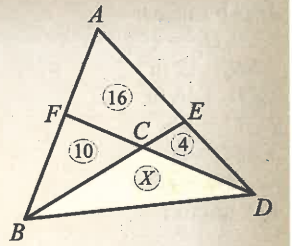


A) 16 B) 20 C) 24 D) 32 **E)** 36

75.
ABD bir üçgen
$BE \cap DF = \{C\}$

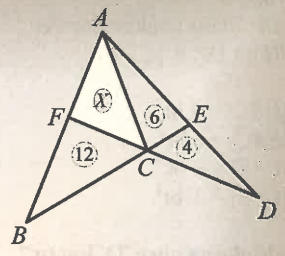
$|DEC| = 4$ br^2
$|EAFC| = 16$ br^2
$|CFB| = 10$ br^2
$|CBD| = X$ br^2

ise $X^2 - 5X$ kaçtır?



A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 95

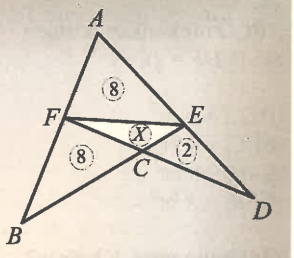
76.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BE \cap DF = \{C\}$
$|DEC| = 2$ br^2
$|EAC| = 3$ br^2
$|CAF| = X$ br^2
$|CFB| = 4$ br^2
olduğuna göre
$X^2 + 4X$ kaçtır?



A) 20 B) 24 **C) 30** D) 32 E) 36

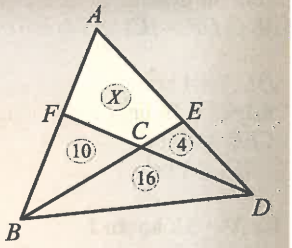
77.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BE \cap DF = \{C\}$
$|DEC| = 3$ br^2
$|EAC| = 4$ br^2
$|EFC| = X$ br^2
$|CFB| = 18$ br^2

olduğuna göre X kaçtır?



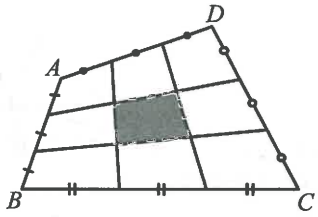
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

78.
ABD bir üçgen
$BE \cap DF = \{C\}$
$|CFB| = 12$ br^2
$|CBD| = 16$ br^2
$|DEC| = 4$ br^2
$|EAFC| = X$ br^2
olduğuna göre
$13X$ kaçtır?

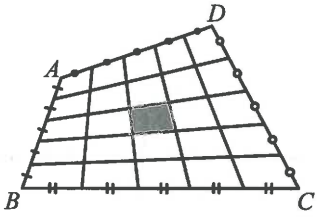


A) 130 B) 135 C) 140 **D) 144** E) 150

Bunu biliyor muydunuz?



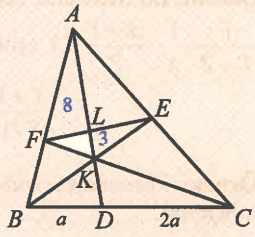
Yukardaki $ABCD$ dörtgeninde taralı bölgenin alanı, tüm alanının 1/9'udur.



Genel olarak; kenarları n eş parçaya ayıran yandaki gibi doğrular çizilirse, ortada oluşan bölgenin alanı tüm alanının $1/n^2$ sidir. (Yalnız; ancak n tek iken böyle bir ortanca bölge oluşur!)

Meraklısına Bir Soru

ABC bir üçgen
$AD \cap BE \cap CF = \{K\}$
$AK \cap FE = \{L\}$
$|DC| = 2 \cdot |BD|$
$|AFL| = 8$ br^2
$|LKE| = 3$ br^2
olduğuna göre
$|FKL|$ kaç br^2 dir?



Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

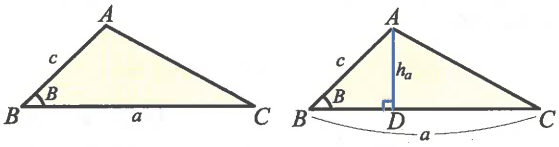
Sinüslü Alan Formülü

Tüm alan formülleri içinde en önemlisine geldik. İlkokul çocukları sinüs nedir bilselerdi eğer, eminim ilkokuldan itibaren bu formülü öğretirlerdi. Hemen ilgili teoremi verelim, ardından doğurduğu sonuçlara bakacağız:

Teorem. *Herhangi iki kenarının uzunluğu ve bu iki kenarın belirttiği açının ölçüsü verilen bir ABC üçgeni için;*

$$|ABC| = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C\,.$$

Kanıt: Sözgelimi, alanı istenen üçgende a ve c değerleriyle $m(B)$ biliniyor olsun. Şu an için bildiğimiz tek alan formülü *tabançarpıyükseklikbölüiki* olduğundan h_a veya h_c değerine ihtiyacımız var.



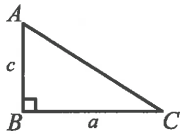
Bu sebepten dolayı, yukardaki gibi A'ya ait yüksekliği çizip boyuna h_a diyelim.

$\sin B = \frac{h_a}{c}$ olduğundan $h_a = c\cdot\sin B$ dir. O halde;

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B\,.$$

Diğer eşitlikler de benzer şekilde kanıtlanabilir.

Formülün önemi ilk olarak şunda yatıyor:

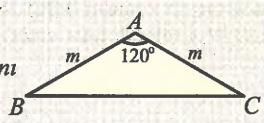


Yukardaki ABC dik üçgeninin alanını da bu formülden bulabiliyoruz. Çünkü *tabançarpıyükseklikbölüiki* formülünden bulabileceğimiz $\frac{1}{2}ab$ değeri, aslında

$$|ABC| = \frac{1}{2}ab\sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab$$

den başka bir şey değil. Şekildeki B açısının ölçüsü 90° değil de başka bir değer olsaydı da bu formül soruyu çözer ama eskisiyle bakar bakar durursunuz. Yani bu formül, eski formülümüzü zaten kapsamakta ve onun beceremediği işlemleri de becermektedir. Bilmem anlatabildim mi?

Örnek. *Tepe açısı* 120° *ve ikiz kenarları* m br *olan uzunlukta olan bir ikizkenar üçgenin alanı aşağıdaki formüllerden hangisiyle bulunur?*



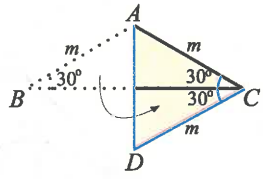
A) $\frac{1}{2}m^2$ B) $\frac{1}{4}m^2$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}m^2$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$ E) $\frac{\sqrt{3}}{8}m^2$

Çözüm: Az önce öğrendiğimiz formülü kullanacağız:

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot m\cdot m\cdot\sin 120^\circ = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}\,.$$

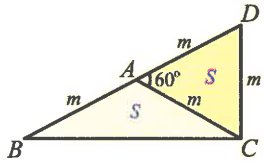
Doğru cevap: D.

Dikkat ettiyseniz, bulduğumuz formül bir kenarı m br olan bir eşkenar üçgenin alanıyla aynı. Bunun sebebini kolaylıkla izah etmek mümkün:



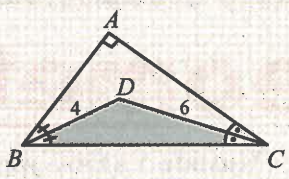
ABC üçgeninin A'ya ait yüksekliği çizildiğinde üçgen iki eş parçaya ayrılmış olur. Solda kalan parçayı, yukardaki şekilde görüldüğü üzere sağda kalan parçanın tabanına uygun bir şekilde yapıştırırsak, ACD eşkenar üçgeni elde edilir.

Şöyle bir açıklama yapmak da mümkün:



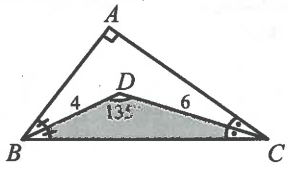
$[BA]$ kenarını A yönünde kendi boyu kadar yani m br uzatırsak, üst şekilden de görüldüğü üzere ACD eşkenar olur. Taban uzunlukları aynı olduğundan alanları da aynıdır.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
[BD] ve [CD] iç açıortay
|BD| = 4 br
|CD| = 6 br
olduğuna göre
|DBC| kaç br² dir?



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) 12

Çözüm: *DBC* üçgeninin iki kenar uzunluğu bilindiğinden bu iki kenarın belirttiği açının ölçüsünü bulmak yani *m(D)*'yi bilmek bize yetecek.



$$m(D) = 90° + \frac{m(A)}{2} = 90° + \frac{90°}{2} = 135°$$

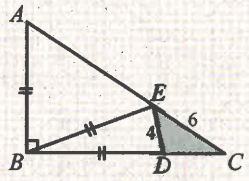
olduğundan

$$|DBC| = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 135° = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

bulunur.

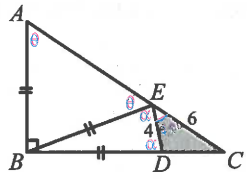
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC dik üçgen*
AB ⊥ BC
|BA| = |BE| = |BD|
|ED| = 4 br
|EC| = 6 br
olduğuna göre
|DEC| kaç br² dir?



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) 12

Çözüm: Alanı sorulan bölgenin iki kenarının uzunluğu halihazırda bilinmekte olduğundan bize lazım olan tek şey *CED* açısının ölçüsüdür.

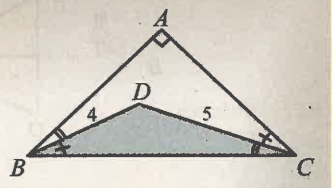


Bu amaçla *ABE* ve *EBD* ikizkenar üçgenlerinin taban açılarının ölçülerine sırasıyla θ ve α dersek, *ABDE* dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı gereği α + θ = 135° buluruz. Bu da *m(DEC)* = 45° demektir. Soru çözüldü sayılır artık.

$$|DEC| = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 45° = 6\sqrt{2}\ \text{br}^2.$$

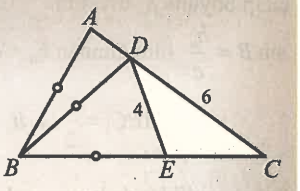
Doğru cevap: D.

1.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
m(ABD) = m(BCD)
m(DBC) = m(ACD)
|BD| = 4 br
|DC| = 5 br
olduğuna göre
|DBC| kaç br² dir?



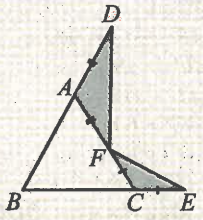
A) 5 **B)** $5\sqrt{2}$ C) 10 D) $10\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{3}$

2.
ABC bir üçgen
m(ABC) = 60°
|BA| = |BD| = |BE|
|DE| = 4 br
|DC| = 6 br
olduğuna göre
|DEC| kaç br² dir?



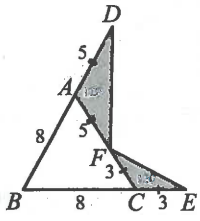
A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) $12\sqrt{3}$ E) 24

Örnek. *ABC eşkenar üçgen*
B, A, D ve B, C, E doğrusal
$|AF| = |AD|$
$|CF| = |CE|$
$|BD| = 13$ br
$|BE| = 11$ br
olduğuna göre DAF ile FCE üçgenlerinin alanlarının toplamı kaç br^2 *dir?*



A) $8\sqrt{3}$ B) $\frac{17}{2}\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$ D) $\frac{19}{2}\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

Çözüm: Bakalım kaç birimmiş. Bu sorunun tek esprisi $|BD| + |BE|$ toplamının eşkenar üçgenin çevresini vermesidir.



Şu durumda $|BD| + |BE| = 24$ br olduğundan $|BA| = 8$ br, dolayısıyla $|AF| = |AD| = 5$ br ve $|CF| = |CE| = 3$ br olur.

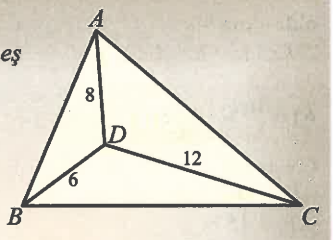
$$|DAF| = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 120^\circ = \frac{25}{4}\sqrt{3}$$

$$|FCE| = \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin 120^\circ = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

eşitlikleri toplanırsa cevap $\frac{17}{2}\sqrt{3}$ br^2 olarak bulunur.

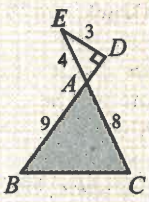
Doğru cevap: B.

3.
ABC bir üçgen
ADB, BDC, CDA açıları eş
$|DA| = 8$ br
$|DB| = 6$ br
$|DC| = 12$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ **kaç** br^2 **dir?**



A) 36 B) $36\sqrt{3}$ C) 54 **D)** $54\sqrt{3}$ E) 108

Örnek. $BD \cap CE = \{A\}$
$ED \perp DB$
$|ED| = 3$ br
$|EA| = 4$ br
$|AC| = 8$ br
$|AB| = 9$ br
olduğuna göre $|ABC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 72 B) 54 C) 36 D) 32 E) 27

Çözüm: ABC üçgeninde iki kenar uzunluğu bilindiğinden bu iki kenarın belirlediği açının yani CAB açısının ölçüsünün sinüsü lazım bize. $m(CAB) = m(EAD)$ olduğundan EAB açısının sinüsü istediğimizi verir.

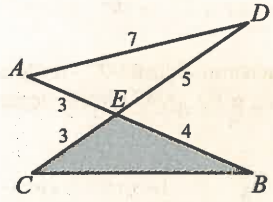
$\sin(CAB) = \sin(EAD) = \frac{3}{4}$ olduğundan

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot \frac{3}{4} = 27 \text{ br}^2$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

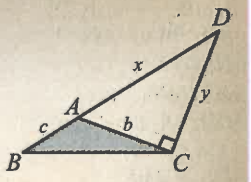
4.



$|ECB|$ kaç br^2 dir?

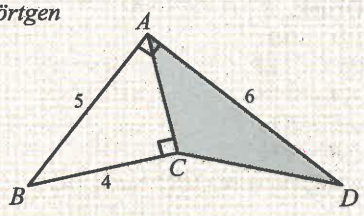
$3\sqrt{3}$

5.
BCD bir üçgen
$DC \perp CA$
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|AD| = x$ br
$|CD| = y$ br
$|ABC| = 4$ br^2
olup $b\cdot c\cdot x\cdot y = 200$ br^4 **olduğuna göre** x **kaçtır?**



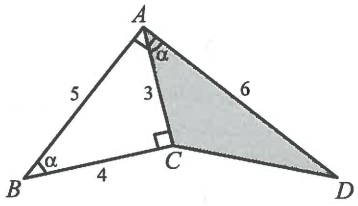
A) 4 **B)** 5 C) 6 D) 7 E) 8

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$
$BC \perp CA$
$|BC| = 4$ br
$|BA| = 5$ br
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre
$|DAC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 7,2 B) 5,4 C) 3,6 D) 3,2 E) 2,7

Çözüm: Pisagor Teoremi'nden $|AC| = 3$ br olduğunu biliyoruz. $m(CAD) = \alpha$ diyelim. Şu durumda CAD üçgeninin iki kenar uzunluğu bilindiğinden $\sin\alpha$ değerinin bilinmesi yeter.



Dikkat edilecek olursa CAD açısının ölçüsü $90° - \alpha$ olduğundan ABC açısının ölçüsü de α'dır. ABC bir dik üçgen olduğundan

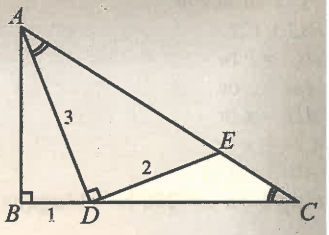
$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

bulunur. Buradan da cevaba kolaylıkla gidilir:

$$|DAC| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{3}{5} = \frac{54}{10} = 5{,}4 \text{ br}^2.$$

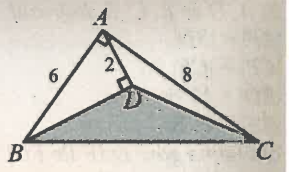
Doğru cevap: B.

6.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$AD \perp DE$
$|BD| = 1$ br
$|AD| = 3$ br
$|DE| = 2$ br
$m(CAD) = m(DCA)$
olduğuna göre
$|EDC|$ kaç br^2 dir?



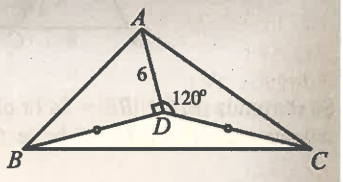
A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

7.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp DB$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 8$ br
$|AD| = 2$ br
olduğuna göre $|BDC|$ kaç br^2 dir?



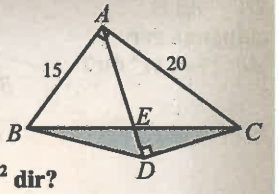
A) $54-6\sqrt{2}$ B) $54-8\sqrt{2}$ C) $24-8\sqrt{2}$
D) $24-4\sqrt{2}$ E) $\frac{64}{3}-4\sqrt{2}$

8.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$|DB| = |DC|$
$BD \perp DA$
$m(ADC) = 120°$
$|AD| = 6$ br
$|ABDC| = 30+15\sqrt{3}$ br^2
olduğuna göre $|DBC|$ kaç br^2 dir?



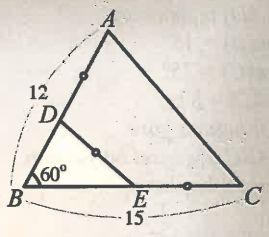
A) 18 B) 20 C) 24 **D) 25** E) 30

9. [Birey]
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp DC$
$|AB| = 15$ br
$|AC| = 20$ br
$|ABD| = |ADC|$
olduğuna göre $|BDC|$ kaç br^2 dir?



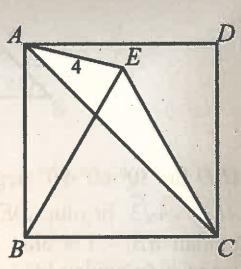
A) 42 B) 40 C) 38 D) 36 E) 32

10.
$|ABC|$ bir üçgen
$m(B) = 60°$
$|AD| = |DE| = |EC|$
$|AB| = 12$ br
$|BC| = 15$ br
olduğuna göre *DBE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



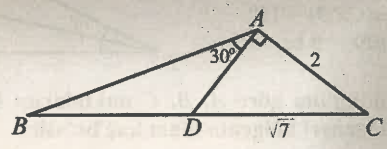
A) $5\sqrt{3}$ B) 10 C) $10\sqrt{2}$ **D)** $10\sqrt{3}$ E) 15

11.
$|ABCD|$ bir kare
$|EBC|$ bir eşkenar üçgen
$|AE| = 4$ br
olduğuna göre
$|EAC|$ kaç br^2 dir?



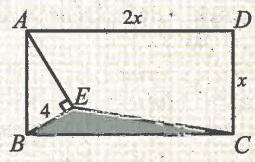
A) $4+4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$
C) $4+4\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$
E) $4+4\sqrt{6}$

12.
$|ABC|$ bir üçgen
$CA \perp AD$
$m(DAB) = 30°$
$|DC| = \sqrt{7}$ br
$|CA| = 2$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

Örnek. *$|ABCD|$ bir dikdörtgen*
$|BEA|$ bir dik üçgen
$|AD| = 2\cdot|DC|$
$|BE| = 4$ br
olduğuna göre $|BEC|$ üçgensel bölgesinin alanı kaçtır?



A) 32 B) 16 C) 8 D) 4 E) 2

Çözüm: Taralı alanı bulmak için $\sin(EBC)$ lazım.

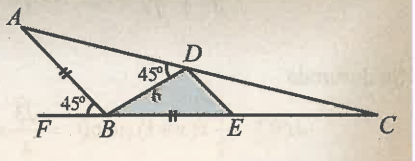
$$\sin(EAB) = \sin(EBC) = \frac{4}{x},$$

o halde

$$|EBC| = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 2x \cdot \frac{4}{x} = 16.$$

Doğru cevap: B.

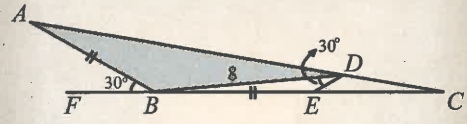
13.
$|ABC|$ bir üçgen
$m(ADB) = 45°$
$m(ABF) = 45°$
$|AB| = |BE|$
$|BD| = 6$ br



olduğuna göre taralı *BED* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 9 D) 12 E) $9\sqrt{2}$

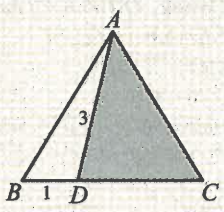
14.
$|ABC|$ bir üçgen
F, B, E, C doğrusal
$m(ABF) = m(BDE) = 30°$



$|AB| = |BE|$ ve $|BD| = 8$ br ise $|ABD|$ kaç br^2 dir?

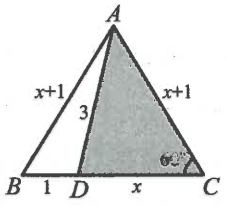
A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

Örnek. *ABC eşkenar üçgen*
$D \in [BC]$
$|BD| = 1$ *birim*
$|AD| = 3$ *birim*
olduğuna göre ADC üçgensel bölgesinin alanı kaç birimkaredir?



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 3 E) 4

Çözüm: $|DC| = x$ br olsun dersek $|AC| = x + 1$ br olur.



Şu durumda

$$|ADC| = \frac{1}{2}x(x+1)\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}x(x+1)$$

olacağından, $x(x + 1)$ çarpımının bulunması bizi sonuca götürecektir. Eşkenar üçgen de bir ikizkenar olduğundan ikizkenarlar için bulduğumuz Stewart formülünü kullanacağız.

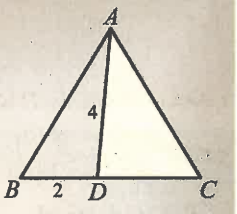
$$3^2 = (x+1)^2 - 1 \cdot x$$

eşitliğinden $x(x + 1) = 8$, buradan da cevap $2\sqrt{3}$ bulunur.

Doğru cevap: C.

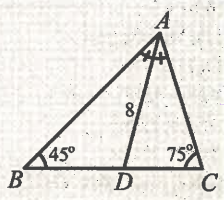
15.
ABC eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$|BD| = 2$ birim
$|AD| = 4$ birim

olduğuna göre
$|ADC|$ kaç birimkaredir?



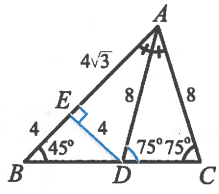
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] iç açıortay
$m(B) = 45^\circ$
$m(C) = 75^\circ$
$|AD| = 8$ br
olduğuna göre
ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?



A) $24+8\sqrt{3}$ B) $12+8\sqrt{3}$ C) $24+6\sqrt{3}$
D) $24+4\sqrt{3}$ E) $12+4\sqrt{3}$

Çözüm: *ABC* üçgeninde *A* açısının ölçüsü 60° olduğundan $|AB|$ ve $|AC|$ değerlerinin bilinmesi soruyu çözdürecektir. Bu amaçla, *D*'den *AB*'ye bir dikme indirelim. Dikme ayağına da *E* diyelim.

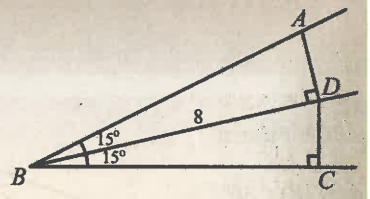


AED bir 30°-60°-90° üçgeni olduğundan $|DE| = 4$ br ve $|AE| = 4\sqrt{3}$ br olur. *DEB* bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|EB| = 4$ br olur. Diğer yandan *CAD* bir ikizkenar üçgen olduğundan $|AC| = 8$ br dir. Şimdi alanı hesaplayabiliriz:

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{3}+4)\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 24+8\sqrt{3} \text{ br}^2.$$

Doğru cevap: A.

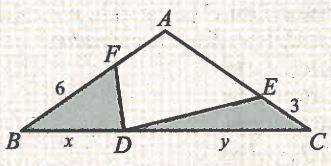
16.
CAB bir açı
[BD iç açıortay
$AD \perp BD$
$DC \perp BC$
$m(CBD) = 15^\circ$
$|BD| = 8$ br



olduğuna göre *A*, *B*, *C* noktalarını köşe kabul eden üçgensel bölgenin alanı kaç br² dir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|FB| = 6$ br
$|EC| = 3$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
$|AE| = |AF| + 3$
$|FBD| = |EDC|$



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

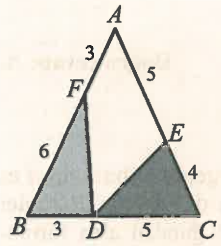
Çözüm: $|AE| = |AF| + 3$ olması $|AB| = |AC| = 9$ br olması demektir. Bu da üçgeni ikizkenar yapar. Üçgen ikizkenar verildiğinden $m(B) = m(C)$'dir. O halde $|FBD| = |EDC|$ demek $6x = 3y$ demek olur. Buradan

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

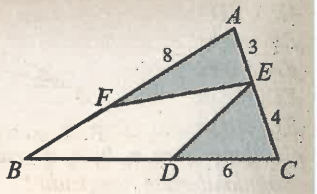
17.



$|FBD| : |EDC|$ oranı kaçtır?

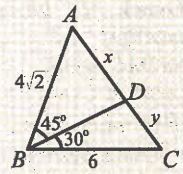
9 : 10

18.
ABC bir üçgen
$|AFE| = |DCE|$
$|AF| = 8$ br
$|AE| = 3$ br
$|EC| = 4$ br
$|DC| = 6$ br
Çevre$(ABC) = 31$ br
olduğuna göre $|BD|$ kaç br dir?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABD) = 45°$
$m(CBD) = 30°$
$|AB| = 4\sqrt{2}$ br
$|BC| = 6$ br
$|AD| = x$ br
$|DC| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*

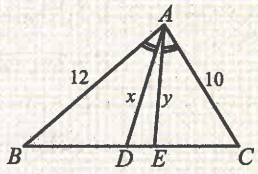
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Sorulanı nerden bulabileceğimizi bir düşünelim bakalım. $\frac{x}{y}$ oranını $\frac{|ABD|}{|DBC|}$ oranı verir. Her iki üçgende de sinüslü alan formülünü tatbik edersek,

$$\frac{|ABD|}{|DBC|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot|BD|\cdot\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot|BD|\cdot\sin 30^\circ} = \frac{4}{3}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BAD) = m(EAC)$
$|AB| = 12$ br
$|AC| = 10$ br
$5\cdot|BE| = 6\cdot|DC|$



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) 2

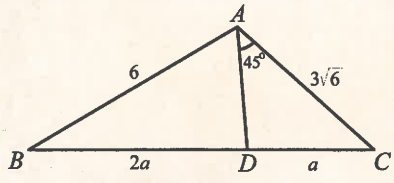
Çözüm: *BAE* ve *DAC* açılarının eşit olacağına dikkat ediniz. $\frac{|BE|}{|DC|} = \frac{|BAE|}{|DAC|}$ olduğuna da.

$$\frac{6}{5} = \frac{12y}{10x}$$

eşitliğinden $x = y$ yani $\frac{x}{y} = 1$ olur.

Doğru cevap: A.

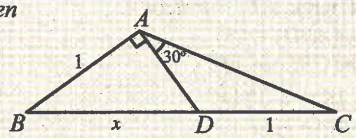
19.



$m(BAD)$ kaç derecedir?

60

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABD) = 30°$
$m(DAB) = 90°$
$|AB| = |DC| = 1$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) 2

Çözüm: $|CA| = y$ br olsun.

$$\frac{|ADC|}{|ABD|} = \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}\cdot y\cdot|AD|\cdot\sin 30°}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot|AD|\cdot\sin 90°}$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $x\cdot y = 2$ bulunur. O halde y yerine $\frac{2}{x}$ yazabiliriz. Gerisini Stewart teoremi halledilecek:

$$|AD|^2 = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2\cdot x + 1^2\cdot 1}{x+1} - x\cdot 1$$

$$x^2 - 1 = \frac{\frac{4}{x}}{x+1} - x$$

$$x^2 + x - 1 = \frac{4}{x(x+1)}$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

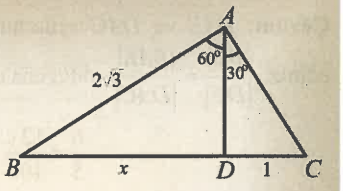
$$x^3(x+2) - 2(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^3 - 2) = 0$$

olduğundan $x^3 = 2$ yani $x = \sqrt[3]{2}$ bulunur.

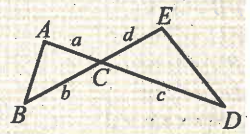
Doğru cevap: D.

20.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$m(BAD) = 60°$
$m(DAC) = 30°$
$|AB| = 2\sqrt{3}$ br
$|DC| = 1$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{11}$

Soru Tipi. *ABC ve CDE birer üçgen*
A, C, D ve B, C, E doğrudaş
$|AC| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|CE| = d$ br



olduğuna göre $\frac{|ABC|}{|CDE|}$ *oranının a, b, c, d cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{ab}{cd}$ B) $\frac{ac}{bd}$ C) $\frac{ad}{bc}$ D) $\frac{a+b}{c+d}$ E) $\frac{a+c}{b+d}$

Çözümü: *ABC* ve *CDE* üçgenlerinde *C* açısı ortak olduğundan alanları bu açıyı kullanarak yazacağız.

$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$$

ve

$$|DEC| = \frac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot\sin C$$

olduğundan bu iki eşitlik birbirine bölünürse

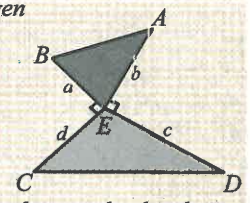
$$\frac{|ABC|}{|CDE|} = \frac{ab}{cd}$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

İki üçgenin alanını kıyaslarken, üçgenlerin birer açısı eş olacağı gibi birbirlerinin bütünleri de olabilir. Bütünler açıların sinüsleri birbirine eşit olduğundan alan formülündeki sinüslü ifadeleri sadeleştirebilirsiniz.

Soru Tipi. *ABE ve CDE bir üçgen*
$BE \perp EC$
$AE \perp ED$
$|EB| = a$ br
$|EA| = b$ br
$|ED| = c$ br
$|EC| = d$ br



olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a\cdot b = c\cdot d$ B) $a\cdot c = b\cdot d$ C) $a + c = b + d$
D) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ E) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

Çözümü: *AEB* ve *DEC* açılarının bütünler olduğuna, dolayısıyla sinüslerinin eşit olduğuna dikkat ediniz.

$$\sin(AEB) = \sin(DEC)$$

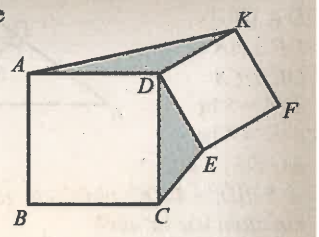
Şimdi alanları yazabiliriz:

$$\frac{|AEB|}{|DEC|} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin(AEB)}{\frac{1}{2}cd\sin(DEC)} = \frac{ab}{cd} = 1$$

olduğundan cevabımız $a\cdot b = c\cdot d$ olmalıdır.

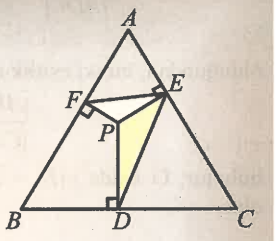
Doğru cevap: A.

21.
$ABCD$ ve $DEFK$ birer kare
$|AB|$ verilmemiş
$|KF|$ verilmemiş
$m(EDC)$ verilmemiş
olduğuna göre
$\frac{|ADK|}{|EDC|}$ **oranı kaçtır?**



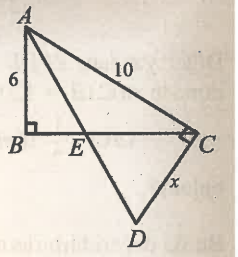
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{2}-1$

22.
ABC bir eşkenar üçgen
P iç bölgede bir nokta
$PD \perp BC$
$PE \perp CA$
$PF \perp AB$
$|PD| = 3\cdot|PF|$
olduğuna göre
$\frac{|EPD|}{|EPF|}$ **oranı kaçtır?**



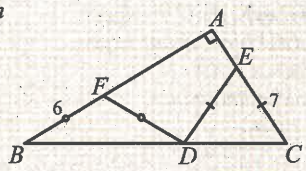
A) $\sqrt{3}$ **B) 3** C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) 9

23.
ABC ve ADC birer dik üçgen
$AB \perp BC$
$AC \perp CD$
$|BA| = 6$ br
$|AC| = 10$ br
$|CD| = x$ br
$\frac{|ABE|}{|EDC|} = \frac{9}{10}$
olduğuna göre x kaçtır?



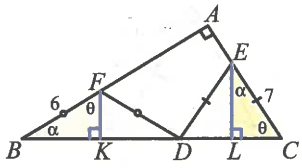
A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

Örnek. ABC *bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$|BF| = |FD| = 6$ br
$|DE| = |EC| = 7$ br
olduğuna göre
$\frac{|AFE|}{|EDC|}$ *oranı kaçtır?*



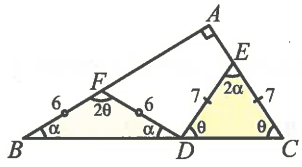
A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{25}{36}$ E) $\frac{49}{36}$

Çözüm 1: F ve D köşelerinden AC'ye inilen dikme ayakları sırasıyla K ve L olsun.



Açılar yerlerine yazılırsa AKF ile DLC üçgenlerinin benzerliği görülür. Alan oranı benzerlik oranının karesi olduğundan cevap $\frac{49}{36}$ olmalıdır.

Çözüm 2: AFE ve EDC açıları bütünler olduğundan sinüsleri eşittir.



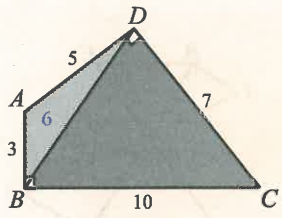
O halde bu üçgenlerin alanlarının oranını, açıların yanlarındaki kenarların çarpımının oranı verir. Şu durumda

$$\frac{|AFE|}{|EDC|} = \frac{7\cdot 7}{6\cdot 6} = \frac{49}{36}$$

olmalıdır.

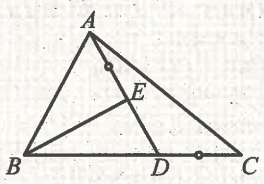
Doğru cevap: E.

24.



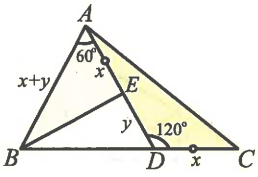
$|DBC|$ kaç br^2 dir?

Örnek. *ABC bir üçgen*
ABD bir eşkenar üçgen
$|AE| = |DC|$
olduğuna göre
$\frac{|ABE|}{|ACD|}$ *kaçtır?*



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{3}{4}$

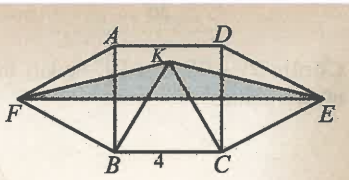
Çözüm: $m(BAE) = 60°$ ve $m(ADC) = 120°$ olduğundan sinüsleri eşittir.



Diğer yandan $|AE| = |CD|$ ve $|AB| = |AC|$ olduğundan istenilen oran 1'dir.

Doğru cevap: C.

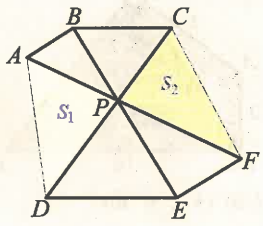
25.
ABCD bir kare
BCK, *DCE* ve *BAF* birer eşkenar üçgen
$|BC| = 4$ br



olduğuna göre
taralı *EKF* üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

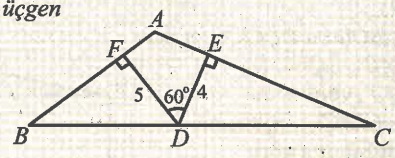
A) $8\sqrt{2}$ **B) 8** C) $4\sqrt{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{2}$

26.
AB // EF
BC // DE
$|APD| = S_1$ br²
$|CPF| = S_2$ br²
ise S_1 ile S_2 arasında geçerli bağıntı nedir?



$S_1 = S_2$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$DF \perp AB$
$DE \perp CA$
$|DF| = 5$ br
$|DE| = 4$ br
$m(FDE) = 60°$
ve $5 \cdot |BD| = 4 \cdot |DC|$ *olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç* br² *dir?*



A) $9\sqrt{3}$ B) 18 C) $18\sqrt{3}$ D) 27 E) $27\sqrt{3}$

Çözüm: $|BD| = 4a$ br dersek $|DC| = 5a$ br olur. Bu yüzden

$$\frac{|ABD|}{|ADC|} = \frac{4}{5}$$

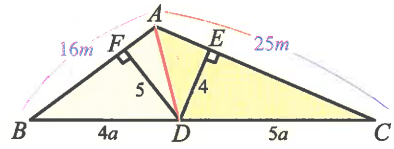
olur. Diğer yandan

$$\frac{|ABD|}{|ADC|} = \frac{\frac{|AB| \cdot 5}{2}}{\frac{|CA| \cdot 4}{2}} = \frac{5 \cdot |AB|}{4 \cdot |CA|}$$

olduğundan, bu iki eşitlik ortak çözülürse

$$\frac{|AB|}{|CA|} = \frac{16}{25}$$

bulunur. O halde $|AB| = 16m$ br dersek $|CA| = 25m$ br olur.



Şimdi iki türlü alan hesaplayıp bulduklarımızı birbirine eşitleyeceğiz.

$$|ABC| = |ABD| + |ADC|$$
$$= \frac{16m \cdot 5}{2} + \frac{25m \cdot 4}{2} = 90m$$

Diğer yandan, *AFDE* dörtgeninde iç açı ölçüleri toplamından $m(CAB) = 120°$ olduğundan

$$|ABC| = \frac{1}{2} \cdot 16m \cdot 25m \cdot \sin 120° = 100\sqrt{3}m^2$$

bulunur.

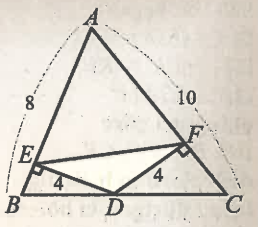
Bu iki değeri birbirlerine eşitlersek

$$100\sqrt{3}m^2 = 90m$$
$$10\sqrt{3}m = 9$$
$$m = \frac{9}{10\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

bulunur. Sorulan alan $90m$'ye eşit olduğundan cevap $27\sqrt{3}$ br² olur.

Doğru cevap: E.

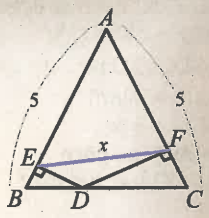
27.
ABC bir üçgen
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$|AB| = 8$ birim
$|AC| = 10$ birim
$|DE| = 4$ birim
$|DF| = 4$ birim



olduğuna göre taralı DEF üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

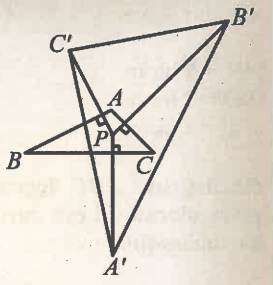
A) 6,4 B) 6,8 C) 7 **D) 7,2** E) 7,5

28.
ABC bir ikizkenar üçgen
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$|AB| = |AC| = 5$ br
$|DC| = 3 \cdot |DB|$
$|ABC| = 10$ br^2
$|EF| = x$ br
olduğuna göre x^2 kaçtır?



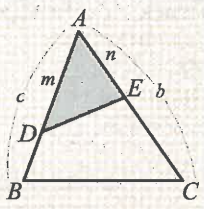
A) 14 B) 14,2 C) 14,4 D) 14,6 **E) 14,8**

29.
ABC bir üçgen
P üçgen içinde bir nokta
$PA' \perp BC$
$PB' \perp CA$
$PC' \perp AB$
$|PC'| = |AB|$
$|PA'| = |BC|$
$|PB'| = 3 \cdot |CA|$
ise $\dfrac{|A'B'C'|}{|ABC|}$ oranı kaçtır?



A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $3\sqrt{3}$ **D) 9** E) 27

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$D \in [AB]$ ve $E \in [AC]$



$|AD| = m$ br
$|AE| = n$ br
$|AB| = c$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre $\dfrac{|ADE|}{|ABC|}$ oranının m, n, b, c cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

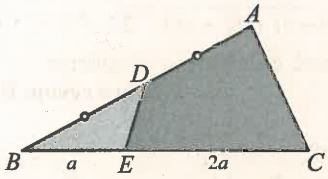
A) $\dfrac{mn}{bc}$ B) $\dfrac{mc}{nb}$ C) $\dfrac{mb}{nc}$ D) $\dfrac{m+n}{b+c}$ E) $\dfrac{m+c}{n+b}$

Çözümü: Burada da ADE ve ABC üçgenlerinde A açısının ortaklığına dikkat edeceğiz. Şimdi alanları yazalım:

$$\frac{|ADE|}{|ABC|} = \frac{\frac{1}{2}mn\sin A}{\frac{1}{2}cb\sin A} = \frac{mn}{cb}$$

Doğru cevap: A.

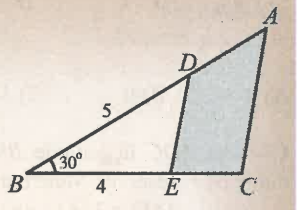
30.



$|ADEC|$, $|DBE|$'nin kaç katıdır?

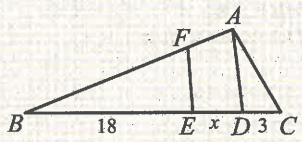
5

31.
ABC bir üçgen
$DE \,//\, AC$
$m(B) = 30°$
$|BD| = 5$ br
$|BE| = 4$ br
$3 \cdot Ç(DBE) = 2 \cdot Ç(ABC)$
olduğuna göre
$|ADEC|$ kaç br^2 dir?



A) 5 B) $\dfrac{21}{4}$ C) 6 **D)** $\dfrac{25}{4}$ E) $\dfrac{15}{2}$

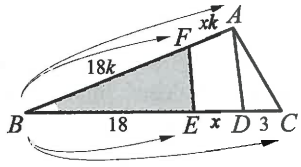
Örnek. *ABC bir üçgen*
FE // AD
$|BE| = 18$ br
$|DC| = 3$ br
$|ED| = x$ br



$|FEB| = |AFEC|$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Verilen alan eşitliği *FBE* üçgeninin alanının *ABC* üçgeninin alanının yarısı olduğu anlamına geliyor. Alanları kıyaslamak için de $|BF|$ ve $|FA|$ değerlerini bilmemiz gerekiyor.



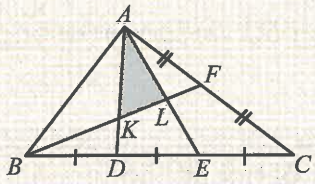
Tales Teoremi'nden $|BF| = 18k$ br dersek $|FA| = xk$ br olur. Şimdi oranlayabiliriz:

$$\frac{|FBE|}{|ABC|} = \frac{18\cdot 18k}{(21+x)\cdot(18k+xk)} = \frac{1}{2}$$

eşitliği k'ler sadeleştirilerek çözülürse $x = 6$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AF| = |FC|$
$|BD| = |DE| = |EC|$
$AD \cap BF = \{K\}$
$AE \cap BF = \{L\}$
$|ABC| = 60$ br^2
olduğuna göre
$|AKL|$ *kaç* br^2 *dir?*

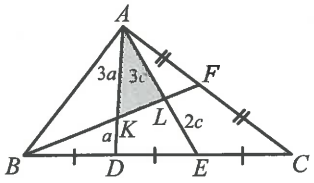


A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Çözüm: *ADC* üçgeninde *BKF* kesenine ve *AEC* üçgeninde *BLF* kesenine Menelaus Teoremi uygulanırsa

$$|AK| = 3\cdot|KD| \text{ ve } |AL| : |LE| = 3 : 2$$

bulunur.



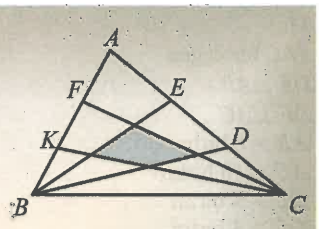
Şimdi *ADE* üçgeninin alanının *AKL* üçgeninin alanının kaç katı olduğunu bulacağız. $|ABC| = 3\cdot|AKL|$ olduğundan bulduğumuz cevabı 3'le çarpacağız.

$$|ADE| : |AKL| = 4\cdot 5 : 3\cdot 3 = 20/9$$

olduğundan $|ABC| : |AKL| = 60/9$ olur. $|ABC| = 60$ br^2 verildiğinden $|AKL| = 9$ br^2 dir.

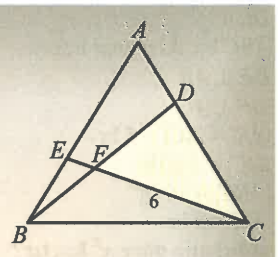
Doğru cevap: B.

32.
ABC bir üçgen
$|AE| = |ED| = |DC|$
$|AF| = |FK| = |KB|$
$|ABC| = 70$ br^2
olduğuna göre
BE, BD, CF, CK
doğrularının belirttiği
taralı dörtgensel bölgenin alanı kaç birimkaredir?



A) 6 B) 7 C) 8 **D) 9** E) 10

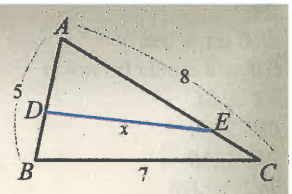
33.
ABC bir eşkenar üçgen
$BD \cap CE = \{F\}$
$|CD| = 2\cdot|DA|$
$|AE| = 2\cdot|EB|$
$|CF| = 6$ br
olduğuna göre
$|DFC|$ **kaç** br^2 **dir?**



A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 10 E) 12

34.
ABC bir üçgen

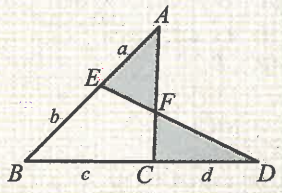
$|AB| = 5$ birim
$|BC| = 7$ birim
$|CA| = 8$ birim



DE **doğrusu** ***ABC*** **üçgenini hem alan olarak hem de çevre olarak iki eşit parçaya ayırdığına göre** $|DE| = x$ **kaç birimdir?**

A) $4\sqrt{2}$ B) 6 C) $2\sqrt{10}$ D) $2\sqrt{11}$ E) $3\sqrt{5}$

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
EBD bir üçgen
$|AE| = a$ br
$|EB| = b$ br
$|BC| = c$ br
$|CD| = d$ br
$|AEF| = |FCD|$



olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $ac = bd$ B) $ad = bc$ C) $ab = cd$
D) $b(a+b) = c(c+d)$ E) $d(a+b) = a(c+d)$

Kanıt 1: *AEF* ve *FCD* üçgenlerinin alanlarının eşitliği *ABC* ile *EBD* üçgenlerinin alanlarının eşitliği anlamına gelir. Bu üçgenlerin de *B* açılarının ortak olduğuna dikkat edelim. Bu açıyı kullanarak alanlarını yazıp birbirlerine eşitleyelim:

$$\tfrac{1}{2}c(a+b)\sin B = \tfrac{1}{2}b(c+d)\sin B$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

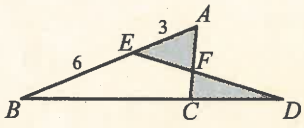
$$(a+b)c = b(c+d)$$

elde edilir. O da $ac + bc = bc + bd$ şeklinde açılarak bc'ler sadeleştirilirse $ac = bd$ bulunur.

Kanıt 2: Değerli meslektaşım Alparslan Ceran sınıftan bu teoremin kanıtını istediğinde, daha 9'uncu sınıf talebesi olan biri şöyle demiş: $|AEF| = |FCD|$ olduğuna göre $EC \,//\, AD$ dir, o halde Tales Teoremi'nden $b/a = c/d$'dir. Sizin de ağzınız açık kaldı değil mi?

Doğru cevap: A.

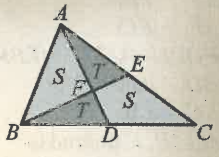
35.



Taralı alanlar eşitse $|AF| : |FC|$ oranı kaçtır?

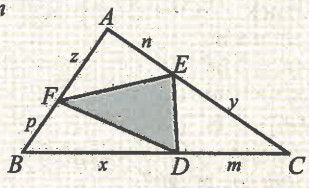
1,5

36.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|AFE| = |BDF| = T$ br^2
$|ABF| = |EFDC| = S$ br^2
olduğuna gore *S*/*T* oranı kaçtır?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
$|BD| = x$ br
$|CE| = y$ br
$|AF| = z$ br
$|DC| = m$ br
$|EA| = n$ br
$|FB| = p$ br



olduğuna göre $\dfrac{|DEF|}{|ABC|}$ *oranının x, y, z, m, n, p cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\dfrac{xm+yn+zp}{(z+p)(x+m)(n+y)}$ B) $\dfrac{xyz+mnp}{xyzmnp}$ C) $\dfrac{x+y+z}{m+n+p}$
D) $\dfrac{xyz(x+y+z)}{mnp(m+n+p)}$ E) $\dfrac{xyz+mnp}{(z+p)(x+m)(n+y)}$

Kanıt: *AFE*, *FBD* ve *EDC* üçgenlerinin *ABC* üçgeninin kaçta kaçı olduklarını bulmayı öğrenmiştik. Şimdi o değerleri bulup toplayıp 1'den çıkartarak *DEF* üçgeninin *ABC* üçgeninin kaçta kaçı olduğunu bulacağız.

$$\frac{|AFE|}{|ABC|} = \frac{zn}{(z+p)(n+y)}$$

$$\frac{|FBD|}{|ABC|} = \frac{xp}{(x+m)(z+p)}$$

$$\frac{|EDC|}{|ABC|} = \frac{ym}{(n+y)(x+m)}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\frac{|DEF|}{|ABC|} = 1 - \left(\frac{|AFE|}{|ABC|} + \frac{|FBD|}{|ABC|} + \frac{|EDC|}{|ABC|}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{zn}{(z+p)(n+y)} + \frac{xp}{(x+m)(z+p)} + \frac{ym}{(n+y)(x+m)}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{zn(x+m)+xp(n+y)+ym(z+p)}{(z+p)(x+m)(n+y)}\right)$$

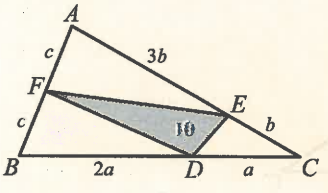
$$= \frac{(z+p)(x+m)(n+y) - zn(x+m) - xp(n+y) - ym(z+p)}{(z+p)(x+m)(n+y)}$$

$$= \frac{xyz+mnp}{(z+p)(x+m)(n+y)}$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

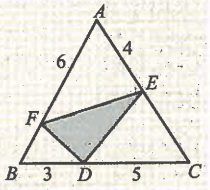
37.



Taralı alan 10 br^2 ise $|ABC|$ kaç br^2 dir?

48

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$|AF| = 6$ br
$|AE| = 4$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
olduğuna göre FDE üçgeninin alanı kaç br^2 *dir?*



A) $3\sqrt{3}$ B) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

Çözüm: Üç farklı çözüm yolu sunacağız.

Birinci yol. Eşkenar üçgenin alanından *AFE*, *FBD* ve *DCE* üçgenlerinin alanlarını çıkartacağız.

$$|ABC| = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

$$|EAF| = \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$|FBD| = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 60^\circ = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$|EDC| = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

olduğundan

$$|DEF| = 16\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

olarak bulunur.

İkinci yol. *AFE*, *FBD* ve *EDC* üçgenlerinde kosinüs teoreminden $|FE| = \sqrt{28}$ br, $|FD| = \sqrt{7}$ br ve $|DE| = \sqrt{21}$ br bulunur. Bu değerler *DEF* üçgeninde Pisagor Teoremi'ni sağladığından $m(FDE) = 90^\circ$ çıkar. O halde taralı alan $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ br^2 dir.

Üçüncü yol. Bir önceki soru tipince bulduğumuz eşitliği kullanalım.

$$\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{3\cdot 4\cdot 6 + 5\cdot 4\cdot 2}{8\cdot 8\cdot 8} = \frac{7}{32}$$

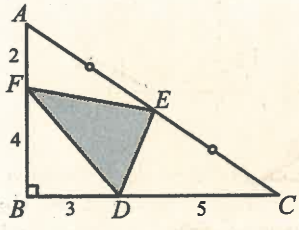
olduğundan

$$|DEF| = \frac{7}{32}\cdot|ABC| = \frac{7}{32}\cdot 16\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3} \text{ br}^2$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

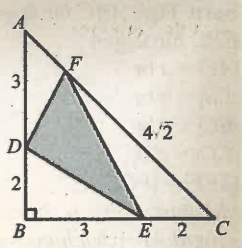
38.



$|DEF|$ kaç br^2 dir?

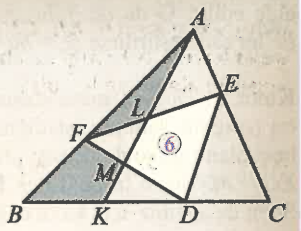
6,5

39.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$D \in [AB]$
$E \in [BC]$
$F \in [CA]$
$|DB| = |EC| = 2$ br
$|AD| = |BE| = 3$ br
$|CF| = 4\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|DEF|$ kaç br^2 dir?



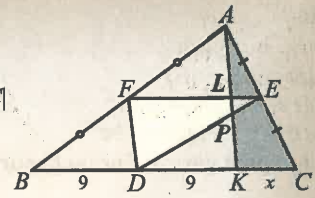
A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

40.
ABC ve *EFP* birer üçgen
$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = 2$
$|BK| = |KD| = |DC|$
$|PETL| = 6$ br^2
olduğuna göre taralı bölgelerin alanları toplamı kaç br^2 dir?



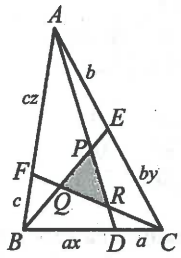
A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

41.
ABC bir üçgen
$|AF| = |FB|$
$|AE| = |EC|$
$|FDPL| = |ALE| + |EPKC|$
$|BD| = |DK| = 9$ br
$|KC| = x$ br
A, L, P, K doğrudaş
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Routh Teoremi. Alanı Δ olan bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları, köşelerden çıkan kesenlerle $x{:}1$, $y{:}1$, $z{:}1$ oranında bölünüyorsa ortada oluşan PQR üçgensel bölgesinin alanı (S)

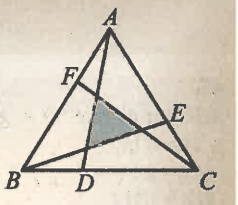


$$\frac{S}{\Delta}=\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}$$

formülü ile bulunabilir.

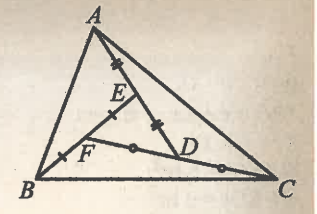
Not: $x=y=z=n$ ise $\frac{S}{\Delta}=\frac{(n-1)^2}{n^2+n+1}$ olur.

42.
ABC eşkenar üçgen
$|DC|=2\cdot|BD|$
$|EA|=2\cdot|CE|$
$|FB|=2\cdot|AF|$
olduğuna göre AD, BE, CF kesenlerinin belirttiği taralı üçgenin alanı kaç br^2 dir?



A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{11}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{19}$

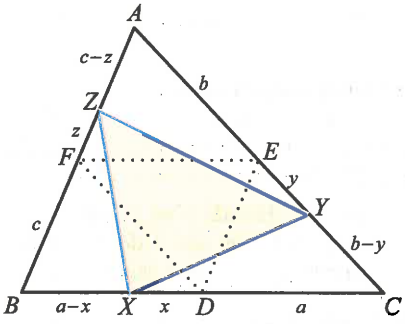
43.
ABC bir üçgen
$|AE|=|ED|$
$|BF|=|FE|$
$|CD|=|DF|$
$|DEF|=4$ br^2
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

Örnek. *Bir ABC üçgenin BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla X, Y, Z noktaları alınıyor. AZY, BXZ, CYX ve XYZ üçgenleri denk ise XYZ'nin orta üçgen olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: ABC üçgeninin kenar uzunlukları $2a$, $2b$, $2c$ olsun. Orta üçgeni de DEF olsun.



AFE ile AZY üçgenleri denk olduğundan

$$(c-z)y=bz$$

olur. BDF ile BXZ üçgenleri de denk olduğundan

$$(a-x)z=cx$$

olur. Eğer bu şartlar altında DEF üçgeninden başka bu şartları sağlayan üçgen varsa (ki XYZ üçgeni buna adaydır); DCE ile CYX denk olmaları gerekir ki

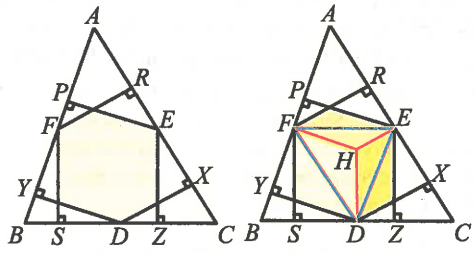
$$(b-y)x=ay$$

sonucuna ulaşmalıyız. Bakalım ulaşabilecek miyiz? Bulduğumuz ilk iki denklemden z'leri çekip eşitlersek;

$$(b+2y)x=ay$$

çıkar. Halbuki $(b-y)x=ay$ çıkmalıydı. Buradan $y=0$ olduğunu anlar ve aynı işlemleri diğer köşelerden başlayarak yaparsak $x=0$ ve $z=0$ eşitliklerine ulaşırız. Demek ki bu özellikleri orta üçgenden başka sağlayan üçgen yokmuş!

Örnek. *Herhangi dar açılı bir ABC üçgeninin kenar orta noktalarından yan kenarlara inilen dikmelerle oluşan altıgenin alanının ABC üçgeninin alanının yarısı olduğunu gösteriniz.*

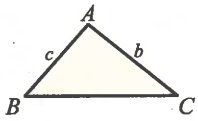


Çözüm: F, E, D noktalarını birbirleri ile birleştirirsek AFE, FBD, EDC ve DEF üçgenleri eş olurlar. Taralı altıgenin alanından DEF üçgeninin alanını çıkartıldığında geriye kalan üç küçük üçgenin toplamının bir DEF üçgeninin daha alanına eşit olduğuna dikkat ediniz. O halde taralı alan tüm üçgeninin alanının yarısıdır.

Verdiğimiz bu formül alanla ilgili eşitsizlikler yazmaya da birebirdir. Örneğin, bu formül iki kenarının uzunluğu bilinen bir üçgenin alanının en çok kaç olabileceğini en kolay bulmanın yoludur. Bakalım:

Teorem. *İki kenarının uzunluğu verilen bir üçgensel bölgenin alanı en çok bu iki kenar uzunluğunun çarpımının yarısı olabilir.*

Kanıt: Bilinen kenar uzunlukları $|AB| = c$ br ve $|AC| = b$ br olsun.

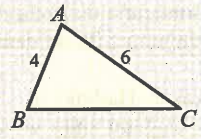


$$|ABC| = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$$

olduğunu öğrendik. Burada b ve c *değerleri* sabit olduğundan tek değişken olan sin A değeri en büyük olduğunda alan en büyük olur. sin A değeri de en çok 1 olabilir. O halde $\max\{|ABC|\} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c$.

Sonuç olarak şu bilgiye eriştik: İki kenar uzunluğu verilen bir üçgen, en büyük alana bu iki kenar dik kesiştiğinde sahip olur. Üçüncü kenar ne kadar büyük olursa değil!

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 6$ br



$60° < m(A) < 150°$

olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanının tam sayı olarak alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Çözüm: Alanın ne zaman en büyük değerine ulaşacağını öğrendik. $m(A) = 90°$ olduğundaymış. Peki acaba bu üçgenin alanının olabildiğince küçük olmasını istiyorsak $m(A)$ değerini 60° ye mi yakın alacağız yoksa 150° ye mi? Yoksa çok daha değişik bir ölçüye mi? Bu sorunun cevabı kimin sinüsü daha küçük ise o ölçüye daha yakın olmalıdır. 150° lik bir ölçünün sinüsü 30° lik bir ölçünün sinüsüyle aynı davranacağından 60° nin sinüsüne nazaran daha küçük olur. Şimdi diyeceksiniz ki $m(A)$ ifadesi 150° değerini alamıyor ki. Haklısınız, ama biz öyleymiş gibi yapıp sınır değerini bulacak ve ona en yakın tam sayıyı alarak işimizi göreceğiz.

$|ABC| \le \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 90° = 12$ br^2 olduğundan,

$$\max\{|ABC|\} = 12 \text{ br}^2,$$

$|ABC| > \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 150° = 6$ br^2 olduğundan,

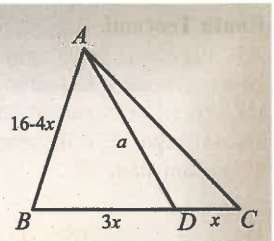
$$\min\{|ABC|\} = 7 \text{ br}^2$$

olur. O halde cevap 7 + 12 = 19 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

44.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$

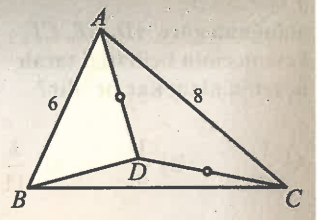
$|DC| = x$ br
$|BD| = 3x$ br
$|AB| = 16 - 4x$ br



olduğuna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alanı olabilecek en büyük değerini aldığında $|AD| = a$ kaç br olur?

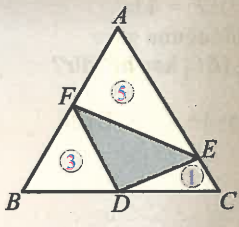
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

45.
ABC bir üçgen
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 8$ br
$|AD| = |DC|$
$|ABC|$ en büyük değerini aldığında $|ABD|$ kaç br^2 olur?



A) 9 **B) 12** C) 15 D) 18 E) 24

46.
ABC bir eşkenar üçgen
$|BD| = |CD|$
$A(AFE) = 5$ br^2
$A(FBD) = 3$ br^2
$A(EDC) = 1$ br^2
olduğuna göre taranmış *DEF* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Heron Formülü

Milattan üç yüzyıl önce Heron, ünlü eseri *Metrica*'da Önerme 1.8 olarak üç kenar uzunluğu bilinen üçgenlerin alanlarını hesaplayan bir formül vermiş, altına kanıtını da yazmış. Olacak ya, tüm yazdıkları kaybolmuş. Muhtemelen Büyük İskenderiye yangını buna sebep olmuştur. 1894'te ufak bir parçasının, 1896'da da tamamının bulunmasına kadar Heron'un buldukları kimse tarafından bilinmediğinden bu teorem Arşimed'e ithaf edilmiş hep. Tabi sonra Heron hak ettiği üne kavuşmuş.

Şu sıralar 'Heron formülü' diye yaygınca bilinen formülü şu:

Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve yarımçevresi u br olan bir üçgensel bölgenin alanı

$$\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

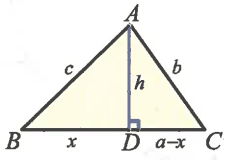
birimkaredir.

Sonraları birçok trigonometrik ve geometrik kanıtı verilen bu teoreme, Heron'un verdiği cebirsel kanıtı vereceğiz. Kanıt, hepimizin ilkokuldan bildiği

tabançarpıyükseklikbölüiki

formülüne dayanıyor:

Kenar uzunlukları a br, b br, c br olan bir ABC üçgeni çizelim. Alanını Δ ile gösterelim. A köşesinden BC'ye inilen yükseklik ayağı D olsun.



ADB ve ADC üçgenlerinde Pisagor teoremlerinden,

$$(a-x)^2 + h^2 = b^2 \text{ ve } x^2 + h^2 = c^2$$

olduğu görülüp, her iki eşitlikten h^2'ler çekilip eşitlenirse,

$$\begin{aligned}(a-x)^2 - x^2 &= b^2 - c^2\\ a^2 - 2ax &= b^2 - c^2\\ 2ax &= a^2 - b^2 + c^2\\ x &= (a^2 - b^2 + c^2)/2a\end{aligned}$$

çıkar. Bulduğumuz bu x değerini ikinci Öklit eşitliğinde yerine koyalım:

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2 + c^2)^2/4a^2 + h^2 &= c^2\\ h^2 &= c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2/4a^2\\ 4a^2h^2 &= 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2\\ 4a^2h^2 &= (2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 + b^2 - c^2)\\ 4a^2h^2 &= ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)\\ 4a^2h^2 &= (a + c + b)(a + c - b)(b - a + c)(b + a - c)\\ 4a^2h^2 &= 2u(2u - 2b)(2u - 2a)(2u - 2c)\\ 4a^2h^2 &= 16u(u-a)(u-b)(u-c)\\ a^2h^2/4 &= u(u-a)(u-b)(u-c)\\ (ah/2)^2 &= u(u-a)(u-b)(u-c)\\ \Delta^2 &= u(u-a)(u-b)(u-c)\end{aligned}$$

$$\Delta = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

Bir de trigonometri kullanarak kanıtlayalım:

Trigonometrik Kanıt. Kosinüs Teoremi'nden

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

eşitliğinden $\sin A$'yı bulalım.

$$\sin A = \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{2bc}$$

çıkar. Bulduğumuz bu değeri

$$\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$$

formülünde yerine yazalım. Sadeleştirmeler yapılırsa

$$|ABC| = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

elde edilir.

Geometrik Kanıt. Üçgenin dış teğet çemberlerini anlattığımız başlıkta, bu teoremin harikulade iki geometrik kanıtını verdim. İç ve dış teğet çemberlerle ilgili az da olsa bilgi sahibi olan sabırsız öğrenciler, şimdiden o kanıtları inceleyebilirler. Bilmeyen sabretsin, bir yere kaçmazlar ☺

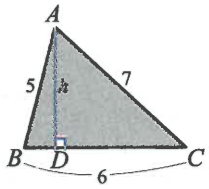
Örnek.

$|AB| = 5$ br
$|BC| = 6$ br
$|CA| = 7$ br

olan ABC üçgeninin ortanca yüksekliğinin uzunluğu kaç br *dir?*

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{6}$ E) 5

Çözüm 1: Önce Heron formülünden alanı bulalım. Sonra yüksekliği bulmak kolay.



Çevre = 18 br olduğundan $u = 9$'dur. O halde

$$|ABC| = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \text{ br}^2$$

olduğunu not edelim.

Ortanca yükseklik, ortanca kenara inendir. Boyuna h br dersek $6 \cdot h/2 = 6\sqrt{6}$ olduğundan $h = 2\sqrt{6}$ olarak bulunur.

Çözüm 2: $\sin B = h/5$ olduğu görülmektedir. ABC üçgeninde kosinüs teoreminden yani

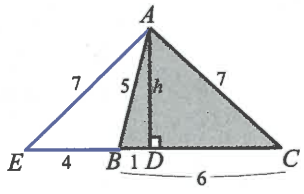
$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos B$$

eşitliğinden $\cos B$ bulunursa

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

eşitliği yardımıyla h bulunabilir.

Çözüm 3: Aslına bakarsanız en şık çözüm budur, ama dersimiz Heron formülü olduğundan bunu başta vermedik. Şöyle yapıyoruz:



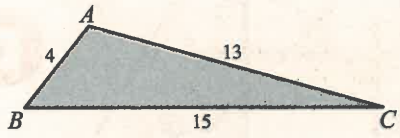
[CB üzerindeki bir E noktası için CAE ikizkenar üçgenini oluşturuyoruz. İkizkenar Stewart formülünden yani

$$5^2 = 7^2 - 6 \cdot |EB|$$

eşitliğinden $|EB| = 4$ br bulunur. İkizkenar üçgenlerde tepeden indirilen yükseklik tabanı iki eş parçaya böleceğinden $|BD| = 1$ br olur. ADB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $h = 2\sqrt{6}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

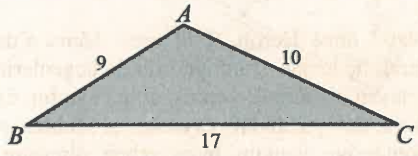
1.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

24

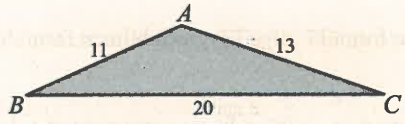
2.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

36

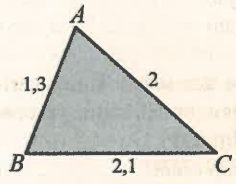
3.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

66

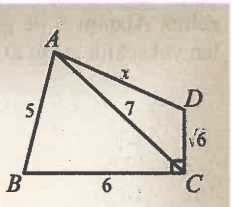
4.



$|ABC|$ kaç br^2 dir?

1,26

5.
$ABCD$ bir dörtgen
$BC \perp CD$
$|AB| = 5$ birim
$|BC| = 6$ birim
$|CA| = 7$ birim
$|CD| = \sqrt{6}$ birim
$|AD| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{19}$ C) 5 D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{31}$

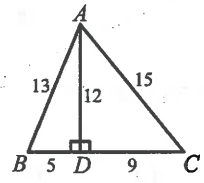
Örnek.

$|AB| = 13$ br
$|BC| = 14$ br
$|CA| = 15$ br

olan ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D ise $|BD|$ *kaç* br *dir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Yine önce Heron formülünden alanı bulalım. Sonra sıra yüksekliğe gelir.



Çevre = 42 br olduğundan $u = 21$'dir.

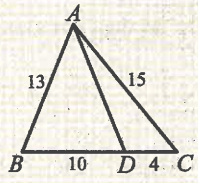
$$|ABC| = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84 \text{ br}^2$$

olur. Aynı alanı $14 \cdot h/2 = 7h$'ye eşitlersek $h = 12$ bulunur. ADB üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|BD| = 5$ br olur.

Doğru cevap: E.

Soruyu çözdük, çözdük de bir şey dikkatinizi çekmiş olmalı. Çekmediyse ben uyarayım. Üçgenin üç kenar uzunluğu ardışık olmalarının yanı sıra birer tam sayı, alanı da tam sayı, yüksekliği de tam sayı hatta yüksekliğin kenarları böldüğü parçalar da tam sayı. Birazdan göreceğimiz üzere iç teğet çemberinin yarıçapı bile tam sayı. ABD ve ADC birer özel üçgen, vs... İşte birkaçını verdiğimiz bu özelliklerden dolayı 13-14-15 üçgenine **Mükemmel Üçgen** denir. Alanının 84 br^2 olduğunu unutmamaya çalışın.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|AB| = 13$ br
$|BD| = 10$ br
$|DC| = 4$ br
$|CA| = 15$ br
olduğuna göre $|ABD|$ *kaç* br^2 *dir?*

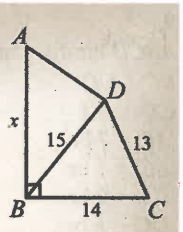


A) 42 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

Çözüm: ABC üçgeninin mükemmel üçgen olduğunu fark etmişsinizdir. O halde alanının 84 br^2 olduğunu not edelim. ABD ile ADC üçgenlerinin tabanlarının oranından alanlarının oranının 5:2 olduğunu biliyoruz. Demek ki ABD'nin alanı toplam alanın 5/7'sini teşkil etmektedir. Bu durumda cevabımız $84 \cdot 5/7 = 60$ olmalıdır.

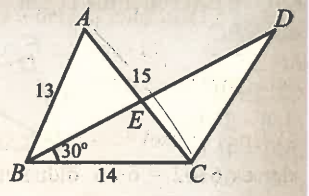
Doğru cevap: D.

6.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$|BC| = 14$ br
$|CD| = 13$ br
$|DB| = 15$ br
$|ABD| = |DBC|$
olduğuna göre $|AB| = x$ **kaç br dir?**



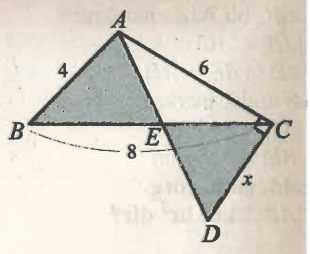
A) 52/3 B) 53/3 C) 18 D) 55/3 E) 56/3

7.
ABC bir üçgen
$|AB| = 13$ br
$|BC| = 14$ br
$|CA| = 15$ br
$m(CBD) = 30°$
$|ABE| = |DEC|$
olduğuna göre
$|BD|$ **kaç br dir?**



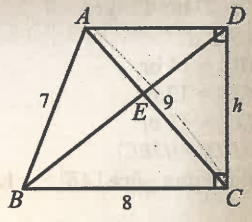
A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

8.
ABC bir üçgen
$AC \perp CD$
$AD \cap BC = \{E\}$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 8$ br
$|CA| = 6$ br
$|DC| = x$ br
$|ABE| = |CED|$
olduğuna göre x **kaçtır?**



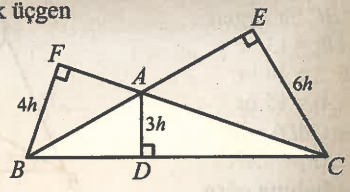
A) 4 B) $\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{10}$ E) 3

9.
$ABCD$ bir dik yamuk
$BC \perp CD$
$CD \perp DA$
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
$|CA| = 9$ br
$|DC| = h$ br
olduğuna göre h kaçtır?



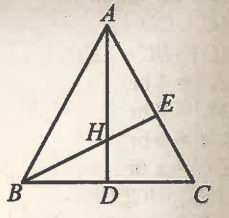
A) $4\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{10}$ D) 6 E) 5

10.
FBC ve EBC birer dik üçgen
$AD \perp BC$
$BF \perp FC$
$CE \perp EB$
$|AD| = 3h$ br
$|BF| = 4h$ br
$|CE| = 6h$ br
$|ABC| = 3\sqrt{15}$ br^2 olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 **E)** 8

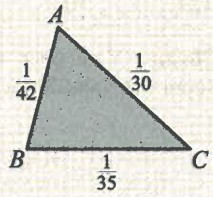
11.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$AD \cap BE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AD| = 10$ birim
$|BE| = 12$ birim
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 60 B) 64 C) 72 **D)** 75 E) 81

Bazen bir soruya bakar bakmaz, soruyu Heron formülünü kullanarak çözebileceğimizi anlarız ama verilen rakamlar hiç çözmem daha iyi dedirttirir insana. Halbuki böyle durumlarda mutlaka bir cinliğin olduğunu düşünmemiz lazım. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = \frac{1}{42}$ br
$|BC| = \frac{1}{35}$ br
$|CA| = \frac{1}{30}$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 *dir?*



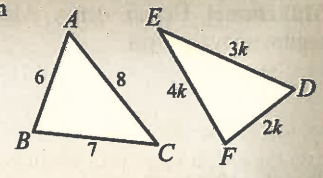
A) $\frac{\sqrt{6}}{420}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{1100}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{1260}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{1470}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{7350}$

Çözüm: Verilen değerlerin $\frac{1}{6\cdot7}$, $\frac{1}{5\cdot7}$ ve $\frac{1}{5\cdot6}$ olduğunu fark ederek tüm kenar uzunluklarını $5\cdot6\cdot7 = 210$ ile çarpıp kenar uzunluklarını tam sayı haline getirelim. Şu durumda kenar uzunlukları 5-6-7 olduğundan alan $6\sqrt{6}$ br^2 olmuştur.

Tabii ki kenarları 210 katına çıkarmak alanı 210^2 katına çıkaracağından gerçek alan değeri $\frac{6\sqrt{6}}{210^2} = \frac{\sqrt{6}}{7350}$ olmalıdır.

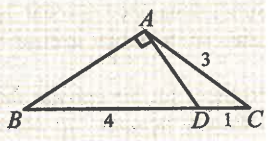
Doğru cevap: E.

12.
ABC ve DEF birer üçgen
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 7$ br
$|CA| = 8$ br
$|FD| = 2k$ br
$|DE| = 3k$ br
$|EF| = 4k$ br
Bu iki üçgenin alanları eşitse k kaçtır?



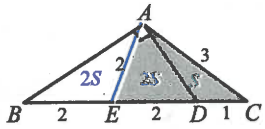
A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ **D)** $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$DA \perp AB$
$|AC| = 3$ br
$|CD| = 1$ br
$|DB| = 4$ br
olduğuna göre $|ABC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 8 B) $5\sqrt{2}$ C) 10 D) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ E) 12

Çözüm: İçinde dik üçgen bulunan bir soruda Pisagor Teoremi'ni uygulayacak kadar veri olmadığında Muhteşem Üçlü'yü deneyin dediğimi unutmadınız değil mi?



$[AE]$ kenarortayını çizersek, AEC üçgeninin üç kenar uzunluğu da biliniyor olur ki Heron formülünden veya ikizkenar olduğundan tabana dik indirerek

$$|AEC| = 2\sqrt{2} \text{ br}^2$$

bulunur. Bu sayıyı 3'e bölüp, 5'le çarparsak ABC üçgeninin alanını bulmuş oluruz, o halde cevap $10\sqrt{2}/3$ br^2 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Kenar uzunlukları* $2x$ br, $4x$ br *ve* 12 br *olan bir üçgenin alanı en çok kaç* br^2 *olabilir?*

A) 24 B) 48 C) 64 D) 72 E) 96

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz. İlk yol türev bilenler için, ikinci yol da türev bilmediğine pişman olacaklar için. ☺

Birinci yol. Üçgene ABC deyip, üç kenar uzunluğu da bilindiğinden alanı önce (x'e bağlı da olsa) bulalım. Çevre(ABC) = $6x + 12$ br olduğundan yarımçevresi yani $u = 3x + 6$ br olur. O halde

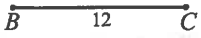
$$\begin{aligned}|ABC| &= \sqrt{(3x+6)(3x-6)(6+x)(6-x)} \\ &= \sqrt{(9x^2-36)(36-x^2)} \\ &= \sqrt{-9x^4+360x^2-36^2}\end{aligned}$$

Bu ifadeyi maksimum yapan x değerini bulmak için, birinci türevini 0'a eşitleyelim.

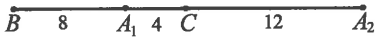
$$-36x^3 + 720x = 0$$

için $x^3 = 20x$ yani $x^2 = 20$ bulunur. Bu değeri alan formülünde yerine yazarsak maksimum alan 48 br^2 olarak bulunur.

İkinci yol. ABC üçgenini inşa etmeye çalışacağız. Boyu 12 br olan kenarı $[BC]$ seçelim, ve hemen $[BC]$'yi çizelim.



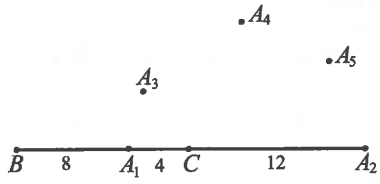
Şimdi A'nın nerede olabileceğini araştıracağız. Verilere göre $|AB| = 4x$ br ve $|AC| = 2x$ br yani A'nın B'ye uzaklığı C'ye uzaklığının 2 katı olacakmış. Acaba B'ye uzaklığı, C'ye uzaklığının 2 katı olan A noktalarının geometrik yeri nedir? Bu koşulu sağlayan A noktalarını bir bir bulmaya başlayalım bakalım, Allah büyük!



Bir kere $[BC]$ üzerinde de böyle bir nokta vardır, BC doğrusu üzerinde ama $[BC]$'nin dışında da...

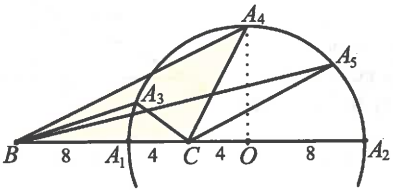
$[BC]$ üzerindekine A_1 diyelim. $|BA_1| = 8$ br ve $|A_1C| = 4$ br olacağına dikkat ediniz. $[BC]$ dışında ama BC üstünde olana da A_2 diyelim. $|CA_2| = 12$ br olacaktır.

Şimdi birkaç tane de gözkararı işaretleyelim.



Üst şekildeki A_3, A_4 ve A_5 noktalarının hepsinin B'ye uzaklığı C'ye uzaklığının 2 katı olsun. Size de bu noktalar sanki çemberselmiş gibi geldi mi?

Bu noktaların gerçekten çembersel olduğunu hatta $[A_1A_2]$'nin de bu çemberin çapı olduğunu dış açıortay notlarında kanıtladık, dileyen oraya bakabilir.



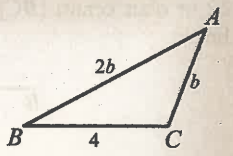
ABC üçgeninin tabanı sabit olduğundan, alanı maksimum yapmak için yüksekliği olabilecek en büyük tutmalıyız. Sizce hangi A noktası BC'ye en uzaktır? Çemberin en üst noktası olan A_4 değil mi? Çemberin yarıçapı 8 br olduğundan $|A_4O| = 4$ br dir. Bu yüzden $|ABC|$'nin alabileceği en büyük değer

$$12 \cdot 8/2 = 48$$

birimkaredir.

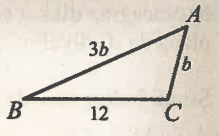
Doğru cevap: B.

13.
ABC bir üçgen
$|BC| = 4$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 2b$ br
olduğuna göre $|ABC|$ en çok kaç br^2 olabilir?



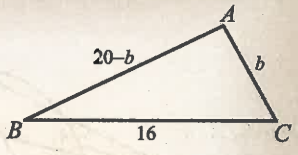
A) 4 B) $\frac{13}{3}$ C) $\frac{14}{3}$ D) 5 E) $\frac{16}{3}$

14.
ABC bir üçgen
$|BC| = 12$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 3b$ br
olduğuna göre $|ABC|$ en çok kaç br^2 olabilir?



A) 16 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

15.
ABC bir üçgen
$|BC| = 16$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 20 - b$ br
olduğuna göre $|ABC|$ en çok kaç br^2 olabilir?

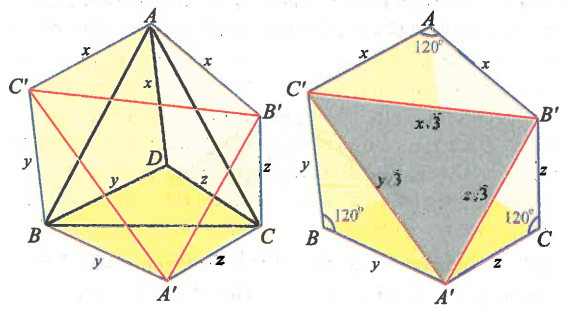


A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 64

Şimdi daha önce eşkenar üçgen konusunda yaptığımız bir çalışmanın alanlar üzerine bir uygulamasına bakacağız.

Problem şu: *Bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın üçgenin üç köşesine olan uzaklığı verilmişse alanı nasıl bulunur?*

Çözüm tekniği: ADB üçgeninin AB kenarına simetriği $AC'B$, BDC üçgeninin BC kenarına göre simetriği $BA'C$, CDA üçgeninin CA kenarına göre simetriği $CB'A$ olsun. $C'AB'$, $B'CA'$, $A'BC'$ üçgenleri tepe açısı 120° olan birer ikizkenar üçgen olur.



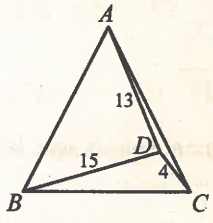
Bu ikizkenar üçgenlerin alanları sırasıyla $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, $\frac{y^2\sqrt{3}}{4}$ ve $\frac{z^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan, toplamları $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)$ olur. Diğer yandan $|A'C'| = x\sqrt{3}$ br, $|A'B'| = y\sqrt{3}$ br ve $|B'C'| = z\sqrt{3}$ br olduğundan yani $A'B'C'$ üçgeninin 3 kenarı da belli olduğundan bu üçgenin alanı da Heron formülünden bulunur. $A'B'C'$ üçgeninin alanına $|XYZ|$ diyelim. Bu değer önceki ile toplanırsa eşkenar üçgenin alanının 2 katı hesaplanmış olur. Geriye sadece bulunan değeri 2'ye bölmek kaldı. Ne dersiniz? Zekice değil mi?

Şunu bir toparlayalım bakalım:

$$|ABC| = \frac{1}{2}\left[|XYZ| + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}|XYZ| + \frac{\sqrt{3}}{8}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Bu teknikle alanı bulduktan sonra eşkenar üçgenin alan formülünden bir kenar da rahatlıkla bulunabiliyor.

16.



ABC eşkenar üçgen ise $4|ABC|$ kaç br^2 dir?

$144 + 205\sqrt{3}$

Geometri Notları

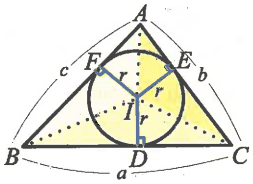
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Diğer Alan Formülleri

Şu ana kadar, üçgenin alanını hesaplamaya yarayan 3 temel formül öğrendik. Birincisi, bir kenar uzunluğu ve o kenara inen yüksekliğinin uzunluğu bilinen üçgenlerin alanlarını hesaplamaya yarıyordu. İkincisi, iki kenarının uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açısının ölçüsü bilinen üçgenlerin alanını hesaplıyordu. Üçüncüsü de üç kenarının uzunluğu bilinen üçgenlerin alanlarını hesaplamaya yarıyordu. Bu dersimizde iç teğet çemberinin, dış teğet çemberlerinin ve çevrel çemberinin yarıçapları bilinen üçgenlerin alanlarını hesaplamayı öğreneceğiz. Önce iç teğet çember yarıçapıyla ilgili formülden başlıyoruz.

Teorem. *Yarımçevresi u br ve iç teğet çemberinin yarıçapı r br olan bir üçgenin alanı $u\cdot r$ br^2 dir.*

Kanıt: Üçgenimiz her zamanki gibi ABC üçgeni olsun. İç teğet çemberini de çizelim. Merkezine de I diyelim.



İç çemberin merkezinden teğet değme noktalarına yarıçaplar çizilirse, bu yarıçaplar üçgenin kenarlarını dik keseceğinden AIB, BIC ve CIA üçgenlerinin yükseklikleri olur.

$$|AIB| = \tfrac{1}{2}cr$$
$$|BIC| = \tfrac{1}{2}ar$$
$$|CIA| = \tfrac{1}{2}br$$

Bu üç alan toplanırsa $|ABC|$ bulunur.

$$|ABC| = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \underbrace{\tfrac{1}{2}(a+b+c)}_{u}r = ur.$$

Örnek. *Mükemmel üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kaç* br *dir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Mükemmel üçgenin (13-14-15 üçgeni) alanının 84 br^2 ve u'sunun 21 br olduğunu daha önce bulmuştuk.

$$84 = 21\cdot r$$

eşitliğinden $r = 4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir kenar uzunluğu a* br *olan bir eşkenar üçgenin iç çember yarıçapı kaç* br *dir?*

A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

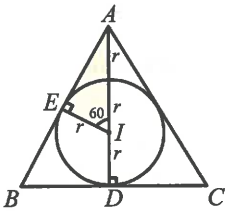
Çözüm: İki yoldan çözelim.

Birinci yol. Bir kenar uzunluğu belli olduğundan alan da u da bellidir. Bilinenleri hemen formülümüzde yerine yazalım, çıksın:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{2}\cdot r$$

eşitliğinden $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ olarak bulunur.

İkinci yol. Eşkenar üçgende iç çember merkezi diklik merkeziyle çakışık olduğundan iç çember yarıçapı bir yüksekliğin 1/3'üdür.



Dolayısıyla $r = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Kenar uzunlukları $5\sqrt{3}$ br, $6\sqrt{3}$ br ve $7\sqrt{3}$ br olan bir üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı kaç* br *dir?*

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

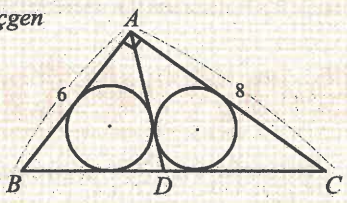
Çözüm: 5-6-7 üçgeninin alanının $6\sqrt{6}$ br^2 olduğunu daha önce bulmuştuk. Bu üçgen benzerlik olarak onun $\sqrt{3}$ katı olduğundan alanı da 3 katı yani $18\sqrt{6}$ br^2 dir. Yarım çevresi de $9\sqrt{3}$ br olduğundan

$$18\sqrt{6} = 9\sqrt{3}\cdot r$$

eşitliğinden $r = 2\sqrt{2}$ br olarak bulunur.

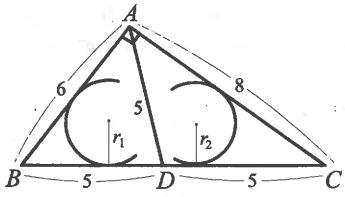
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
|AB| = 6 br
|AC| = 8 br
|BD| = |DC|
olduğuna göre
ABD üçgeninin
iç teğet çember yarıçapının ADC üçgeninin iç teğet çember yarıçapına oranı kaçtır?



A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{9}{8}$

Çözüm: Evvela, muhteşem üçlü teoreminden $|AD| = 5$ br olduğunu görelim. Şu durumda *ABD* ile *ADC* üçgenlerinin üçer kenar uzunluğu da bellidir. Dolayısıyla çevreleri bellidir. Diğer yandan $|BD| = |DC|$ olduğundan bu üçgenlerin alanları da eşittir.



Çemberlerin yarıçaplarına sırasıyla r_1 ve r_2 dersek;

$$|ABD| = |ADC|$$

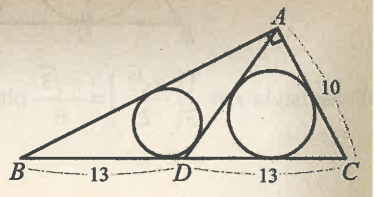
$$\left(\frac{5+5+6}{2}\right)\cdot r_1 = \left(\frac{5+5+8}{2}\right)\cdot r_2$$

$$8\cdot r_1 = 9\cdot r_2$$

eşitliğinden $\frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{8}$ olarak bulunur.

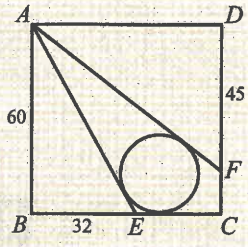
Doğru cevap: E.

1.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
|AC| = 10 br
|BD| = 13 br
|DC| = 13 br
olduğuna göre
***ABD* üçgeninin iç teğet çember yarıçapının *ADC* üçgeninin iç teğet çember yarıçapına oranı kaçtır?**



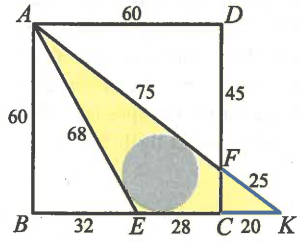
A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{18}{24}$ **D)** $\frac{18}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

Örnek. *ABCD bir kare*
|AB| = 60 br
|BE| = 32 br
|DF| = 45 br
olduğuna göre AF, AE ve EC doğrularına teğet olan şekildeki çemberin yarıçapı kaç br dir?



A) 12 B) $\frac{37}{3}$ C) $\frac{38}{3}$ D) 13 E) $\frac{40}{3}$

Çözüm: *BC* ve *AF* doğrularının kesişim noktası *K* olsun. Bu durumda bahsi geçen çember, *AEK* üçgeninin iç teğet çemberidir. Çözümü buna göre düşüneceğiz.



Evvela, *ADF* üçgeninin 3-4-5 üçgeninin katı, *ABE* üçgeninin de 8-15-17 üçgeninin katı olduğunu görerek

$$|AF| = 75 \text{ br ve } |AE| = 68 \text{ br}$$

olduğunu not edelim. Şu durumda

$$|FC| = 15 \text{ br ve } |EC| = 28 \text{ br}$$

olur.

Kalbi *F* olan kelebeğe bakılırsa, *ADF* ile *KCF* üçgenlerinin 3 : 1 oranında benzer oldukları ve bu yüzden

$$|CK| = 20 \text{ br ve } |FK| = 25 \text{ br}$$

olması gerektiği görülür. *ACE* üçgeninin üç kenar uzunluğu da bulunduğundan çözüme ulaştık sayılır.

Kenar uzunlukları 48-68-100 olduğundan, *AEK* üçgeninde $u = 108$ bulunur. Demek ki; iç teğet çemberinin yarıçapına *r* br dersek, alanı $108\cdot r$'dir.

Bir de *tabançarpıyükseklikbölüiki* formülünden alan bulup, buna eşitleyelim bakalım:

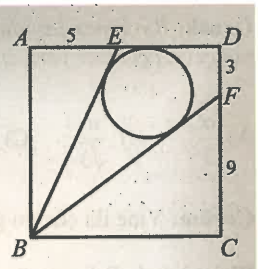
$$|AEK| = 108r = \frac{48\cdot 60}{2}$$

eşitliğinden $r = \frac{40}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

2.
$ABCD$ bir kare
$|AE| = 5$ br
$|CF| = 9$ br
$|FD| = 3$ br

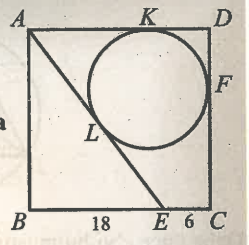
olduğuna göre BF, BE ve ED doğrularına teğet olan şekildeki çemberin yarıçapı kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

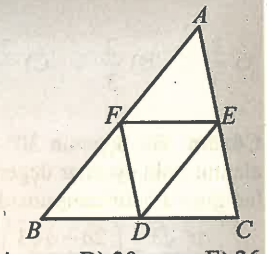
3.
$ABCD$ bir kare
$|BE| = 18$ br
$|EC| = 6$ br

$[CD]$, $[DA]$ ve $[AE]$ doğrularına sırasıyla F, K, L noktalarında teğet olan şekildeki çemberin yarıçapı kaç br dir?



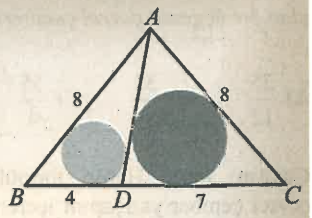
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4.
ABC bir üçgen
İç çember yarıçapı 2 br
D, E, F noktaları üzerinde bulundukları kenarların orta noktaları
Çevre(DEF) = 12 br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



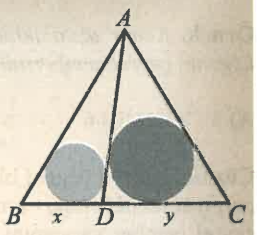
A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

5.
ABC bir ikizkenar üçgen
$D \in [BC]$
$|AB| = |AC| = 8$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 7$ br
olduğuna göre ABD'nin iç çember yarıçapının ADC'nin iç çember yarıçapına oranı kaçtır?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{9}{25}$

6.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
ABD ile ADC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçaplarının oranı $\frac{2}{3}$ ise $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{9}{25}$

Teorem. *ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R br ise*

$$|ABC| = \frac{abc}{4R}.$$

Kanıt: Sinüs Teoremi'ni anlattığımız yazıda

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

olduğunu kanıtlamıştık. O halde

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

dir. Bu eşitliği

$$|ABC| = \tfrac{1}{2}bc\sin A$$

eşitliğinde yerine yazalım.

$$|ABC| = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Örnek. *Kenar uzunlukları* $5\sqrt{6}$ br, $6\sqrt{6}$ br *ve* $7\sqrt{6}$ br *olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç* br *dir?*

A) $\frac{35}{12}$ B) $\frac{35}{6}$ C) $\frac{35}{4}$ D) $\frac{35}{2}$ E) $\frac{35\sqrt{6}}{6}$

Çözüm: Önce Heron formülünden alanı bulup, onu çevrel çember yarıçapını içeren alan formülüne eşitleyeceğiz. 5-6-7 üçgeninin alanı $6\sqrt{6}$ br^2 olduğundan bu üçgenin alanı onun 6 katı yani $36\sqrt{6}$ br^2 olmalıdır.

$$36\sqrt{6}=\frac{5\sqrt{6}\cdot 6\sqrt{6}\cdot 7\sqrt{6}}{4R}$$

eşitliğinden $R=\frac{35}{4}$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kenar uzunlukları* 6 br, 8 br *ve* 10 br *olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç* br *dir?*

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: 6-8-10 üçgeni bir dik üçgen olduğundan *taban-çarpıyükseklikbölüiki* formülünden bulduğumuz alanı, çevrel çember yarıçapını içeren formülden bulduğumuz alan değerine eşitleyeceğiz.

$$\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot R}$$

olduğundan $R=5$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Kenar uzunlukları* 4 br, 6 br *ve* 8 br *olan bir üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı* r br, *çevrel çemberinin yarıçapı* R br *olsun. Buna göre* $R\cdot r$ *çarpımı kaç* br^2 *dir?*

A) 16 B) 8 C) $\frac{16}{3}$ D) 4 E) $\frac{8}{3}$

Çözüm: İki türlü alan formülünü birbirine eşitleyeceğiz. Peki, hangi alan formüllerini? Tabii ki içinde r ve R geçenleri...

$$\left(\frac{4+6+8}{2}\right)\cdot r=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{4R}$$

eşitliğinden $R\cdot r=\frac{16}{3}$ br^2 olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir kenar uzunluğu* a br *olan bir eşkenar üçgenin çevrel çember yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

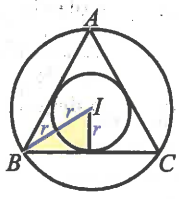
Çözüm: Yine iki çözüm göstereceğiz.

Birinci yol. Eşkenar üçgen için halihazırda bildiğimiz alan formülünü çevrel çember yarıçapını içeren alan formülüne eşitlersek sonuca hemencecik ulaşırız:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a\cdot a\cdot a}{4R}$$

eşitliğinden $R=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ olarak bulunur.

İkinci yol. Eşkenar üçgende çevrel çember merkezi ile iç teğet çember merkezi çakıştığından, çevrel çember yarıçapı, iç çember yarıçapının 2 katıdır.



Daha önce r'yi bulmuştuk. O halde;

$$R=2r=2\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kenar uzunlukları* a br, a br *ve* $a\sqrt{3}$ br *olan bir üçgenin iç çember yarıçapı ile çevrel çember yarıçapının toplamı kaç* a br *dir?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

Çözüm: Bu üçgenin 30°-30°-120° üçgeni olduğunu ve alanını tıpkı eşkenar üçgenin alanını hesaplar gibi hesapladığımızı hatırlamışsınızdır.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{2a+a\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r \text{ ve } \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a\cdot a\cdot a\sqrt{3}}{4R}$$

eşitliklerinden $r=\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)a$ ve $R=a$ bulunur. Toplam yapılırsa $r+R=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}a$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

7.
Tepe açısı 120° olan bir ikizkenar üçgende iç teğet çember yarıçapının çevrel çember yarıçapına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ E) $\sqrt{3}-1$

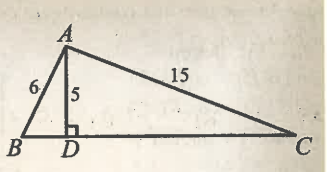
8.
Kenar uzunlukları a, b, c, iç teğet çemberinin yarıçapı r, çevrel çemberinin yarıçapı R olan bir üçgende

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$

toplamının r ve R cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) rR B) $2Rr$ C) $\frac{1}{rR}$ D) $\frac{1}{2rR}$ E) $\frac{2}{rR}$

9.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|AD| = 5$ br
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 15$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç br dir?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

Örnek. *Kenar uzunlukları doğal sayı olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı 6,25 br ise bu üçgenin kenar uzunluklarını bulunuz.*

Çözüm: $|ABC| = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4\cdot\frac{25}{4}} = \frac{abc}{25} = \frac{1}{2}ab\sin C$

olduğundan $c = \frac{25}{2}\sin C$ 'dir.

$-1 \le \sin C \le 1$ ve $c > 0$ olduğundan

$$0 < c \le \frac{25}{2}$$

dir. Aynı işlemleri a ve b kenarları için de yaparsak

$$0 < a \le \frac{25}{2} \text{ ve } 0 < b \le \frac{25}{2}$$

buluruz. Diğer yandan $|ABC| = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{25} = ur$ diye

$$abc = 25ur$$

olur. Bu da abc çarpımının 25'in katı olduğunu söyler. Kenar uzunlukları 12,5'tan küçük olduğundan en az iki kenar uzunluğu 5'in katı olmalıdır. Bu durumda kenar uzunlukları (5, 5, x), (5, 10, x) veya (10, 10, x)'dir. İlk iki durumu incelediğimiz zaman x'in doğal sayı olmadığını görürüz, o halde kenar uzunlukları 10, 10 ve x'tir. Kenar uzunlukları ve çevrel çember yarıçapı belli olduğundan artık alan yardımıyla x'i bulabiliriz. Kolaylık olsun diye $x = 2k$ alalım. $u = 10 + k$ olduğundan

$$|ABC| = \sqrt{(10+k)(10-k)kk} = \frac{10\cdot 10\cdot 2k}{25}$$

olur. Buradan $k = 6$ bulunduğundan $x = 12$'dir.

Bu güzel örnekle birlikte önemli olan, alan formüllerini bitirmiş olduk. Gerek olmadığı halde birkaç tane daha verelim ki en azından diğer formüllerin nasıl çıkartıldığı hakkında ön fikir oluşsun.

Teorem. *Çevrel çember yarıçapı R olan bir ABC üçgeni için*

$$|ABC| = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Sinüs Teoremi'nden

$$a = 2R\sin A$$
$$b = 2R\sin B$$
$$c = 2R\sin C$$

olduğunu biliyoruz. Bunları çevrel çember yarıçapını içeren formülde yerlerine yazarsak;

$$|ABC| = \frac{abc}{4R}$$
$$= \frac{(2R\sin A)\cdot(2R\sin B)\cdot(2R.\sin C)}{4R}$$
$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

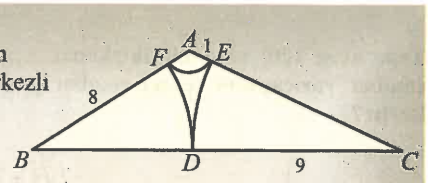
10.
Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve alanı S br^2 olan bir ABC üçgeni için

$$a^2 b^2 c^2 \sin A \sin B \sin C$$

çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $8S^3$ B) $4S^3$ C) $2S^3$ D) $8S^2$ E) $4S^2$

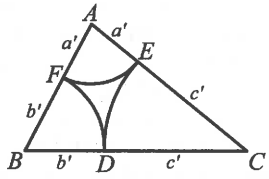
11.
ABC bir üçgen
A, B ve C merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla 1 br, 8 br ve 9 br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 30 **B) 36** C) 40 D) 45 E) 54

Teorem. *Bir üçgende yandaki gibi a', b', c' yarıçaplı çemberler çizilirse*

$$|ABC| = \sqrt{a'b'c'(a'+b'+c')}.$$



Kanıt: a', b' ve c' değerlerinin bilinmesi, üçgenin üç kenar uzunluğunun bilinmesi demektir.

Bu sebeple Heron formülünde u, a, b, c değerleri yerlerine sırasıyla $a'+b'+c'$, $b'+c'$, $c'+a'$, $a'+b'$ değerlerini yazınca formüle ulaşacağımızı umut ediyoruz. Umarız yanılmayız.

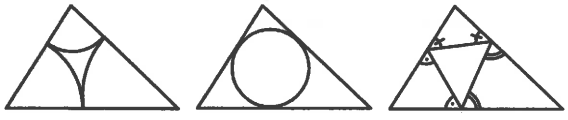
Gerçekten de

$$u-a=(a'+b'+c')-(b'+c')=a'$$
$$u-b=(a'+b'+c')-(c'+a')=b'$$
$$u-c=(a'+b'+c')-(a'+b')=c'$$

olduğundan

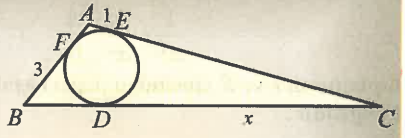
$$|ABC|=\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}=\sqrt{(a'+b'+c')a'b'c'}.$$

Uyarı. Bu güzel ve kullanışlı formülü, aşağıdaki üç şekilde de uygulayabilirsiniz.



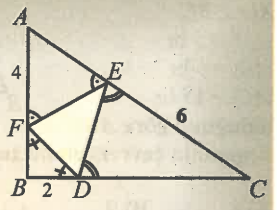
Üç şeklin üçünde de büyük üçgeni oluşturan altı doğru parçasının ikişer ikişer eşit uzunlukta olduğuna dikkat ediniz.

12.
ABC bir üçgen
D, E, F değme noktaları
$|EA| = 1$ br
$|FB| = 3$ br
$|DC| = x$ br
$|ABC| = 24$ br^2 olduğuna göre x kaçtır?



A) 10 **B) 12** C) 13 D) 14 E) 15

13.
ABC bir üçgen
$m(DFB) = m(BDF)$
$m(CED) = m(EDC)$
$m(AFE) = m(AEF)$
$|BD| = 2$ br
$|CE| = 6$ br
$|AF| = 4$ br
olduğuna göre
$|DEF|$ kaç br^2 dir?



A) 4,2 **B) 4,8** C) 5,4 D) 6 E) 6,4

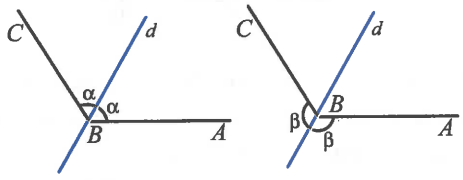
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Açıortay

Bir üçgenin temel elemanlarının açıları ve kenarları olduğunu, yardımcı elemanlarının da yükseklikleri, açıortayları, kenarortayları, kenarorta dikmeleri, orta tabanları, vs. olduğunu söylemiştik. Yükseklik, kenarorta dikme ve orta tabanı hallettik. Sırada üçgenin açıortayları var. Önce simetri eksenini tanımlayacağız, sonra açıortayı...

Bir şekli kendisine göre simetrik iki parçaya ayıran doğruya o şeklin **simetri ekseni** denir.

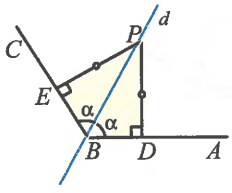


Bir açının simetri eksenine de **açıortay doğrusu** veya kısaca **açıortay** denir. Açıortayın hem ABC açısının ölçüsünü hem de CAB açısının ölçüsünü iki eşit parçaya ayırdığına dikkat ediniz. Bu yüzden 'açıortay doğrusu' diyoruz.

Açıortayla alakalı tek bir tane teorem var. Onu bilip de çözemeyeceğiniz soru yok gibidir. Dikkatle okuyup anlayın lütfen!

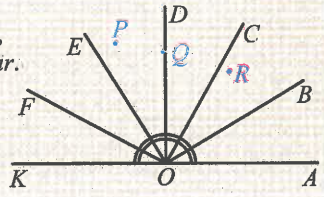
Teorem. *Açıortay doğrusu üzerinde rastgele alınan bir noktanın açının kollarına (veya uzantılarına) olan uzaklıkları eşittir.*

Kanıt: Açımız ABC açısı, bu açının açıortayı üzerinde rastgele alınan nokta P ve P'den açının kollarına inilen dikme ayakları da alt şekildeki gibi D ve E olsun.



PDB ile PEB üçgenlerinin üçer iç açı ölçüsü ve bununla birlikte hipotenüs uzunlukları eşit olduğundan $PDB \cong PEB$ olur. Dolayısıyla $|PD| = |PE|$ ve bununla birlikte $|BE| = |BD|$'dir.

Örnek. *Yanda verilen AOB, BOC, COD, DOE, EOF ve FOK açıları eştir.*
$P \in (\widehat{DOE})$
$Q \in [OD$
$R \in (\widehat{BOC})$
olduğuna göre
aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?

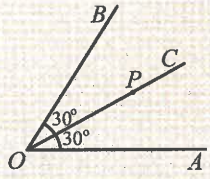


A) Q noktası, $[OC$ ve $[OE$'ye eşit uzaklıktadır.
B) Q noktası, $[OB$ ve $[OF$'ye eşit uzaklıktadır.
C) P noktası, $[OB$'ye göre $[OF$'ye daha yakındır.
D) P noktası, $[OE$'ye göre $[OC$'ye daha uzaktır.
E) R noktası, $[OD$'ye göre $[OA$'ya daha uzaktır.

Çözüm: R noktasını OB'ye çok yakın bir yerde alırsak, $[OD$'ye göre $[OA$'ya daha yakın olacaktır. Bu yüzden E seçeneğindeki önerme yanlış olabilir.

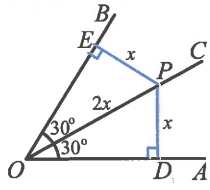
Doğru cevap: E.

Örnek. *AOB bir açı*
$[OC$ açıortay
$m(AOC) = m(COB) = 30°$
$P \in]OC$
P'nin O'ya uzaklığıyla
OA'ya uzaklığının toplamı
OB'ye uzaklığının kaç katıdır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

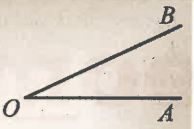
Çözüm: P'den OA'ya ve OB'ye inilen dikme ayakları sırasıyla D ve E olsun. PDO ve PEO üçgenlerinin birer $30°$-$60°$-$90°$ üçgeni olduğunu görünüz.



$|PD| = x$ br dersek, $|PO| = 2x$ br ve $|PE| = x$ br olur. O halde sorulan oran $\frac{2x+x}{x}$'ten 3 olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

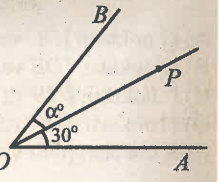
1.
Yanda görülen *AOB* açısının iç bölgesinde, açının kollarına ve köşesine uzaklığı birbirlerine eşit olan kaç farklı nokta vardır?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

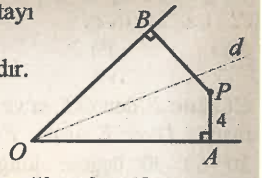
2.
$m(AOP) = 30^\circ$
$m(POB) = \alpha^\circ$

P noktası [*OA*'ya göre [*OB*'ye daha yakın olduğuna göre α'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



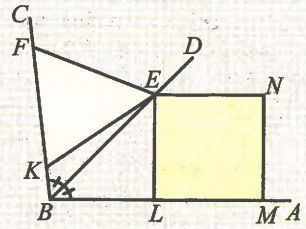
A) 20 **B) 29** C) 30 D) 31 E) 60

3.
Yanda *AOB* açısı ve onun açıortayı olan *d* ışını görülmektedir.
P noktası bu ışının alt tarafındadır.
$PA \perp AO$
$PB \perp BO$
$|PA| = 4$ br
olduğuna göre $|PB|$'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



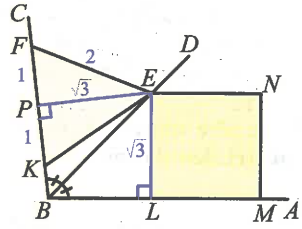
A) 3 B) 4 **C) 5** D) 6 E) 7

Örnek. *ABC bir açı*
[BD açıortay
E ∈]BD
EKF bir eşkenar üçgen
ELMN bir kare
olduğuna göre karenin alanı eşkenar üçgenin alanının kaç katıdır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

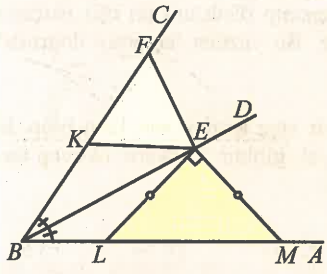
Çözüm: Karenin bir kenar uzunluğu $\sqrt{3}$ br olsun. O halde *E*'den *BC*'ye inilen dikmenin uzunluğu da $\sqrt{3}$ br olur.



Bu durumda eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu 2 br olacağından alanı $\sqrt{3}$ br^2 olur. Karenin alanı da 3 br^2 olduğundan cevabımız $\sqrt{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

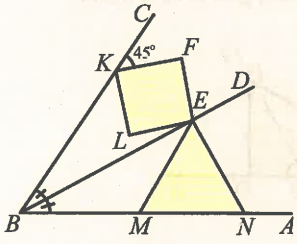
4.



EFK, alanı $3\sqrt{3}$ br^2 olan bir eşkenar üçgense $|LM|$ kaç br dir?

6

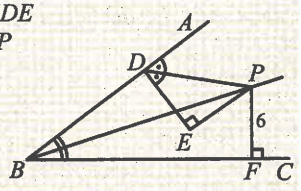
5.



F'nin *BC*'ye uzaklığı $\sqrt{6}$ br ise kare ile eşkenar üçgenin alanları toplamı kaç br^2 dir?

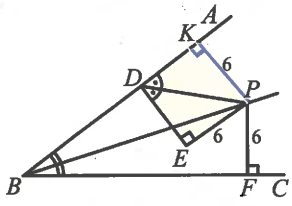
$12+8\sqrt{3}$

Örnek. *Yandaki ABC ile ADE açılarının açıortayları bir P noktasında kesişmektedir.*
DE ⊥ EP
PF ⊥ BC
|PF| = 6 br
ise |PE| kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

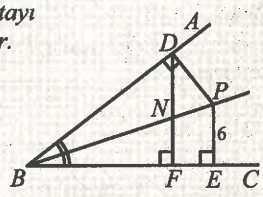
Çözüm: *P*'den *BA*'ya indirilen dikme ayağına *K* diyelim.



BP, *ABC* açısının açıortayı olduğundan |*PF*| = |*PK*| olur. Aynı zamanda *DP* de *KDE* açısının açıortayı olduğundan |*PK*| = |*PE*| olmalıdır. O halde |*PF*| = |*PK*| = |*PE*| = 6 br dir.

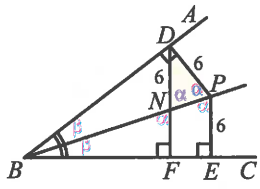
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC açısının iç açıortayı üzerinde bir P noktası alınıyor.*
PE ⊥ BC
PD ⊥ AB
DF ⊥ BC
|PE| = 6 br
ise |DN| kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

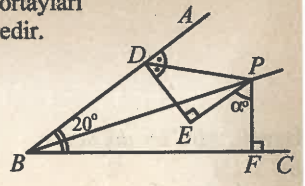
Çözüm: |*DP*| = |*PE*| = 6 br olduğunu gördük ama oradan sonuca gidemiyoruz. O halde açı ölçüleri bizi sonuca götürecek olmalı. *m*(*APB*) = α dersek *DPB* ve *EPB* üçgenlerinin eşliğinden *m*(*EPB*) = α yazabiliriz.



NF // *PE* olduğundan *m*(*FNB*) = α olur. Ters açıların eşliğinden de *m*(*DNP*) = α olur. Sonuçta *PDN* üçgeni ikizkenar çıktı. Şu durumda |*DN*| = |*DP*| = |*PE*| = 6 br dir.

Doğru cevap: D.

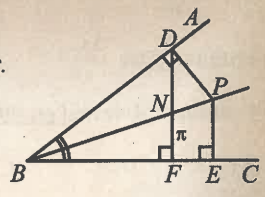
6.
ABC ile *ADE* açılarının açıortayları bir *P* noktasında kesişmektedir.
DE ⊥ EP
PF ⊥ BC
|DE| = |PF|
m(*ABP*) = 20°
m(*EPF*) = α°
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

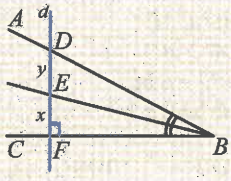
E, *P*, *D*, *N* noktalarının bir eşkenar dörtgen belirttiği yanımıza kar kaldı!

7.
ABC açısının iç açıortayı üzerinde bir *P* noktası alınıyor.
PE ⊥ BC
PD ⊥ AB
DF ⊥ BC
|NF| = π br
olduğuna göre |*DN*|'nin <u>en küçük</u> tam sayı değeri için |*PE*| kaç br olur?



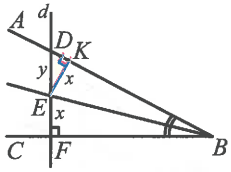
A) 3 **B) 4** C) 5 D) 6 E) 7

Örnek. *Şekildeki ABC açısını ve buna ait açıortay doğrusunu bir d doğrusu şekildeki gibi D, E, F noktalarında kesmektedir.*
DF ⊥ BC
|FE| = x br
|ED| = y br
olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi her zaman doğrudur?



A) $x < y$ B) $x = y$ C) $x > y$ D) $x = 2y$ E) Hiçbiri

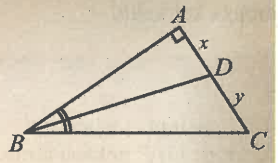
Çözüm: *E*'den *AB*'ye inilen dikme ayağı *K* olsun.



Kanıtladığımız üzere $|EK| = |EF| = x$ br olacaktır. *DKE* bir dik üçgen olup, dik üçgende hipotenüs daima en uzun kenar olacağından $x < y$ eşitsizliği daima sağlanacaktır.

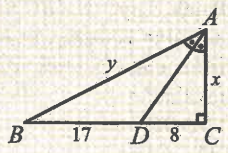
Doğru cevap: A.

8.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
[BD] iç açıortay
|AD| = x br
|DC| = y br
olduğuna göre $\frac{5x}{y}$
oranının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



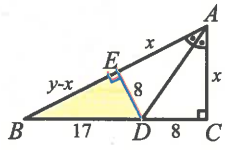
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BC ⊥ CA
AD açıortay
|BD| = 17 br
|DC| = 8 br
|CA| = x br
|AB| = y br
olduğuna göre y – x farkı kaçtır?



A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

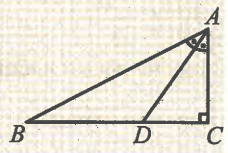
Çözüm: *D*'den *AB*'ye inilen dikme ayağı *E* olsun. $|DE| = |DC| = 8$ br ve $|AE| = |AC| = x$ br olacağını kanıtladık. Bu durumda $|BE| = y - x$ br olur.



Diğer yandan, *DEB* dik üçgeninin özel bir dik üçgen olduğu görülürse Pisagor teoremini uygulamadan $y - x = 15$ diyebiliriz.

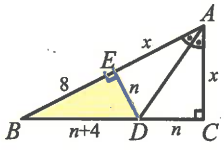
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BC ⊥ CA
AD açıortay
|AB| = |AC| + 8 br
|BD| = |DC| + 4 br
olduğuna göre |DC| kaç br *dir?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

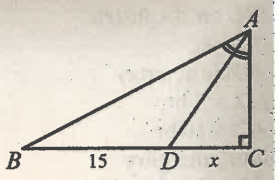
Çözüm: $|AC| = x$ br ve $|DC| = n$ br dersek, $|AB| = x + 8$ br ve $|BD| = n + 4$ br olur.



D'den *AB*'ye inilen dikme ayağı *E* olsun. $|DE| = |DC| = n$ br ve $|AE| = |AC| = x$ br olacağını kanıtladık. Bu durumda $|BE| = 8$ br olur. Sonuç olarak *DEB* dik üçgeninde Pisagor teoreminden (veya acaba bu 6-8-10 üçgeni mi diye şüphelenerek) $n = 6$ olarak buluruz.

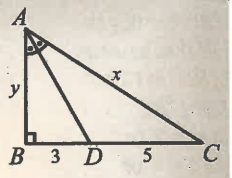
Doğru cevap: A.

9.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$[AD]$ açıortay
$|BD| = 15$ br
$|DC| = x$ br
$|AB| - |AC| = 12$
olduğuna göre x kaçtır?



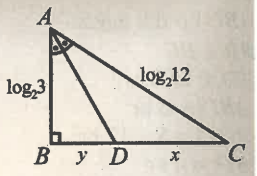
A) 8 **B) 9** C) 10 D) 12 E) 13

10.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$|AB| = y$ br
olduğuna göre $x - y$ farkı kaçtır?



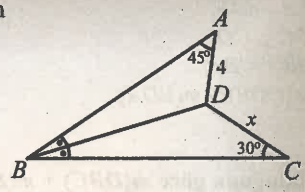
A) 1 B) 2 C) 3 **D) 4** E) 5

11.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|AB| = \log_2 3$ br
$|AC| = \log_2 12$ br
$|BD| = y$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre $x^2 - y^2$ farkı kaçtır?



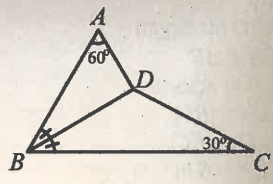
A) 1 B) 2 C) 3 **D) 4** E) 5

12.
$ABCD$ bir içbükey dörtgen
$m(ABD) = m(CBD)$
$m(DAB) = 45°$
$m(BCD) = 30°$
$|AD| = 4$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



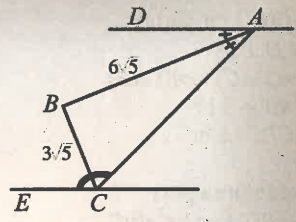
A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 4 **D) $4\sqrt{2}$** E) 6

13.
$ABCD$ bir içbükey dörtgen
$m(ABD) = m(DBC)$
$m(DAB) = 60°$
$m(BCD) = 30°$
$|AD| + |DC| = 7\sqrt{3} + 7$ br
olduğuna göre $|BC| - |AB|$ farkı kaç br dir?



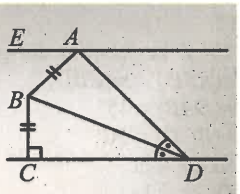
A) 5 B) 6 **C) 7** D) 8 E) 9

14.
$DA \,//\, EC$
$m(DAB) = m(CAB)$
$m(ECB) = m(ACB)$
$|CB| = 3\sqrt{5}$ br
$|BA| = 6\sqrt{5}$ br
olduğuna göre paralel doğrular arasındaki uzaklık kaç br dir?



A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 **E) 12**

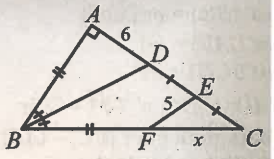
15.
$EA \parallel CD$
$BC \perp CD$
$|BC| = |BA|$
$m(CDB) = m(BDA)$



olduğuna göre $m(DBC) + m(BAE) + k \cdot m(BDA) = 180°$ eşitliğini sağlayan k sayısı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 **D)** 3 E) 4

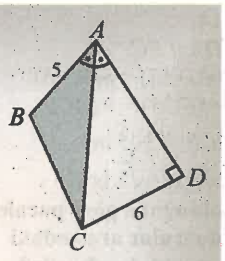
16.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
BD iç açıortay
$|AB| = |BF|$
$|DE| = |EC|$
$|AD| = 6$ br
$|EF| = 5$ br
olduğuna göre $|FC| = x$ kaç br dir?



A) 9 **B)** 8 C) 7 D) 6 E) 5

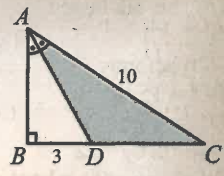
17.
$ABCD$ bir dörtgen
$CD \perp DA$
$m(DAC) = m(CAB)$
$|AB| = 5$ br
$|CD| = 6$ br

olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



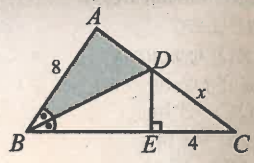
A) 10 **B)** 15 C) 20 D) 25 E) 30

18.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|BD| = 3$ br
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre $|ADC|$ kaç br^2 dir?



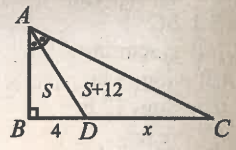
A) 10 B) 12 **C)** 15 D) 24 E) 30

19.
ABC bir üçgen
$[BD]$ iç açıortay
$|ABD| = 12$ br^2
$DE \perp BC$
$|AB| = 8$ br
$|EC| = 4$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



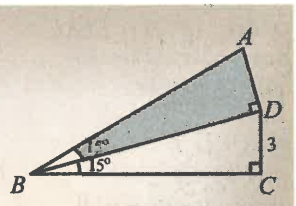
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

20.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
AD iç açıortay
$|ABD| = S$ br^2
$|ADC| = S + 12$ br^2
$|BD| = 4$ br
olduğuna göre $|DC| = x$ kaç br dir?



A) 7 B) $5\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{13}$ D) 8 E) $6\sqrt{2}$

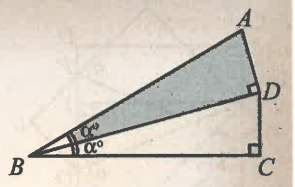
21.
$ABCD$ bir dörtgen
$BC \perp CD$
$BD \perp DA$
$m(ABD) = m(DBC) = 15°$
$|DC| = 3$ br



olduğuna göre ABD üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

A) 6 B) 12 C) 15 **D)** 18 E) 36

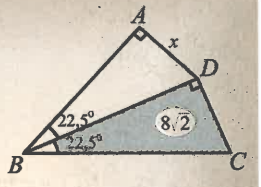
22.
$ABCD$ bir dışbükey dörtgen
$BC \perp CD$
$BD \perp DA$
$m(ABD) = m(DBC) = \alpha°$
$|ABD| = 2 \cdot |DC|^2$



olduğuna göre α kaçtır?

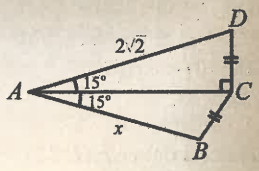
A) 10 **B)** 15 C) 20 D) 22,5 E) 30

23.
$ABCD$ bir dörtgen
$CD \perp DB$
$DA \perp AB$
$m(ABD) = m(DBC) = 22,5°$
$|AD| = x$ br
$|DBC| = 8\sqrt{2}$ br^2
olduğuna göre x kaçtır?



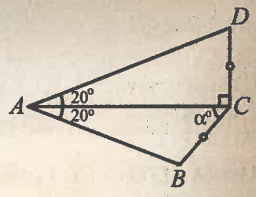
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

24.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \perp CD$
$|BC| = |CD|$
$m(DAC) = m(CAB) = 15°$
$|AD| = 2\sqrt{2}$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



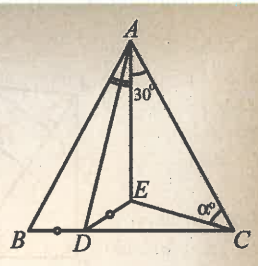
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) 3 D) $2+\sqrt{2}$ E) $4-\sqrt{2}$

25.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \perp CD$
$|BC| = |CD|$
$m(DAC) = m(CAB) = 20°$
$m(ACB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



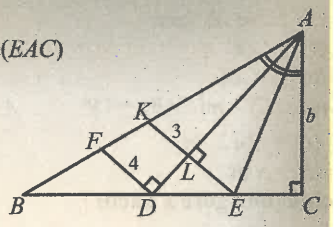
A) 40 **B)** 50 C) 60 D) 70 E) 80

26.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in [BC]$
E iç bölgede
$|BD| = |DE|$
$m(BAD) = m(DAE)$
$m(EAC) = 30°$
$m(ACE) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



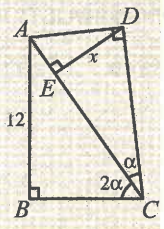
A) 22,5 B) 30 C) 36 **D)** 45 E) 60

27.
ABC bir dik üçgen
$m(BAD) = m(DAE) = m(EAC)$
$BC \perp CA$
$EK \perp AD$
$AD \perp DF$
$|KL| = 3$ br
$|FD| = 4$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre b kaçtır?



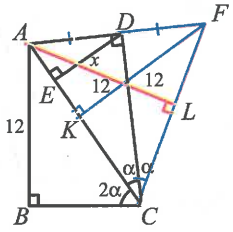
A) 6 B) $3\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{6}$ **D)** $3\sqrt{7}$ E) 9

Örnek. *ABC ve CDA birer dik üçgen*
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$DE \perp CA$
$m(DCA) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: ADC üçgeninin CD doğrusuna göre simetriğini çizerek ACF ikizkenar üçgenini oluşturalım. F'den AC'ye indirilen dikme ayağı K olsun.

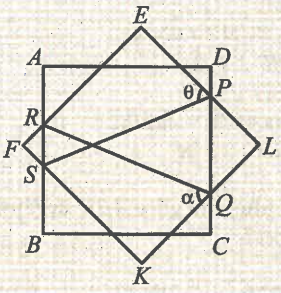


$|AD| = |DF|$ olduğundan $[DE]$, AKF dik üçgeninde orta tabandır. $|DE| = x$ br olduğundan $|FK| = 2x$ br olur. Diğer yandan A'dan FC'ye indirilen dikme ayağı L olsun. CA doğrusu BCF açısının açıortayı olduğundan $|AB| = |AL| = 12$ br dir. İkizkenar üçgende ikiz kenarlara inen yükseklikler eşit boyda olmaları gerekir diye $2x = 12$ eşitliğinden $x = 6$ bulunur.

Doğru cevap: B.

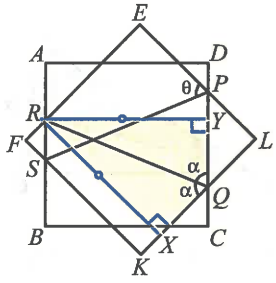
Örnek. *ABCD ve EFKL 8 ayrı noktada kesişen birer eş karedir.*

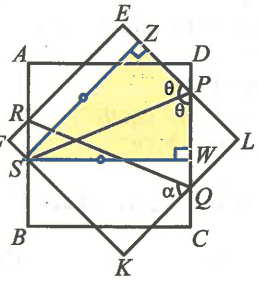
$m(RQK) = \alpha$
$m(SPE) = \theta$
olduğuna göre α *ile* θ *arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\alpha = \theta$ B) $\alpha = 2\theta$ C) $\theta = 2\alpha$
D) $\alpha + \theta = 90$ E) $\alpha + \theta = 135$

Çözüm: R'den CD ve KL kenarlarına indirilen dikme ayakları sırasıyla Y ve X olsun. $|RY|$ ve $|RX|$ değerleri karelerin bir kenar uzunluğuna eşit olduklarından birbirlerine eşittirler. Bu durumda RXQ ile RYQ üçgenleri eş olduğundan XQR ile YQR açılarının eş olduklarını anlarız.

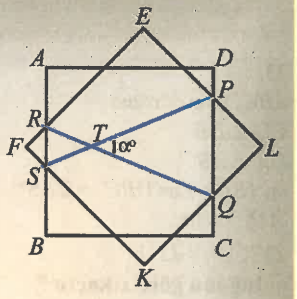




Aynı işlemleri S noktası için yaparsak $|SW| = |SZ|$ çıkar. Bu da WPS ile ZPS üçgenlerinin ve açılarının eşliği anlamına gelir. PLQ dik üçgeninde iç açıların ölçüleri toplanırsa $\alpha + \theta = 135°$ eşitliğine erişilir.

Doğru cevap: E.

28.
$ABCD$ ve $EFKL$ eş birer kare
$PS \cap RQ = \{T\}$
$m(PTQ) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



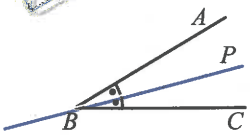
A) 30 B) 36
C) 45 D) 54
E) 60

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

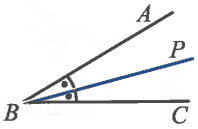
İç Açıortay

Bir önceki yazımızda *bir açının açıortayının bir doğru olduğunu* söylemiştik.



Örneğin, yukarda ABC (veya CAB) açısının açıortayı olan BP doğrusunu görmektesiniz. Açının hem iç bölgesinden hem de dış bölgesinden geçtiğine dikkat ediniz.

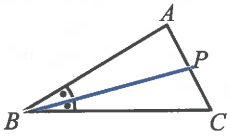
Bir açının açıortayının, açının iç bölgesinde kalan kısmına **iç açıortay** denir. *Bir açının iç açıortayı* ise doğru değil, *bir ışındır.*



Örneğin, yukardaki şekilde CAB açısının iç açıortayı olan $[BP$ ışınını görmektesiniz. Açının sadece iç bölgesinden geçtiğine dikkat ediniz.

Şimdiyse üçgenin iç açıortaylarıyla tanışacağız.

Bir üçgenin herhangi bir açısının iç açıortayının üçgensel bölgede kalan kısmına **üçgene ait bir iç açıortay** denir.



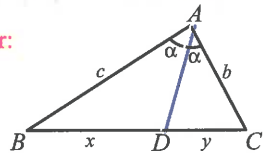
Üçgenin iç açıortayları, diğerlerinden farklı olarak, birer doğru parçasıdır. Örneğin, yukardaki şekilde ABC üçgeninin B açısına ait iç açıortayı olan $[BP]$ doğru parçasını görmektesiniz. Üçgenin sadece iç bölgesinde kaldığına dikkat ediniz.

Bu yazıda kafamızı üçgenin iç açıortaylarına yoracağız. Evvela iç açıortayların üçgenin kenarlarını hangi oranda böldüklerini öğreneceğiz.

Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir iç açıortayı, üçgenin bir kenarını diğer kenarların boyları oranında böler.*

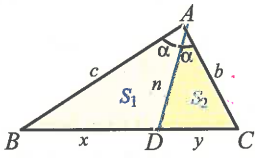
Teoremin dediği, kısaca şudur:
Yandaki üçgene göre

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}.$$



Aşağıda bu teoremin 5 farklı kanıtını bulacaksınız. Amacımız ne kadar çok kanıt bildiğimizi göstermek değil, değişik çözüm teknikleri görerek, farklı sorulara farklı bakış açısıyla yaklaşabilmek! İnanmadığınızı biliyorum. Çıkarayım o zaman ağzımdaki baklayı: Haddimi aşsa da kanıtların sonunda şu an hüküm süren eğitim sistemine ufacık bir eleştirim olacak. Elimde beni destekleyen kanıtlar olsun istedim. Matematik açısından, bu kanıtların sadece en sade olanını vermek yeter ama bu seferlik bizi affedin. Hem pişman da olmayacaksınız!

Kanıt 1: Hazır alan dersinden çıkmışken, alanların ölçülerinden bir yaklaşım yapmaya çalışalım:



ABD ve ADC üçgensel bölgelerinin alanları sırasıyla S_1 br^2 ve S_2 br^2, iç açıortayın boyu da n br olsun.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{x}{y}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot c\cdot n\cdot\sin\alpha \quad \text{ve} \quad S_2=\frac{1}{2}\cdot b\cdot n\cdot\sin\alpha$$

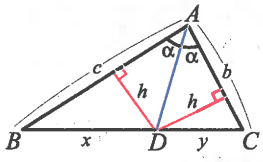
eşitlikleri birbirine bölünürse aynı oran

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{c}{b}$$

olarak bulunur. O halde

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}.$$

Kanıt 2: Alanlar oranını kullanarak benzer bir kanıt daha yapacağız.

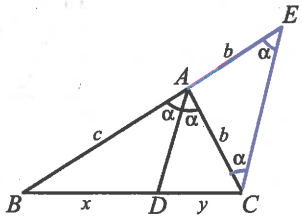


D noktasından AB ve AC kenarlarına inilen dikmelerin boylarının eşit olduğunu kanıtlamıştık. O dikmelerin boyuna h br diyelim. ABD ve ADC üçgenlerinin yükseklikleri eşit boyda olduğundan, alanları oranı bu yüksekliklerin indiği tabanlar oranı yani

$$\frac{|ABD|}{|ADC|}=\frac{\frac{1}{2}ch}{\frac{1}{2}bh}=\frac{c}{b}$$

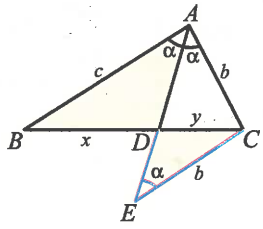
dir. Aynı oran $\frac{x}{y}$ olduğundan $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$.

Kanıt 3: Nihayetinde bir orantı kanıtlamaya çalıştığımızdan, orantılı doğru parçaları olur da Tales teoremi olmaz mı? Bu sebeple, aklınıza esen yerlerden paralel doğrular çizin, emin olun, çıkar!



C köşesinden DA'ya paralel çizilen doğru BA'yı E'de kessin. $m(BAD) = m(CEB)$ ve $m(DAC) = m(ECA)$ olduğundan CAE ikizkenar üçgen olur. O halde $|AD| = b$ br olur. Tales Teoremi'nden $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ olduğu kanıtlanmıştır.

Kanıt 4: Diyelim C'den DA'ya değil de BA'ya paralel çektiniz. Bu sefer kelebek yardıma koşar!

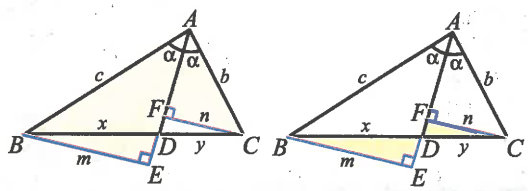


C'den geçen BA'ya paralel çizilen doğru AD'yi E'de kessin. $m(CAE) = m(EAB) = m(AEC)$ olduğundan ACE üçgeni ikizkenar olup $|CE| = |AC| = b$ br olur. ADB ile EDC üçgenleri benzer olduğundan (kelebek)

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Kanıt 5: B ve C köşelerinden iç açıortaya inilen dikme ayakları sırasıyla E ve F olsun.



Böyle bir durumda, hem AEB ile AFC, hem de BED ile CFD üçgenleri benzer olur. İlk benzerlikten

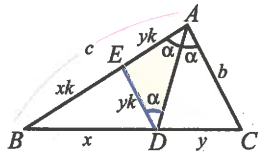
$$\frac{m}{n}=\frac{c}{b},$$

İkinci benzerlikten

$$\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$$

bulunur. Bu iki eşitlikten $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ eşitliğine ulaşılır.

Kanıt 6: D'den CA'ya paralel çizilen doğru AB'yi E'de kessin.



Tales teoremi gereği; $|BE| = xk$ br ise $|EA| = yk$ br olur. AED ikizkenar olacağından $|DE| = yk$ br olur. Şimdi BED ile BAC üçgen benzerliğini kullanacağız:

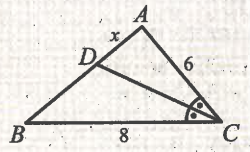
$$\frac{xk}{yk}=\frac{c}{b}$$

olduğundan k'ler sadeleşince kanıt tamamlanmış olur.

Kanıtlar bitti. Buna mı üzüleyim yoksa okullarında şu an iç açıortay dersini işleyen bir lise öğrencisinin bile bu kanıtları anlamakta zorluk çekeceğini hatta belki de hiç anlamadığını biliyor olmama mı?

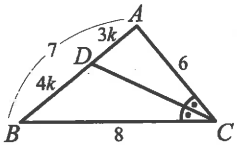
Dikkat ettiyseniz, iç açıortay teoremine yaptığımız 6 kanıtın tamamı da benzerlik ve alan bilgileri ile yapıldı. Fakat öğrencilerin sözüm ona çalıştığı kaynak kitaplarda iç açıortay konusu genellikle benzerlik ve alan konularından önce anlatılıyor. Yani bir bakıma öğretmenlerimiz, ''Ben söylüyorsam doğrudur, inanın bana!'' diyorlar. Demiyorlarsa da karşılarında ''Neden?'' diye soran öğrencilerimiz olmadığından demiyorlar. Eğer öğrencilere sorulmadığı halde kanıtları ile anlatılmış olsaydı, bu yanlış çoktan düzeltilmiş olmaz mıydı? ''Neden?'' diye soranların çoğalması dileğiyle yazımıza devam edelim. Şimdi teoremin kullanımına örnek olacak bazı sorular çözeceğiz.

Örnek. *ABC bir üçgen*
[CD] iç açıortay
$|AC| = 6$ br
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu tarz sorularda "$|AD| = x$ br ise $|DB| = 7 - x$ br dir" demeyin, denklem çözmek zorunda kalırsınız. Şunu yapın:



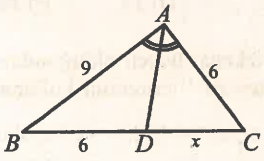
İç açıortay teoremi gereğince $|CA| : |CB| = 3 : 4$ olduğundan $|AD| = 3k$ br dersek, $|DB| = 4k$ br olur.

$$3k + 4k = 7$$

eşitliğinden $k = 1$ bulunur. Demek ki $|AC| = x = 3k = 3$.

Doğru cevap: C.

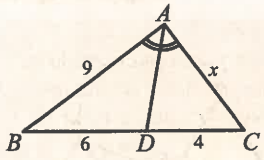
1.



x kaçtır?

4

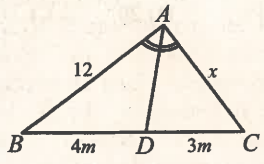
2.



x kaçtır?

6

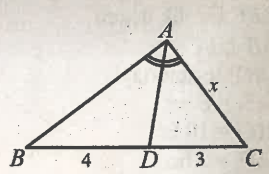
3.



x kaçtır?

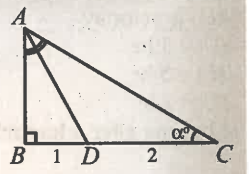
9

4.
ABC bir üçgen
[AD] iç açıortay
Çevre(*ABC*) = 21 br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 3$ br
$|CA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



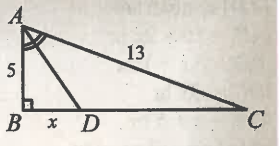
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
[AD] iç açıortay
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 2$ br
$m(C) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



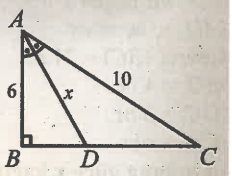
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 36 E) 45

6.
ABC bir dik üçgen
[AD] iç açıortay
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 13$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



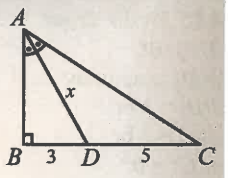
A) 3 B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{11}{3}$ D) 4 E) $\frac{13}{3}$

7.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 10$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



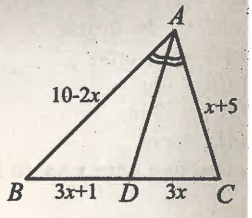
A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{39}$ C) $\sqrt{42}$ **D)** $\sqrt{45}$ E) $\sqrt{48}$

8.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



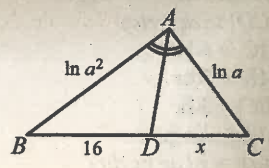
A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{10}$

9.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$|AB| = 10 - 2x$ br
$|BD| = 3x + 1$ br
$|DC| = 3x$ br
$|CA| = x + 5$ br
olduğuna göre x'in alabileceği değerlerden tam sayı olanı kaçtır?



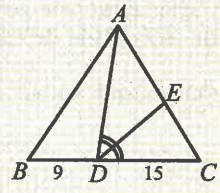
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 **E)** 1

10.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$|AC| = \ln a$ br
$|AB| = \ln a^2$ br
$|BD| = 16$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 6 **C)** 8 D) 10 E) 12

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$D \in [BC]$
$E \in [AC]$
$m(ADE) = m(EDC)$
$|BD| = 9$ br
$|DC| = 15$ br
olduğuna göre $|EC|$ kaç br *dir?*



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

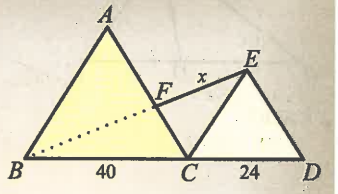
Çözüm: Eşkenar üçgen bir ikizkenar üçgen olduğundan, ABC üçgeninde ''İkizkenar Stewart'' teoremini kullanarak $|AD| = 21$ br bulunur.

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{7}{5}$$

olduğundan, iç açıortay teoreminden $|AE| = 7k$ br dersek, $|EC| = 5k$ br olur. $12k = 24$ eşitliğinden $k = 2$ olur ki buradan $|EC| = 5k = 10$ br olarak bulunur.

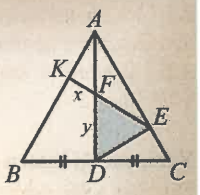
Doğru cevap: A.

11.
ABC ve ECD birer eşkenar üçgen
B, C, D doğrudaş
$BE \cap AC = \{F\}$
$|BC| = 40$ br
$|CD| = 24$ br
$|FE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



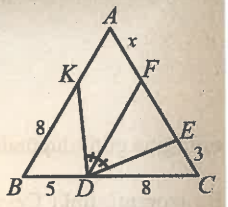
A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 **E)** 21

12.
ABC ve DEF birer eşkenar üçgen
A, F, D doğrusal
E, F, K doğrusal
$|BD| = |DC|$
$|KF| = x$ br
$|FD| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



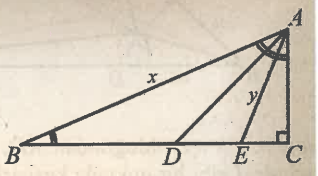
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

13.
ABC bir eşkenar üçgen
$m(KDF) = m(FDE)$
$|KB| = |DC| = 8$ br
$|BD| = 5$ br
$|CE| = 3$ br
$|AF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



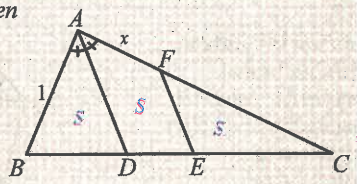
A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 **E) 5**

14.
ABC bir dik üçgen
CBA, BAD, DAE ve EAC açıları eş
$|AB| = x$ br
$|AE| = y$ br
olduğuna göre
$\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $1+\sqrt{2}$ D) $2+\sqrt{2}$ E) 4

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BAD) = m(DAC)$
$|ABD| = S$ br^2
$|ADEF| = S$ br^2
$|FEC| = S$ br^2
$AD \,//\, FE$
$|AB| = 1$ br
olduğuna göre $|AF| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $2-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) 2 E) $2\sqrt{2}-2$

Çözüm: Soruda hem alan, hem benzerlik hem açıortay var, ne güzel ☺

$$\frac{|ABD|}{|ADC|} = \frac{1}{2}$$

diye, $|AB| = 1$ br olduğundan $|AC| = 2$ br olmalıdır. Şu durumda $|FC| = 2 - x$ br dir.

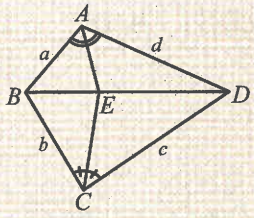
CFE ile CAD üçgenleri benzer ve alanları oranı 1: 2 olduğundan benzerlikleri oranı $1:\sqrt{2}$ 'dir.

$$\frac{2-x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

eşitliğinden $2 - x = \sqrt{2}$ yani $x = 2 - \sqrt{2}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$[BD]$ *köşegen*
$m(DAE) = m(EAB)$
$m(BCE) = m(ECD)$
$|AB| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|DA| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a \cdot c = b \cdot d$ B) $a \cdot b = c \cdot d$ C) $a \cdot d = b \cdot c$
D) $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ E) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

Çözüm: ABD ve BCD üçgenlerinde iç açıortay teoremini uygulayacağız.

ABD üçgeninde iç açıortay teoreminden gelen

$$\frac{|BE|}{|ED|} = \frac{a}{d}$$

eşitliğiyle, BCD üçgeninde iç açıortay teoreminden gelen

$$\frac{|BE|}{|ED|} = \frac{b}{c}$$

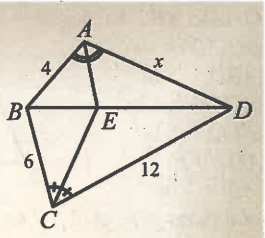
eşitliği birlikte düşünülürse

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$$

yani $a \cdot c = b \cdot d$ eşitliğine ulaşılır. Diğer bir deyişle, karşılıklı kenar uzunluklarının çarpımı birbirlerine eşittir.

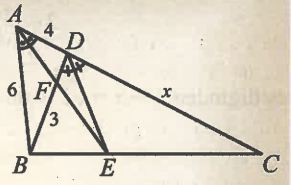
Doğru cevap: A.

15.
ABCD bir dörtgen
[*BD*] köşegen
$m(DAE) = m(EAB)$
$m(BCE) = m(ECD)$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 12$ br
$|DA| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



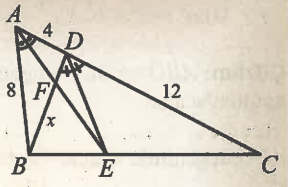
A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

16.
ABC ve *DBC* birer üçgen
[*AE*] ve [*DE*] iç açıortay
$|BF| = 3$ br
$|BA| = 6$ br
$|AD| = 4$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 8 B) 12 C) 16 **D) 20** E) 24

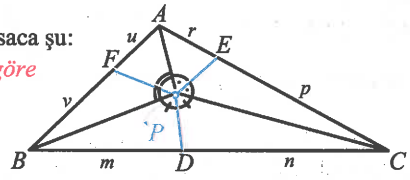
17.
ABC ve *DBC* birer üçgen
[*AE*] ve [*DE*] iç açıortay
$|BA| = 8$ br
$|AD| = 4$ br
$|DC| = 12$ br
$|BF| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Teorem. *Herhangi bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktasının üçgenin köşelerine birleştirilmesi ile oluşan üç üçgenin P köşelerine ait iç açıortaylarının ABC üçgeninin kenarlarını böldüğü oranların çarpımı 1'dir.*

Yani, dediği kısaca şu:
Yandaki şekle göre
$\frac{u}{v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=1.$



Kanıt: Üçgenin kenarlarını şekilde görüldüğü üzere adlandıralım. *A*, *B*, *C*, *P* farklı bir noktaysa

$$\frac{|PA|}{|PB|}\cdot\frac{|PB|}{|PC|}\cdot\frac{|PC|}{|PA|}=1$$

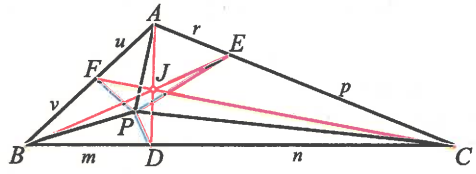
eşitliği, daima geçerli olan bir eşitliktir. Aynı değerler, iç açıortay teoremi gereği bizi

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{r}=1$$

eşitliğine götürdüğünden teorem kanıtlanmış olur.

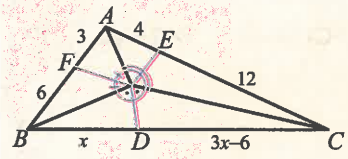
Bu teoremi, tıpkı Ceva Teoremi gibi, $u\cdot m\cdot p = v\cdot n\cdot r$ şeklinde yani dıştaki 6 uzunluğun birer atlayarak çarpımları eşittir şeklinde ezberleyebilirsiniz.

Bu sonuç bize aynı zamanda, Ceva Teoremi'nin karşıtı gereği; *AD*, *BE*, *CF* doğrularının daima noktadaş olduğunu da anlatır.



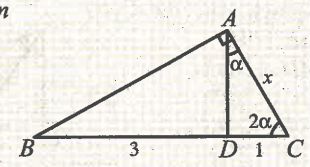
$u\cdot m\cdot p = v\cdot n\cdot r$ olduğundan *AD*, *BE*, *CF* doğruları üçgen içinde *J* gibi bir noktada kesişirler.

18.



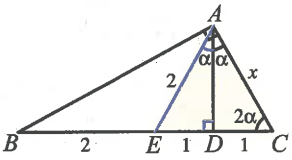
x kaçtır?

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BA \perp AC$
$m(CAD) = \alpha$
$m(ACB) = 2\alpha$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 1$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

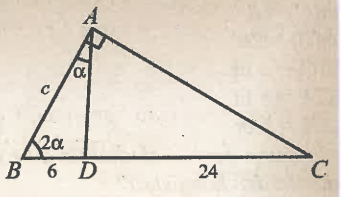
Çözüm: Bir dik üçgen sorusunda Pisagor teoremini uygulayacak kadar veri yoksa muhteşem üçlü teoremini hatırlamamız gerekiyordu. O sebeple A'dan hipotenüse kenarortay çizelim.



Muhteşem üçlü gereği $|AE| = |BE| = 2$ br ve $|ED| = 1$ br olur. $|EA| = |EC|$ olduğundan AEC ikizkenar üçgen ve bu sebeple $m(EAD) = \alpha$ olur. Demek ki AEC üçgeninde AD iç açıortaymış. İç açıortay teoreminden $x = 2$ çıkar.

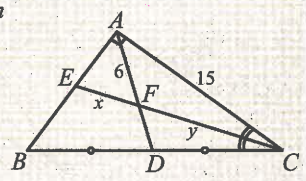
Doğru cevap: C.

19.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$m(B) = 2 \cdot m(DAB)$
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 24$ br
olduğuna göre
$|AB| = c$ kaç br dir?



A) 9 **B)** 10 C) 12 D) 13 E) 15

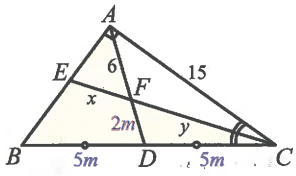
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$[AD]$ *kenarortay*
$[CE]$ *iç açıortay*
$|AF| = 6$ br
$|AC| = 15$ br
$|BD| = x$ br



$|CF| = y$ br *olduğuna göre* $\frac{x}{y}$ *oranı kaça eşittir?*

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{3}{7}$

Çözüm: Evvela, CAD üçgeninde iç açıortay teoreminden $|FD| = 2m$ br dersek, $|DC| = 5m$ br olacağını not edelim.



Ardından, dik üçgende hipotenüse kenarortay indirildiğini görüp muhteşem üçlüyü hatırlıyoruz.

$$|BD| = |DC| = |DA|$$

olması gerektiğinden $m = 2$ bulunur. Diğer yandan $|AC|$ ve $|BC|$ sırasıyla 15 br ve 20 br olduğundan, iç açıortay teoremi gereği

$$|AE| : |EB| = 3 : 4$$

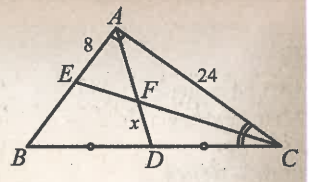
olmalıdır. Bu oranı Menelaus teoreminde kullanacağız.

$$\frac{3}{3+4} \cdot \frac{5m}{5m} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

eşitliğinden $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ olarak bulunur.

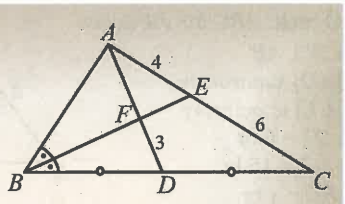
Doğru cevap: E.

20.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$[AD]$ kenarortay
$[CE]$ iç açıortay
$|AE| = 8$ br
$|AC| = 24$ br
olduğuna göre $|FD| = x$ kaç br dir?



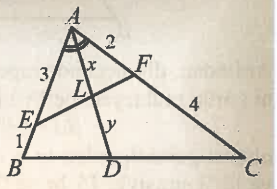
A) 5 B) $\frac{66}{13}$ C) $\frac{69}{13}$ **D)** $\frac{75}{13}$ E) 6

21.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$[BE]$ iç açıortay
$|AE| = 4$ br
$|CE| = 6$ br
$|FD| = 3$ br
olduğuna göre $|AF|$ kaç br dir?



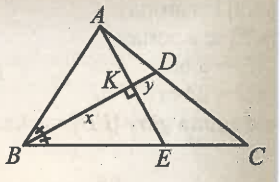
A) 3,8 **B) 4** C) 4,2 D) 4,5 E) 4,8

22.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(DAC)$
$|AE| = 3$ birim
$|BE| = 1$ birim
$|AF| = 2$ birim
$|CF| = 4$ birim
$|AL| = x$ birim
$|DL| = y$ birim
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



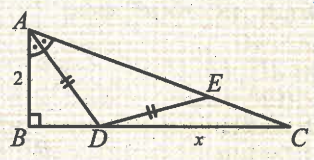
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ **E) 1**

23.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
$AE \perp BD$
$3\cdot|AB| = 2\cdot|BC|$
$|BK| = x$ br
$|KD| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



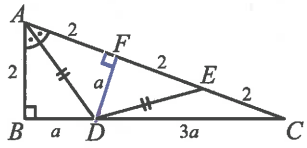
A) 2 B) 3 C) 4 **D) 5** E) 6

Örnek. *ABC dik üçgen*
$AB \perp BC$
AD açıortay
$|AD| = |DE|$
$|AE| = 2\cdot|EC|$
$|AB| = 2$ br
$|DC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{5}$ E) 5

Çözüm: D noktasından AC'ye inilen dikme ayağına F diyelim. $|DB| = |DF|$ ve $|AB| = |AF|$ olacağını biliyoruz.

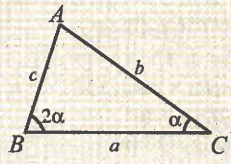


Diğer yandan, ADE ikizkenar üçgen olduğundan $|AF| = |FE|$ olacaktır. $|DB| = |DF| = a$ br dersek, iç açıortay teoreminden $|DC| = 3a$ br olacaktır. CFD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $2\sqrt{2}a = 4$ eşitliğinden $a = \sqrt{2}$, dolayısıyla da $x = 3a = 3\sqrt{2}$ bulunur.

Doğru cevap: C.

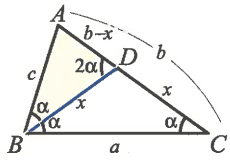
İç açıortay teoremi, tavsiye etmesek de α-2α sorularının çözümünde de kullanılabilir. Hemen bir örnek verelim.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(C) = \alpha$
$m(B) = 2\alpha$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre b^2 ifadesinin a ve c cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a\cdot c$ B) $a + c$ C) $a^2 + c^2$ D) $a\cdot(a + c)$ E) $c\cdot(a + c)$

Çözüm: $[BD]$ iç açıortayını çizip boyuna x br diyelim. DBC üçgenlerinin taban ölçüleri eşit olduğundan, ikizkenardır. $|CD| = x$ br bulunduğundan, $|AD| = b - x$ br dir.



ABD ile ACB üçgenleri benzer olacağından

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{b} = \frac{b-x}{c}$$

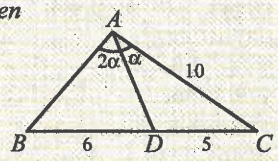
eşitliklerinin ilkinden $x = \frac{ac}{b}$, ikincisinden $x = \frac{b^2 - c^2}{b}$ bulunur. Bu iki x değeri eşitlenirse

$$b^2 - c^2 = ac$$

yani $b^2 = c^2 + ac = c(a + c)$ bulunur.

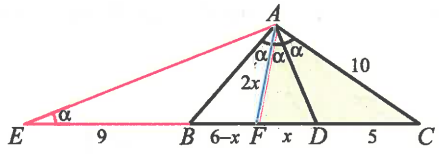
Doğru cevap: E.

Örnek [Birey]. *ABC bir üçgen*
$m(BAD) = 2\cdot m(DAC) = 2\alpha$
$|AC| = 10$ br
$|DC| = 5$ br
$|BD| = 6$ br
olduğuna göre
$|ADC|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Çözüm: Önce CB doğrusu üzerinde $m(CEA) = m(CAD)$ olacak şekilde bir E noktası alalım.



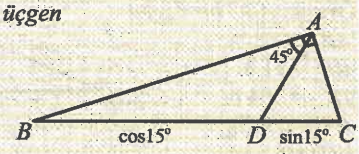
CAD ve CEA üçgenlerinin benzerliğinden $|EC| = 20$ br bulunur. Sonra BAD açısının açıortayını çizelim. İç açıortay teoreminden $|FD| = x$ br ise $|AF| = 2x$ br olur. Aynı benzerliği FEA ve FAB üçgenlerinde görürsek;

$$(2x)^2 = (6-x)\cdot(15-x)$$
$$4x^2 = 90 - 21x + x^2$$
$$3x^2 + 21x - 90 = 0$$
$$x^2 + 7x - 30 = 0$$
$$(x+10)\cdot(x-3) = 0$$

olur ki buradan $x = 3$ bulunur. O halde $AF \perp EC$ olup $|ADC| = 5\cdot 6/2 = 15$ br^2 bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$BA \perp AC$
$m(BAD) = 45^\circ$
$|BD| = \cos 15^\circ$ br
$|DC| = \sin 15^\circ$ br



olduğuna göre $|ABC|$ *kaç* br^2 *dir?*

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{9}{16}$

Çözüm: $m(BAD) = 45^\circ$ demek, $[AD]$ iç açıortay demektir. İç açıortay teoreminden

$$\tan ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \tan 15^\circ$$

diye $m(ABC) = 15^\circ$ olur. A'dan BC'ye inilen dikme ayağı H olsun. 15°-75°-90° üçgeni kuralı gereği

$$|AH| = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{4}$$

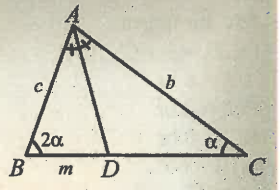
olur. O halde

$$|ABC| = \frac{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)\cdot\left(\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{4}\right)}{2}$$
$$= \frac{\left(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ\right)}{8}$$
$$= \frac{1+\sin 30^\circ}{8} = \frac{3}{16}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

24.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(BCA) = \alpha$
$m(ABC) = 2\alpha$
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|BD| = m$ br
olduğuna göre *m*'nin *b* ve *c* türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



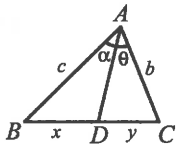
A) $\sqrt{bc}$ B) $\sqrt{b^2+c^2}$ C) $\sqrt{b+c}$ D) $b-c$ E) $2c-b$

İç Açıortay Teoremi'nin Karşıtı da Doğrudur. Hani üçgende bir kesen iç açıortay olduğundan yan kenarların oranı tabanların oranına eşit oluyor ya, eğer yan kenarların oranı tabanların oranına eşit olursa da kesen iç açıortaydır.

Yani, yandaki şekle göre;

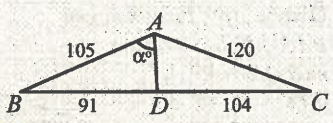
$\alpha = \theta$ *ise* $\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$ *ve*

$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$ *ise* $\alpha = \theta$ *olur.*



Bunu, *bir doğru parçasının üzerinde o doğru parçasını istenen oranda bölen tek bir nokta vardır* bilgisiyle kanıtlayabilirsiniz. Yani, A'ya ait iç açıortay ayağına N deyip işlem yaparsanız N ile D'nin çakışık olması gerektiği çıkacaktır.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 105$ br
$|BD| = 91$ br
$|DC| = 104$ br
$|CA| = 120$ br
$m(DAB) = \alpha°$
olduğuna göre α *kaçtır?*



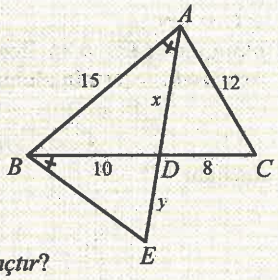
A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

Çözüm: Bu soruda öncelikle $\frac{105}{120} = \frac{91}{104}$ olduğu fark edilmeli. Anlayacağınız $[AD]$ iç açıortaymış. Şu durumda CAB açısının ölçüsünü bulursak, onun yarısı cevap olacak.

ABC üçgeninin kenar uzunlukları 105-120-195 olup bu değerleri 15 ile sadeleştirirsek 7-8-13 ile karşılaşırız ki böyle bir üçgende 13'ün karşısındaki açının ölçüsünün 120° olduğunu daha önce söylemiştik. Unutanlar 7-8-13 üçgeninde kosinüs teoremi yapabilirler.

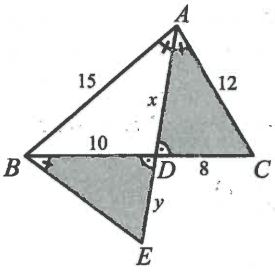
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
A, D, E doğrudaş
$m(EBD) = m(BAE)$
$|AB| = 15$ br
$|BD| = 10$ br
$|DC| = 8$ br
$|CA| = 12$ br
$|AD| = x$ br
$|DE| = y$ br
olduğuna göre $x \cdot y$ *çarpımı kaçtır?*



A) 48 B) 54 C) 64 D) 72 E) 80

Çözüm: ABC üçgeninde $\frac{15}{12} = \frac{10}{8}$ olduğundan AD iç açıortaydır.



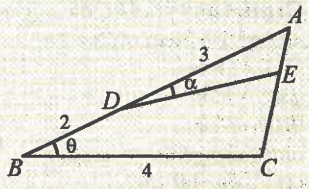
O halde $m(EBD) = m(BAE) = m(CAD)$ olduğundan EBD ile CAD üçgenleri benzerdir. Gerekli eşleme kurulursa;

$$\frac{10}{x} = \frac{y}{8}$$

eşitliğinden $x \cdot y = 80$ olarak bulunur.

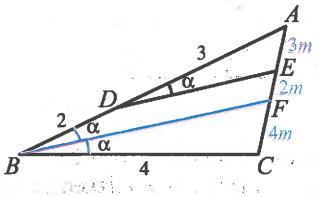
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|EC| = 2 \cdot |AE|$
$|AD| = 3$ br
$|DB| = 2$ br
$|BC| = 4$ br
$m(ABC) = \theta$
$m(ADE) = \alpha$
olduğuna göre α*'nın* θ *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{\theta}{5}$ B) $\frac{\theta}{4}$ C) $\frac{\theta}{3}$ D) $\frac{\theta}{2}$ E) θ

Çözüm: B'den DE'ye paralel çizilen doğru AC'yi F'de kessin.



$|AE| = 3m$ br dersek, Tales Teoremi gereği $|EF| = 2m$ br ve $|FC| = 4m$ br olur. ABC üçgeninde

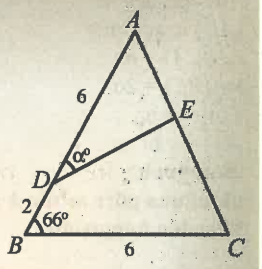
$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|FA|}{|FC|}$$

sağlandığından ABC üçgeninde $[BF]$'nin iç açıortaydır.

O halde $\theta = 2\alpha$ olması gerektiğinden $\alpha = \frac{\theta}{2}$ olmalıdır.

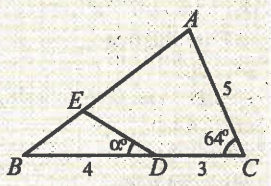
Doğru cevap: D.

25.
ABC bir üçgen
$4 \cdot |CE| = 3 \cdot |EC|$
$|AD| = 6$ br
$|DB| = 2$ br
$|BC| = 6$ br
$m(B) = 66°$
$m(ADE) = \alpha°$
olduğuna göre
α kaçtır?



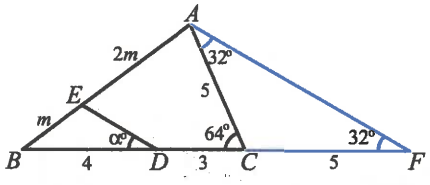
A) 22 B) 25 C) 30 **D) 33** E) 42

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AE| = 2\cdot|EB|$ br
$|AC| = 5$ br
$|DC| = 3$ br
$|BD| = 4$ br
$m(ACB) = 64^\circ$
$m(EDB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 15 B) 16 B) 18 D) 30 E) 32

Çözüm: Yine C'den ED'ye paralel çizerek çözebilirdik ama bu sefer farklı bir teknik gösterelim:



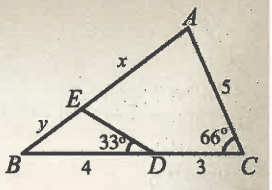
$|BE| = m$ br olsun dersek, $|EA| = 2m$ br olur. $[BC]$'yi C yönünde 5 br uzatırsak, ACF ikizkenar üçgen olur.

$$\frac{|BE|}{|EA|} = \frac{|BD|}{|DF|}$$

eşitliği sağlandığından Tales Teoremi'nin karşıtı gereği $AF \,//\, ED$ olur. O halde $m(EDB) = m(AFB) = 32^\circ$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

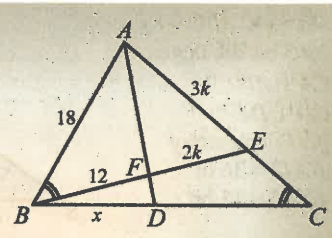
26.
ABC bir üçgen
$m(BDE) = 33^\circ$
$m(BCA) = 66^\circ$
$|AC| = 5$ br
$|BD| = 4$ br
$|CD| = 3$ br
$|AE| = x$ br
$|BE| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ **oranı kaçtır?**

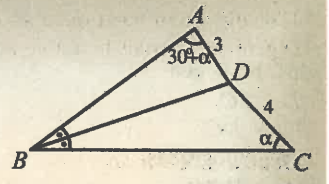
A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

27.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|AB| = 18$ br
$|BF| = 12$ br
$|FE| = 2k$ br
$|AE| = 3k$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



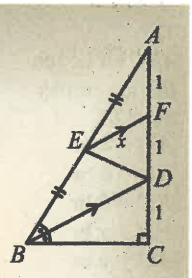
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

28.
ABCD bir dörtgen
$m(ABD) = m(DBC)$
$m(BCD) = \alpha$
$m(DAB) = \alpha + 30^\circ$
$|AD| = 3$ br
$|DC| = 4$ br
olduğuna göre *DBC* **üçgensel bölgesinin alanı,** *ABD* **üçgensel bölgesinin alanından kaç br² fazladır?**



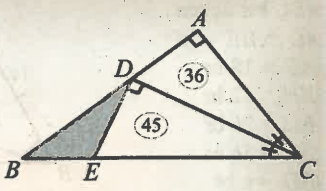
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

29.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
BD iç açıortay
$EF \,//\, BD$
$|AE| = |EB|$
$|CD| = |DF| = |FA| = 1$ br
olduğuna göre $|EF| = x$ **kaç br dir?**



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

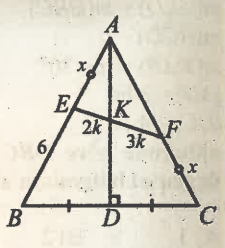
30.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$CD \perp DE$
$[CD]$ iç açıortay
$|CAD| = 36$ br^2
$|CDE| = 45$ br^2



olduğuna göre taralı DBE üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

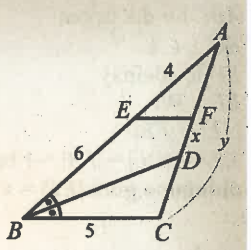
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

31.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = |DC|$
E, K, F doğrudaş
$|EK| = 2k$ br
$|KF| = 3k$ br
$|EB| = 6$ br
olduğuna göre
$|AE| = |FC| = x$ kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

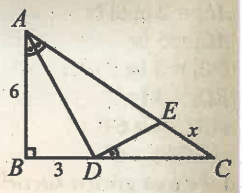
32.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
$EF \parallel BC$
$|AE| = 4$ br
$|EB| = 6$ br
$|BC| = 5$ br
$|FD| = x$ br
$|AC| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ kaçtır?

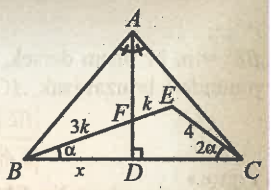
A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{1}{3}$

33.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(CAD) = m(DAB) = m(EDC)$
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 3$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ kaç br dir?



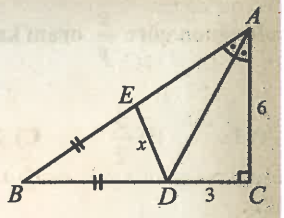
A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

34.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$AD \perp BC$
$m(ECB) = 2 \cdot m(EBC) = 2\alpha$
$|BF| = 3 \cdot |FE| = 3k$ br
$|CE| = 4$ br
olduğuna göre
$|BD| = x$ kaç br dir?



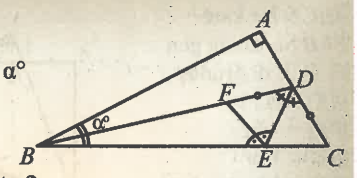
A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

35.
ABC bir dik üçgen
$AC \perp BC$
$m(CAD) = m(DAB)$
$|AC| = 6$ br
$|DC| = 3$ br
$|BE| = |BD|$
olduğuna göre
$|ED| = x$ kaç br dir?



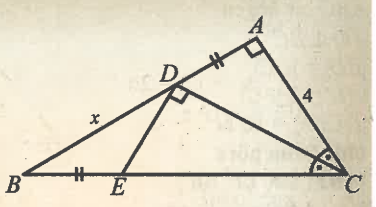
A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{13}$ E) 4

36.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$m(ABD) = m(CBD) = \alpha°$
$m(BDE) = m(CDE)$
$m(DEF) = m(BEF)$
$|DF| = |DC|$
olduğuna göre α kaçtır?



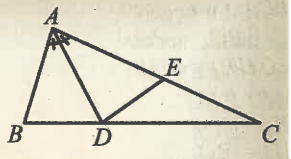
A) 6 B) 7,5 C) 9 **D) 10** E) 15

37.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$CD \perp DE$
$|AD| = |BE|$
$|AC| = 4$ br
olduğuna göre
$|BD|$ kaç br dir?



A) 8 **B) 4** C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

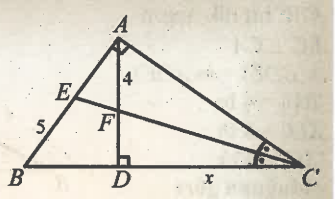
38.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$|AB| + |AE| = |AC|$
$|ABD| = 10$ br^2
$|DEC| = S$ br^2



olduğuna göre S için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

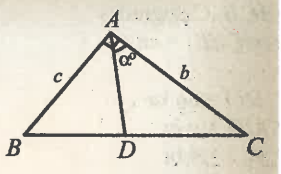
A) $S = 10$ B) $S < 10$ C) $S > 10$ D) $S = 5$ E) $S < 5$

39.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$m(ACE) = m(ECB)$
$|AF| = 4$ br
$|EB| = 5$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 8,1 C) 9 **D) 9,6** E) 10

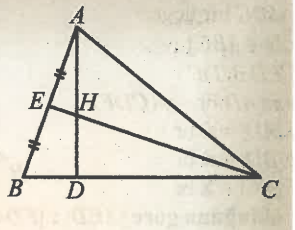
40.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$m(CAD) = \alpha°$



olup $\frac{|ABD|}{|ADC|} = \frac{c}{b}$ **olduğuna göre α kaçtır?**

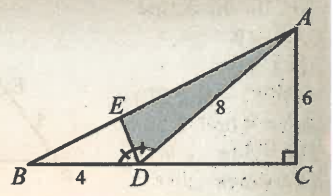
A) 22,5 B) 30 C) 36 **D) 45** E) 60

41.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{H\}$
H diklik merkezi
$|AE| = |EB|$
$4 \cdot |AH| = 5 \cdot |HD|$
$|EH| = \sqrt{10}$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 240 **B) 270** C) 300 D) 360 E) 540

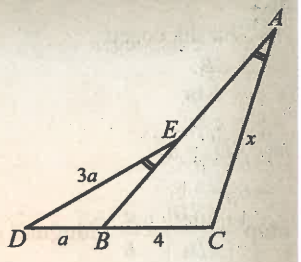
42.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$m(BDE) = m(ADE)$
$|BD| = 4$ br
$|DA| = 8$ br
$|AC| = 6$ br
olduğuna göre
$|AED|$ kaç br^2 dir?



A) 12 B) 10 C) 9 **D) 8** E) 6

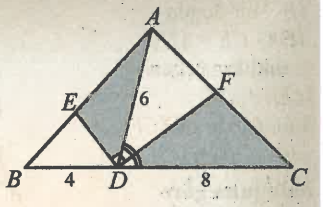
43.
ABC bir dik üçgen
D, B, C doğrudaş
$m(DEB) = m(A)$

$|DE| = 3a$ br
$|DB| = a$ br
$|BC| = 4$ br
$|CA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



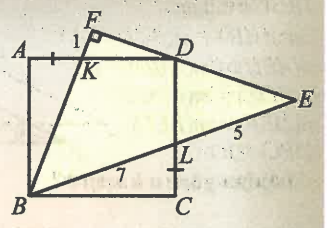
A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

44.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$ED \perp DF$
$m(ADF) = m(CDF)$
$|AD| = 6$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 8$ br
olduğuna göre $|AED| : |FDC|$ oranı kaçtır?



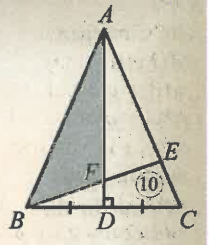
A) 1:2 B) 2:3 C) 3:5 D) 5:8 **E) 7:12**

45.
$ABCD$ bir kare
EFB bir dik üçgen
F, D, E doğrudaş
$|AK| = |CL|$
$|FK| = 1$ br
$|BL| = 7$ br
$|LE| = 5$ br
olduğuna göre
$|BED|$ kaç br^2 dir?



A) $12\sqrt{5}$ B) $15\sqrt{5}$ **C) $16\sqrt{5}$** D) $18\sqrt{5}$ E) $20\sqrt{5}$

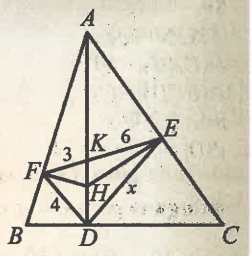
46.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|AE| = 3 \cdot |EC|$
$|DCEF| = 10$ br^2
olduğuna göre
$|ABF|$ kaç br^2 dir?



A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

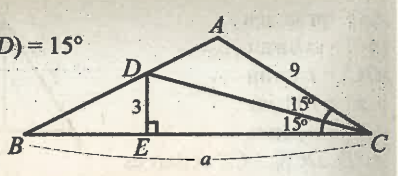
47.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$AH \cap FE = \{K\}$
$HD \perp BC$
$HE \perp CA$
$HF \perp AB$
$|DF| = 4$ br
$|FK| = 3$ br
$|KE| = 6$ br

olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir?



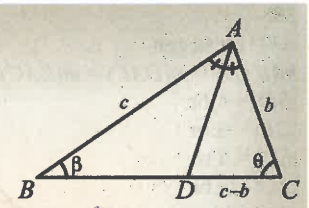
A) 8 B) 8,5 C) 9 D) 9,5 E) 10

48.
ABC bir üçgen
$m(ACD) = m(BCD) = 15°$
$DE \perp BC$
$|DE| = 3$ br
$|AC| = 9$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



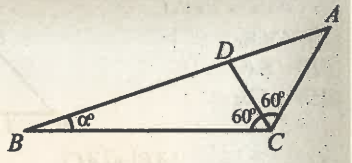
A) 15 **B) 18** C) 20 D) 21 E) 24

49.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$|AB| = c$ birim
$|AC| = b$ birim
$|DC| = c - b$ birim
$m(ABD) = \beta$
$m(ACD) = \theta$
olduğuna göre β ile θ arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



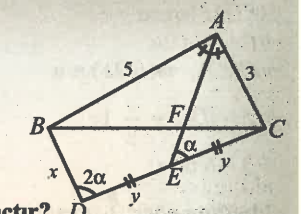
A) $\beta = \frac{\theta}{2}$ B) $\beta = \theta$ C) $\theta = \frac{\beta}{2}$
D) $\beta + \theta = \frac{\pi}{2}$ E) $2\beta + 3\theta = \pi$

50.
ABC bir üçgen
$m(DAC) = 60°$
$m(BCD) = 60°$
$m(BAC) = \alpha°$
$|BD| = |DC| + |CA|$
olduğuna göre α kaç derecedir?



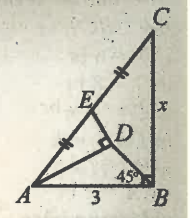
A) 10 B) 15 **C) 20** D) 22,5 E) 25

51.
$ABCD$ bir dörtgen
AE iç açıortay
$|DE| = |EC|$
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 3$ br
$m(BDC) = 2 \cdot m(AEC) = 2\alpha$
olduğuna göre
$|BD| : |DE| = x : y$ oranı kaçtır?



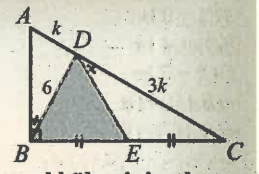
A) $\frac{1}{3}$ **B) $\frac{2}{3}$** C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

52.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$AD \perp DE$
$m(ABD) = 45°$
$|AE| = |EC|$
$|AB| = 3$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



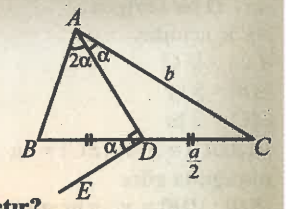
A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

53.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
$m(ABD) = m(CDE)$
$|DC| = 3 \cdot |DA|$
$|BE| = |EC|$
$|BD| = 6$ br
olduğuna göre taralı BED üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



A) $6\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ **D) $9\sqrt{3}$** E) $10\sqrt{3}$

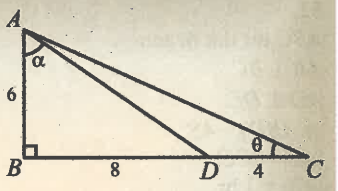
54.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = 2\alpha$
$m(CAD) = m(BDE) = \alpha$
$|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$ br
$|AC| = b$ br



olduğuna göre $\frac{b}{a}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

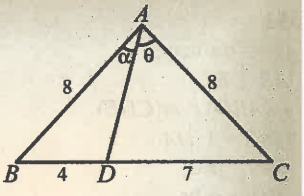
55.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 8$ br
$|DC| = 4$ br
$m(DAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$



olduğuna göre $\frac{\alpha}{\theta}$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

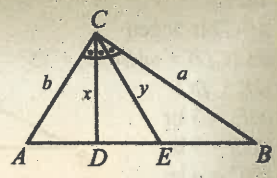
56.
ABC bir üçgen
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 8$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 7$ br
$m(BAD) = \alpha$
$m(DAC) = \theta$



olduğuna göre θ/α oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 2 E) 3

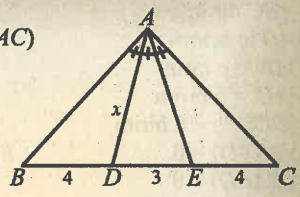
57.
ABC bir üçgen
$|AC| = b$ birim
$|DC| = x$ birim
$|CE| = y$ birim
$|CB| = a$ birim
ACD, DCE, ECB açıları eş



olduğuna gore a, b, x, y arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - y^2 = ab$ B) $ax = by$ C) $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$
D) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{by} + \frac{1}{ax}$ E) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{by} - \frac{1}{ax}$

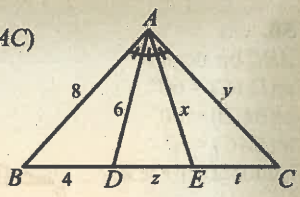
58.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(DAE) = m(EAC)$
$|BD| = 4$ br
$|DE| = 3$ br
$|EC| = 4$ br
$|AD| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

59.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(DAE) = m(EAC)$
$|AB| = 8$ br
$|AD| = 6$ br
$|BD| = 4$ br



olduğuna göre $\frac{|AE| + |AC|}{|DE| + |EC|}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

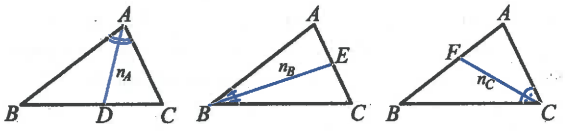
www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

İç Açıortay Uzunluğu

Geçen yazımızda, üçgende iç açıortay teoremini yani bir üçgende iç açıortayların kenarları hangi oranda böldüğünü öğrendik. Şimdi sıra bir üçgenin iç açıortaylarının boyunu ölçmeye geldi.



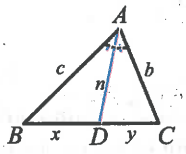
Üçgende iç açıortayların boyları genellikle n harfi ile gösterilir. İç açıortay hangi açıya ait ise o köşenin ismini de n'ye alt simge olarak koyarız. n_A, n_B, n_C gibi. Alt simgelerin büyük harf ile yazıldığına dikkat ediniz. Bazı kitaplarda alt simge a, b, c gibi küçük harflerle gösteriliyor. Halbuki açıortay kenarlarla değil, açılarla ilgili bir kavramdır. Böyle yazmak daha uygundur.

Neyse biz konumuza dönelim. Üçgene ait bir iç açıortay nihayetinde üçgene ait bir kesen olduğundan, her kesen boyunu bulurken yapabileceğimiz gibi Stewart teoreminden yardım isteyeceğiz. Tabi bu arada iç açıortay teoremi de gerekecek. Onu zaten halletmiş bulunuyoruz.

Teorem. *Bir üçgende herhangi bir iç açıortay uzunluğunun karesi, yan kenar uzunlukları çarpımının, iç açıortayın tabanı ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımının farkına eşittir.*

Yani teoremin dediği kısaca şu:

Yandaki gibi bir üçgende
$n^2 = b\cdot c - x\cdot y$.



Kanıt: İç açıortay, nihayetinde üçgene ait bir kesendir. Problem de kesenin boyunu hesaplama olduğundan aklımıza Stewart teoremi gelmeli... Stewart Teoremi'nden

$$n^2 = \frac{c^2 y + b^2 x}{x+y} - xy$$

olduğunu biliyoruz. Bunun yanında iç açıortay teoreminden $c\cdot y = b\cdot x$ olduğundan, $c\cdot y$ yerine $b\cdot x$ ve $b\cdot x$ yerine $c\cdot y$ yazılırsa

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{c(cy)+b(bx)}{x+y} - xy \\ &= \frac{c(bx)+b(cy)}{x+y} - xy \\ &= \frac{bc(x+y)}{x+y} - xy \\ &= bc - xy \end{aligned}$$

elde edilir.

İç Açıortay Boyunun Kenarlar Cinsinden İfadesi. Aslında bu formül ile birlikte, üç kenarı bilinen üçgenlerin üç iç açıortayının da boyunu hesaplayabileceğimizi söyleyebiliriz. Çünkü $x + y = a$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$ olduğundan $x = c\cdot k$ ve $y = b\cdot k$ denecek şekilde pozitif bir k reelinin varlığından bahsedebiliriz.

$$x + y = c\cdot k + b\cdot k = (c+b)\cdot k = a$$

olduğundan $k = \frac{a}{c+b}$ olur. O halde

$$x = c\frac{a}{c+b} \quad \text{ve} \quad y = b\frac{a}{c+b}$$

dir. Bulunanlar denklemde yerlerine yazılırsa;

$$n^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

elde edilir.

Diğer iç açıortaylar için de benzer işlemler yapılırsa

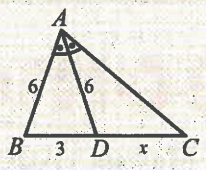
$$n_A^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

$$n_B^2 = ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]$$

$$n_C^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

formüllerine ulaşabilirsiniz.

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] iç açıortay
$|BD| = 3$ br
$|AB| = |AD| = 6$ br
olduğuna göre $|DC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) 6 E) 7

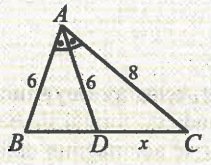
Çözüm: İç açıortayın boyu verilmiş ama şu an için hem $|DC|$ hem de $|AC|$ bilinmediğinden iç açıortayın boyuna ait formülü kullanamayız. İç açıortay teoreminden her uzunluğu en azından tek bilinmeyen cinsinden yazmalıyız.
$|AB| = 2\cdot|BD|$ olduğundan $|AC| = 2\cdot|DC|$ olmalıdır. O halde $|DC| = x$ br verildiğinden $|AC| = 2x$ br diyebiliriz. İç açıortayın boyunu hesaplayan formülden,

$$6^2 = 6\cdot 2x - 3\cdot x = 9x$$

eşitliğinden $x = 4$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] iç açıortay
$|AC| = 8$ br
$|AB| = |AD| = 6$ br
olduğuna göre
$|DC| = x$ *kaç br dir?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

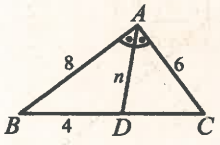
Çözüm: $|BD|$ değerini de x cinsinden bulalım ki şekildeki tüm uzunluklar tek bir bilinmeyene bağlı olsun.
$|AB| : |AC| = 3 : 4$ diye $|BD| = 3k$ br dersek $|DC| = x = 4k$ br olur. İç açıortayın boyunun formülünden

$$6^2 = 6\cdot 8 - 3k\cdot 4k$$

bulunur ki buradan $k = 1$ yani $x = 4k = 4$ olduğu görülür.

Doğru cevap: B.

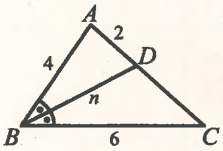
1.



n kaçtır?

6

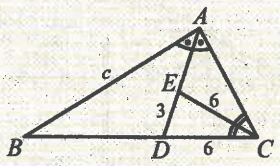
2.



n kaçtır?

$3\sqrt{2}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] ve [CE] iç açıortay
$|DE| = 3$ br
$|CD| = |CE| = 6$ br
olduğuna göre
$|AB| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: Sorudaki *ADC* üçgeninin aslında iki önceki sorudaki *ABC* üçgeni olduğuna dikkat ediniz. O halde oradaki işlemlerin aynısıyla önce $|AC|$ ve $|AE|$ değerlerini bulacağız.

$|CD| = 2\cdot|DE|$ olduğundan $|CA| = 2\cdot|AE|$ olmalıdır.
$|AE| = m$ br dersek, $|CA| = 2m$ br olur.

$$6^2 = 6\cdot 2m - 3m = 9m$$

eşitliğinden $m = 4$ bulunur. O halde $|AC| = 8$ br dir.
Diğer yandan $|AC| : |DC| = 4 : 3$ diye $|AB| = 4k$ br dersek $|BD| = 3k$ br olur. İç açıortayın boyu formülünden

$$7^2 = 8\cdot 4k - 6\cdot 3k = 14k$$

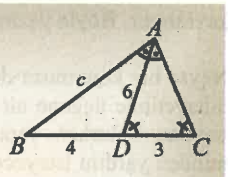
bulunur ki buradan $k = \frac{7}{2}$ çıkar. Bu durumda

$$|AB| = 4x = 4\cdot\frac{7}{2} = 14$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

3.
ABC bir üçgen
[AD] iç açıortay
$m(ADC) = m(C)$
$|AD| = 6$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 3$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c **kaçtır?**

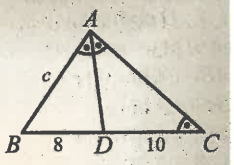


A) 9 B) 8,5 C) 8 D) 7,5 E) 7

4.
Kenar uzunlukları 12, 15 ve 18 birim olan bir üçgenin en kısa iç açıortayının boyu kaç birimdir?

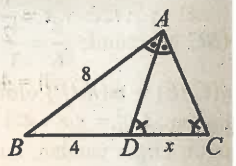
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(BAD) = m(C)$
$|BD| = 8$ br
$|DC| = 10$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c kaçtır?



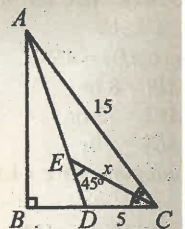
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

6.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(ADC) = m(C)$
$|AB| = 8$ br
$|BD| = 4$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



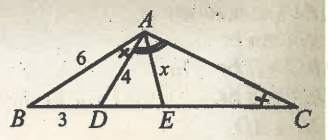
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

7.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
CE iç açıortay
A, E, D doğrusal
$m(CED) = 45°$
$|DC| = 5$ br
$|AC| = 15$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ kaç br dir?



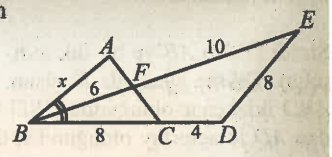
A) 6 B) $3\sqrt{5}$ C) 10 D) $6\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{7}$

8.
ABC bir üçgen
$m(CAE) = m(DAE)$
$m(BAD) = m(C)$
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 3$ br
$|AD| = 4$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



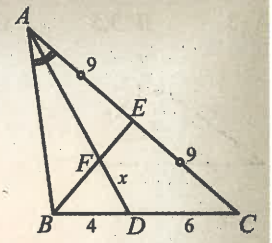
A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{14}$ E) 4

9.
ABC ve EBD birer üçgen
$m(ABE) = m(EBD)$
$|BF| = 6$ br
$|FE| = 10$ br
$|BC| = |DE| = 8$ br
$|CD| = 4$ br
olduğuna göre $|AB| = x$ kaç br dir?



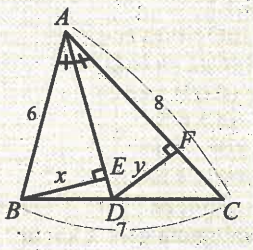
A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) 7

10.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$[BE]$ kenarortay
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 6$ br
$|CE| = 9$ br
$AD \cap BE = \{F\}$
$|FD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



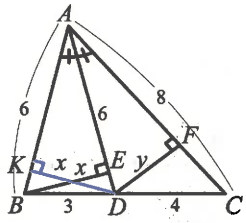
A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{8}{7}\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{16}{7}\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

Soru. *ABC bir üçgen*
[AD] iç açıortay
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 7$ br
$|CA| = 8$ br
$BE \perp AD$
$DF \perp AC$
olduğuna göre
$\frac{|BE|}{|DF|} = \frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*



A) $\frac{6}{7}$ B) $\frac{7}{8}$ C) 1 D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{7}{6}$

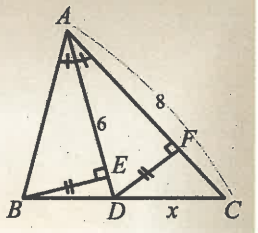
Çözüm: Üçgenimizin üç kenar uzunluğu da belli olduğundan daha önce yaptığımız işlemlerle iç açıortayın boyunu rahatlıkla 6 br olarak buluruz. O halde *ABD* üçgeni ikizkenardır.



Şimdi *D*'den *AB*'ye bir dik indirelim. Dikme ayağı da *K* olsun. *ABD* ikizkenar olduğundan $|BE| = |DK|$ olur. Diğer yandan *AD* iç açıortay olduğundan $|DF| = |DK|$ olmalıdır ki bu da $x/y = 1$ demektir.

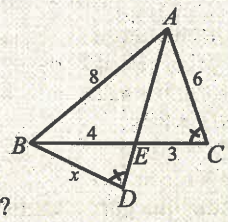
Doğru cevap: C.

11.
ABC üçgen
AD iç açıortay
$BE \perp AD$
$DF \perp CA$
$|BE| = |DF|$
$|AD| = 6$ birim
$|AC| = 8$ birim
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç birimdir?



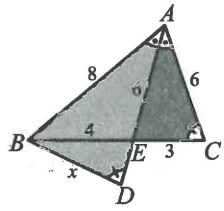
A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

Örnek. *ABC bir üçgen*
A, E, D doğrudaş
$m(BDA) = m(BCA)$
$|AB| = 8$ br
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 3$ br
$|CA| = 6$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

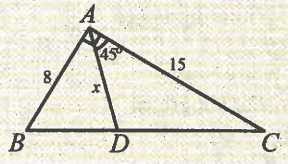
Çözüm: Daha önce, üçgende bir kesen çizildiğinde, yanların oranı tabanların oranına eşit olduğunda o kesen iç açıortaydır bilgisini vermiştik.



ABC üçgeninde $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ olduğundan *AE* iç açıortay yani $m(CAE) = m(EAB)$ olmalıdır. İç açıortayın boyu formülünden $|AE|^2 = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 36$ olduğundan $|AE| = 6$ br bulunur. Diğer yandan, bu açıortaylık *ABD* ile *AEC* üçgenlerini A.A. Benzerliği gereğince benzer yapacaktır. Benzerlik oranı 4/3 olduğundan $x = 4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

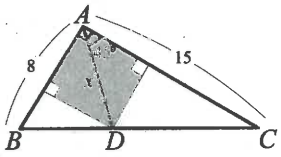
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$m(CAD) = 45°$
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 15$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\frac{225}{64}$ B) $\frac{120}{23}$ C) $\frac{8}{15}\sqrt{2}$ D) $\frac{15}{8}\sqrt{2}$ E) $\frac{120}{23}\sqrt{2}$

Akla İlk Gelen Çözüm: *CAD* açısının ölçüsünün 45° olması *AD*'nin iç açıortay olması demektir. Bu sebeple $|BD| : |DC| = 8 : 15$ olduğunu ve ek olarak $|BC| = 17$ br olduğunu bildiğimizden değerler kötü de çıksa $|BD|$ ve $|DC|$ değerlerini hesaplayabiliriz. Ardından yine değerler berbat da olsa iç açıortayın boyunu veren formülden $|AD|$ değerini bulabiliriz.

Çok Güzel Hareketlerle Çözüm: D'den dik kenarlara dikmeler indirirsek, sorulan uzunluğun aslında 8-15-17 üçgeninin iç karesinin köşegeni olduğu görülür.



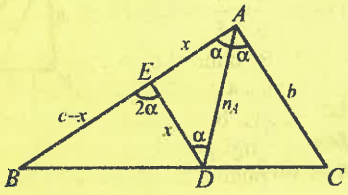
Benzerlik dersinden bu karenin bir kenarının

$$\frac{8\cdot 15}{8+15}=\frac{120}{23}$$

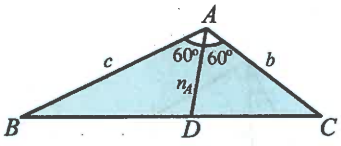
birim olduğunu biliyoruz. O halde $|AD|=\frac{120}{23}\sqrt{2}$ br olmalıdır.

Doğru cevap: E.

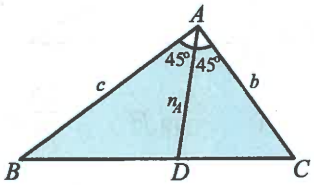
Uyarı. Genel olarak; bu şekillerde $\frac{2\cos\frac{A}{2}}{n_A}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ eşitliği geçerlidir.



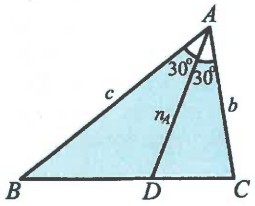
Çünkü, BED ve BAC benzerliğinden $\frac{c-x}{c}=\frac{x}{b}$ yani $\frac{1}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ bulunduktan sonra AED üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa $\frac{n_A}{\sin 2\alpha}=\frac{x}{\sin\alpha}$ yani $x=\frac{n_A}{2\cos\alpha}$ olur. Bu değer ilk eşitlikte yerine yazılırsa istenilen elde edilir.



$$\frac{1}{n_A}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

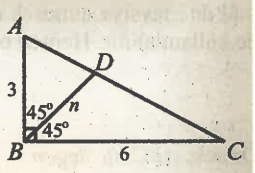


$$\frac{\sqrt{2}}{n_A}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$



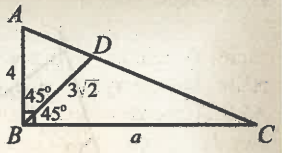
$$\frac{\sqrt{3}}{n_A}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

12.
ABC bir dik üçgen
$AB\perp BC$
$[BD]$ iç açıortay
$|AB|=3$ br
$|BC|=6$ br
$|BD|=n$ br
olduğuna göre n kaçtır?



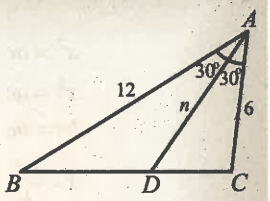
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $3\sqrt{2}$

13.
ABC bir dik üçgen
$[BD]$ iç açıortay
$|AB|=4$ br
$|BD|=3\sqrt{2}$ br
$|BC|=a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

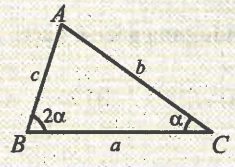
14.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(CAD)=m(DAB)=30°$
$|CA|=6$ br
$|AB|=12$ br
$|AD|=n$ br
olduğuna göre n kaçtır?



A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $8\sqrt{3}$

Yeniden α-2α Üçgeni. İç açıortayın boyunu veren formül de –tavsiye etmesek de– α-2α sorularının çözümünde kullanılabilir. Hemen bir örnek verelim.

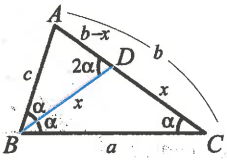
Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(B) = 2\alpha$
$m(C) = \alpha$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br



olduğuna göre b^2 ifadesinin a ve c cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a \cdot c$ B) $a + c$ C) $a^2 + c^2$ D) $a \cdot (a + c)$ E) $c \cdot (a + c)$

Çözüm: $[BD]$ iç açıortayı çizilip boyuna x br denirse $|DC| = x$ br ve bundan dolayı $|AD| = b - x$ br olacaktır.



Şimdi iç açıortay teoreminden x değerini bulmaya çalışalım.

$$\frac{b-x}{x} = \frac{c}{a}$$
$$ba - xa = xc$$
$$xa + xc = ba$$
$$x = \frac{ba}{a+c}$$

Diğer yandan iç açıortayın boyunu veren formül gereği

$$x^2 = ac - (b-x)x$$
$$x^2 = ac - bx + x^2$$
$$bx = ac$$
$$x = \frac{ac}{b}$$

bulunacaktır. Bu iki x değeri eşitlenirse

$$\frac{ba}{a+c} = \frac{ac}{b}$$

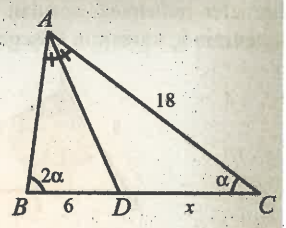
yani

$$b^2 = c^2 + ac = c(a+c)$$

bulunur.

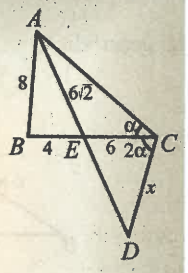
Doğru cevap: E.

15.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$m(ABC) = 2\alpha$
$m(BCA) = \alpha$
$|AC| = 18$ br
$|BD| = 6$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



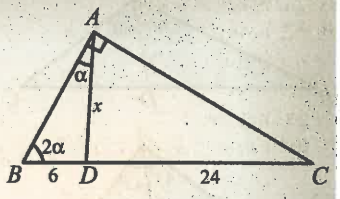
A) 8 **B) 9** C) 10 D) 12 E) 15

16.
ABC ve *ADC* birer üçgen
$m(DCB) = 2 \cdot m(BCA)$
$|AB| = 8$ br
$|BE| = 4$ br
$|EC| = 6$ br
$|AE| = 6\sqrt{2}$ br
olduğuna göre
$|CD| = x$ kaç br dir?



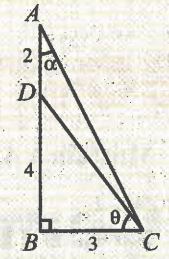
A) 9 B) 10 **C) 12** D) 15 E) $6\sqrt{2}$

17.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$m(B) = 2 \cdot m(DAB)$
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 24$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç br dir?



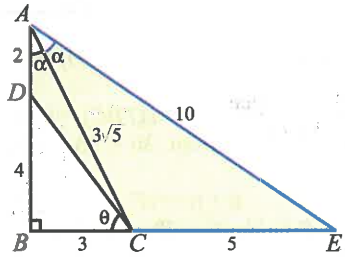
A) 9 B) 10 **C) $6\sqrt{3}$** D) $8\sqrt{2}$ E) 12

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$D \in [AB]$
$|AD| = 2$ br
$|DB| = 4$ br
$|BC| = 3$ br
$m(CAB) = \alpha$
$m(DCB) = \theta$
olduğuna göre α *ile* θ *arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\alpha = \theta$ B) $\alpha = 2\theta$ C) $\theta = 2\alpha$
D) $\alpha + 2\theta = \pi$ E) $2\alpha + \theta = \pi$

Çözüm: AB'nin AC'ye göre simetriği olan doğrunun BC ile kesiştiği noktaya E diyelim.



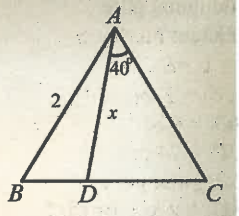
Oluşan ABE dik üçgeninde $[AC]$ iç açıortay olmuş olur. $|CE| = k$ br denirse, iç açıortay teoremi gereğince $|AE| = 2k$ br olmalıdır ki iç açıortayın boyu formülünden $k = 5$ bulunur. Şu durumda ABE üçgeninin kenar uzunlukları 6-8-10 olarak bulunduğundan ABC ile CBD üçgenleri benzerdir. O halde ABC üçgeninin A açısı ile CBD üçgeninin C açısı eş olmalıdır, bu yüzden $\theta = 2\alpha$ olur.

$$4.(4 + 2) = 3.(3 + 5)$$

eşitliğini fark ederek de $\theta = 2\alpha$ eşitliğine ulaşabilirdiniz.

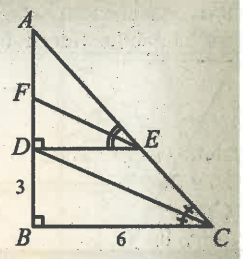
Doğru cevap: C.

18.
ABC bir eşkenar üçgen
$|AB| = 2$ birim
$|AD| = x$ birim
$m(DAC) = 40°$
olduğuna gore
$x^3 + 6x^2$ toplamı kaça eşittir?



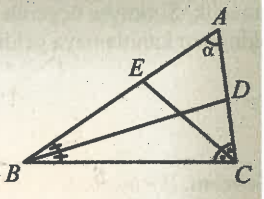
A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

19.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$ ve $AD \perp DE$
$m(BCD) = m(ACD)$
$m(DEF) = m(AEF)$
$|DB| = 3$ br
$|BC| = 6$ br
olduğuna göre
$\frac{|FE|}{|DC|}$ **oranı kaçtır?**



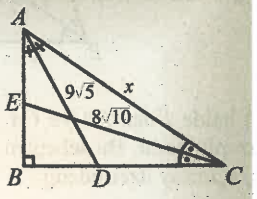
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{8}$

20.
ABC bir üçgen
BD ve *CE* iç açıortay
$|AB| = 2.|CE|$
$|BD| = 2.|AC|$
olduğuna göre
$m(CAB) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 30 B) 45 C) 60 D) 67,5 E) 75

21.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
AD ve *CE* birer iç açıortay
$|AD| = 9\sqrt{5}$ br
$|CE| = 8\sqrt{10}$ br
olduğuna göre
$|AC| = x$ kaç br dir?



A) 24 B) 25 C) 27 D) 30 E) 34

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

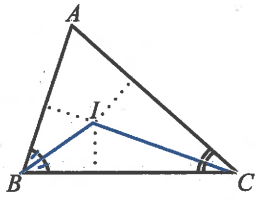
İç Teğet Çember

Üçgeni anlatmaya başladığımız ilk derste üçgenin yardımcı elemanlarının kendi aralarında noktadaş olduklarını kanıtsız olarak söylemiştik. Vakti gelince hepsinin nedenini açıklayacağımızı duyurmuştuk. Sözümüzü tutma zamanı geldi! ☺

Benzerlik dersinin Diklik Merkezi konusunda yüksekliklerin noktadaş olduğunu göstermiş ve nedenlerini açıklamıştık. Şimdiyse üçgenin iç açıortaylarının da noktadaş olduğunu kanıtlamaya geldi sıra. Oldukça kolay!

Teorem. *Bir üçgende iç açıortaylar tek noktada kesişir.*

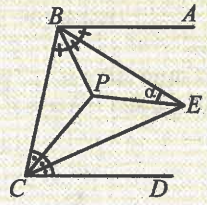
Kanıt: Herhangi bir ABC üçgeni çizelim. B ve C köşelerine ait iç açıortaylar bir I noktasında kesişsin. BI açıortay olduğundan I'dan BA ve BC kenarlarına inen dikme boyları eşittir. CI doğrusu da açıortay olduğundan I'dan BC ve CA kenarlarına inen dikme boyları da eşittir.



O halde I'dan BA ve CA kenarlarına inen dikmeler eşit uzunluktadır. Bu sebepten dolayı I noktası A köşesine ait iç açıortay üzerindedir.

Şimdi bu kesişme üzerine birkaç soru çözeceğiz. Ardından bu kesişim noktasının aslında üçgenin çok çok önemli özel bir noktası olduğunu anlatacağız.

Örnek. $[BA \parallel [CD$
BCP ve BCE birer üçgen
$m(ABE) = m(EBP) = m(PBC)$
$m(BCP) = m(PCE) = m(ECD)$
$m(BEP) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Çözüm: $m(ABE) = m(EBP) = m(PBC) = \theta$ ve $m(BCP) = m(PCE) = m(ECD) = \beta$ olsun. $3\theta + 3\beta = 180^\circ$ olduğundan

$$\theta + \beta = 60^\circ$$

olarak bulunur. O halde $2\theta + 2\beta = 120^\circ$'dir.

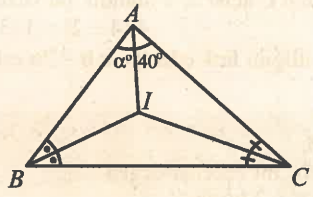
BCE üçgeninde PB ve PC iç açıortay olduğundan PE de iç açıortay olmak zorundadır. İç açı ölçüleri toplamından

$$2\alpha = 60^\circ$$

yani $\alpha = 30^\circ$ olarak bulunur.

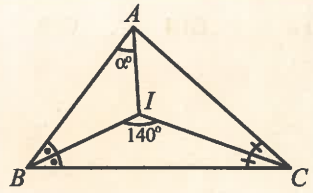
Doğru cevap: B.

1.
ABC bir üçgen
$[BI]$ ve $[CI]$ iç açıortay
$m(CAI) = 40^\circ$
$m(BAI) = \alpha^\circ$
olduğuna göre
α kaçtır?



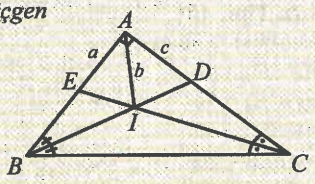
40

2.
ABC bir üçgen
$[BI]$ ve $[CI]$ iç açıortay
$m(BIC) = 140^\circ$
$m(BAI) = \alpha^\circ$
olduğuna göre
α kaçtır?



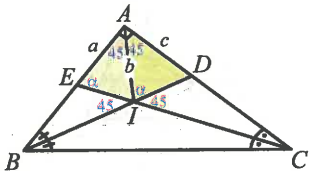
50

Soru Tipi. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ BA
BD iç açıortay
CE iç açıortay
$|AE| = a$ br
$|AI| = b$ br
$|AD| = c$ br
olduğuna göre a, b, c arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $b^2 = a \cdot c$ B) $2b = a + c$ C) $c^2 = a^2 + b^2$
D) $b^2 = a \cdot (a + c)$ E) $c^2 = a \cdot (a + b)$

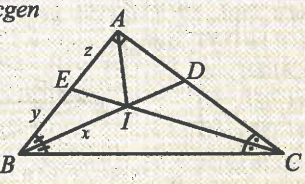
Çözümü: *BD* ve *CE* iç açıortaysa kanıtladığımız üzere *AI* da iç açıortay olmak zorundadır. Üçgende Açı dersinden beri $m(BIC) = 90° + \frac{1}{2} m(A) = 135°$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $m(EIB) = m(DIC) = 45°$ olur.



EBI ve *ABI* üçgenlerinin *B* açılarının ortak olmasından dolayı *AEI* ile *AID* açıları eşit ölçülü çıkarlar. Bu da *AEI* ile *AID* üçgenlerini benzer yapar. Eşleme kurulursa $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ çıkar ki bu da $b^2 = ac$ demek olur.

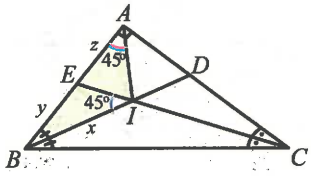
Doğru cevap: A.

Soru Tipi. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ BA
BD iç açıortay
CE iç açıortay
$|BI| = x$ br
$|BE| = y$ br
$|EA| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $2y = x + z$ C) $x^2 = y^2 + z^2$
D) $x^2 = y \cdot (y + z)$ E) $x^2 = z \cdot (y + z)$

Çözümü: *BI* ve *CI* iç açıortaysa kanıtladığımız üzere *AI* da iç açıortay olmak zorundadır. O halde $m(BAI) = 45°$ olduğunu not edelim.



Diğer yandan, Üçgende Açı dersinden beri

$$m(BIC) = 90° + \frac{1}{2} m(A) = 135°$$

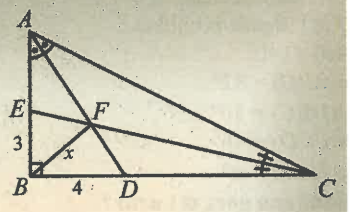
olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $m(BIE) = 45°$ olur. Bu da *BAI* ile *BIE* üçgenlerini benzer yapar.
Eşleme kurulursa

$$x^2 = y \cdot (y + z)$$

olduğu görülür.

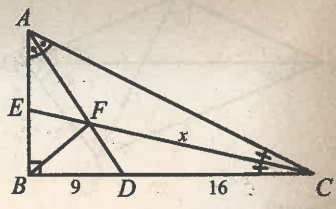
Doğru cevap: D.

3.
ABC dik üçgen
$m(ABC) = 90°$
AD ve *CE* açıortay
$|BE| = 3$ br
$|BD| = 4$ br
olduğuna göre
$|BF| = x$ kaç br dir?



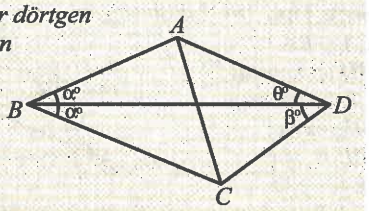
A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{14}$ D) 4 E) $3\sqrt{2}$

4.
ABC dik üçgen
$m(ABC) = 90°$
AD ve *CE* açıortay
$|BD| = 9$ br
$|DC| = 16$ br
olduğuna göre
$|CF| = x$ kaç br dir?



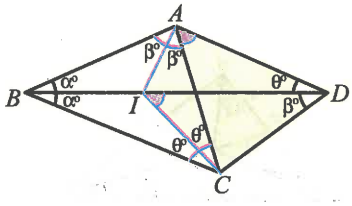
A) 17 B) 18 C) 20 D) 24 E) 25

Soru Tipi. *ABCD bir dörtgen*
[AC] ve [BD] köşegen
$m(ABD) = \alpha^\circ$
$m(CBD) = \alpha^\circ$
$m(CDB) = \beta^\circ$
$m(ADB) = \theta^\circ$
$\alpha + \beta + \theta = 90$
olduğuna göre m(CAB) kaç derecedir?



A) 2α B) 2θ C) 2β D) $\alpha + \beta$ E) $\alpha + \theta$

Çözümü: Şu an için yapacak hiçbir şey görünmüyor. Bekleye bekleye de canımız sıkıldı. Can sıkıntısından *ABC* üçgeninde *C* açısının açıortayını çizelim.



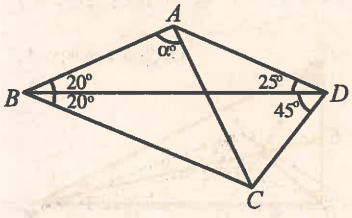
BI ve *CI* iç açıortay olduğundan *AI* da iç açıortay olmak zorundadır.

$m(AIC) + m(ADC) = (90^\circ + \alpha^\circ) + (\beta^\circ + \theta^\circ) = 180^\circ$ olduğundan *AICD* bir kiriş dörtgenidir. O halde

$m(CAB) = 2 \cdot m(CAI) = 2 \cdot m(CDB) = 2\beta^\circ$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

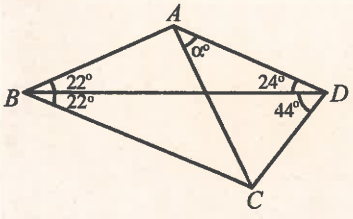
5.



α kaçtır?

90

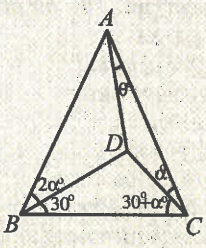
6.



α kaçtır?

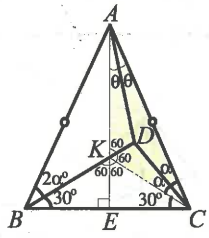
46

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
D noktası iç bölgede
$m(ACD) = \alpha^\circ$
$m(DCB) = 30^\circ + \alpha^\circ$
$m(CBD) = 30^\circ$
$m(ABD) = 2\alpha^\circ$
$m(CAD) = \theta^\circ$
olduğuna göre θ'nın α cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) α B) $30 - \alpha$ C) $15 + \alpha$ D) 2α E) $45 - \alpha$

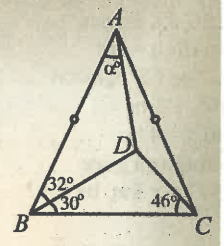
Çözümü: $m(ABC) = m(ACB) = 30^\circ + 2\alpha^\circ$ olduğundan *BAC* üçgeninin ikizkenar olduğuna dikkat ediniz.



A'dan *BC*'ye indirilen dikme *BC*'yi *E*'de, *BD*'yi *K*'de kessin. *BKC* üçgeni de ikizkenar olur. Gerekli açı ölçüleri yerlerine yazılırsa, *AKC* üçgeninde *CD* ve *KD* birer iç açıortay çıkar. İkisi de iç açıortay olduğundan *AD* de iç açıortay olmak zorundadır. O halde *AKC* üçgeninde iç açı ölçüleri toplamı gereği $\theta = 30^\circ - \alpha$ bulunur.

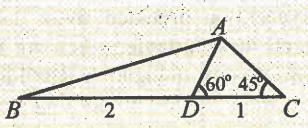
Doğru cevap: B.

7.
ABC bir ikizkenar üçgen
D iç bölgede bir nokta
$|AB| = |AC|$
$m(ABD) = 32^\circ$
$m(DBC) = 30^\circ$
$m(BCD) = 46^\circ$
$m(DAB) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 14 B) 21 C) 35 **D) 42** E) 46

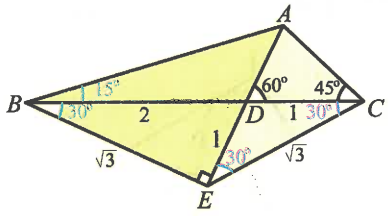
Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = 2$ br
$|DC| = 1$ br
$m(ADC) = 60°$
$m(ACB) = 45°$
olduğuna göre $m(ABC)$ *kaç derecedir?*



A) 7,5 B) 10 C) 15 D) 22,5 E) 30

Çözüm: İki çözüm vereceğiz.

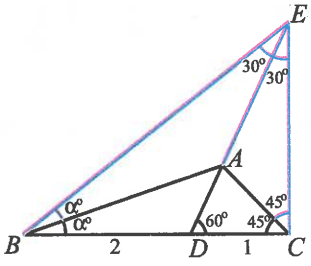
Birinci yol. B'den AD'ye inilen dikme ayağı E olsun.



BED üçgeninin bir 30°-60°-90° üçgeni olduğunu fark edelim. $|BD| = 2$ br diye $|DE| = 1$ br olur. Bu da CDE üçgeninin ikizkenar yapar. Taban açıları 30'ar derece olduğundan $|EC| = \sqrt{3}$ br olduğunu da not edelim. Diğer yandan $|BE| = \sqrt{3}$ br diye BEC üçgeni de ikizkenar olur. Bu noktada fark edilmesi gereken şey, AEC üçgeninin de ikizkenar olduğudur. O halde sonuç olarak BEA ikizkenar dik üçgen olarak bulunmuştur. Bundan dolayı sorulan ABC açısının ölçüsü 15°olur.

Soruyu çözdük çözmesine de, iç açıortaylar bunun neresinde diyebilirsiniz☺ Bu şık çözümü vermeden edemedim. Hemen iç açıortaylarla alakalı çözümü veriyorum.

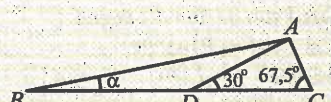
İkinci yol. C'den BC'ye dikme çıkar ve DA'nın bu dikmeyi kestiği noktaya E dersek, EDC 30°-60°-90° üçgeni olur.



$|DC| = 1$ br diye $|ED| = 2$ br olur ki EDB ikizkenar üçgen bulunur. ECB üçgeninde EA ve CA birer içaçıortay olduğundan BA da iç açıortay olmalıdır. O halde $m(ABC) = 15°$ olarak bulunur.

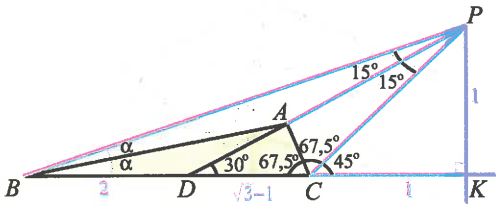
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = 2$ br
$|DC| = \sqrt{3} - 1$ br
$m(ADC) = 30°$
$m(ACB) = 67{,}5°$
olduğuna göre $m(ABC) = \alpha$ *kaç derecedir?*



A) 7,5 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: Dikkat ettiyseniz sorumuz bir önceki çözümlü örnekteki soruyla aynı formatta. O zaman bu soruda da A noktasını iç açıortayların kesişim noktası olarak çıkartmayı hedeflemeliyiz. O soruda bunu C'den BC'ye dik çıkmak sağlıyordu, buradaysa aşağıdaki ACP açısını çizmek sağlar. Bu amaçla $[DA]$'yı A yönünde uzatalım.



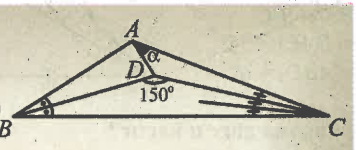
Bu doğru üstünde $m(ACP) = 67{,}5°$ olacak şekilde bir P noktası alalım. P'den BC'ye inilen dikme ayağı da K olsun. PCK ikizkenar dik üçgen olur. $|PK| = |CK| = m$ br dersek, $|PC| = m\sqrt{2}$ br olur. PDK üçgeni 30°-60°-90° üçgeni olduğundan

$$m + \sqrt{3} - 1 = m\sqrt{3}$$

olur ki, buradan $m = 1$ bulunduğundan $|DP| = 2$ br olur. O halde $|BD| = |DP|$ diye $m(DBP) = m(BPD) = 15°$ olur. Sonuçta BDP üçgeninde CA ve PA iç açıortay diye BA da iç açıortaydır. O halde $\alpha = 7{,}5°$ dir.

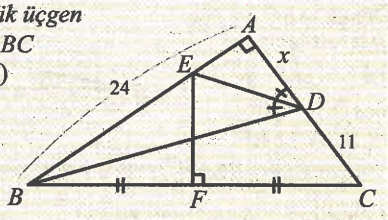
Doğru cevap: A.

8.
ABC bir üçgen
BD iç açıortay
$m(DCB) = 2 \cdot m(DCA)$
$m(CDB) = 150°$
olduğuna göre $m(CAD) = \alpha$ **kaç derecedir?**



A) 15 B) 20 C) 25 **D) 30** E) 35

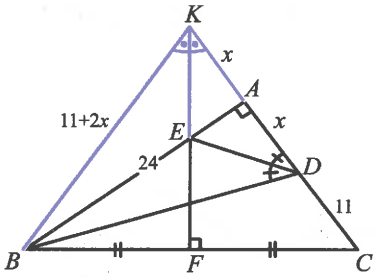
Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp BA$ *ve* $EF \perp BC$
$m(ADE) = m(EDB)$
$|BF| = |FC|$
$|AB| = 24$ br
$|CD| = 11$ br
$|AD| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

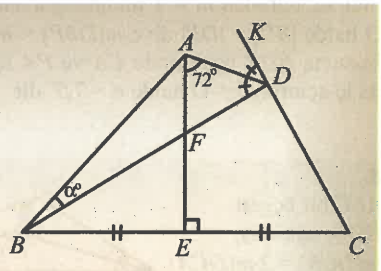
Çözüm: *FE* ile *CA* doğrularının kesim noktası *K* olsun. *K* ile *B*'yi birleştirelim.



CKB üçgeninin ikizkenar olduğunu görelim. O halde *KF* iç açıortaydır. *KBD* üçgeninde *KE* ve *DE* birer iç açıortay olduğundan *BA* da iç açıortay olmalıdır. $BA \perp KD$ diye *KBD* üçgeni de ikizkenardır. Buradan $|KA| = |AD| = x$ br olması gerekir. Bu durumda $|KB| = 11 + 2x$ br olur. *BAK* dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $x = 7$ bulunur.

Doğru cevap: B.

9.
ABCD bir dörtgen
C, D, K doğrudaş
$m(BDA) = m(KDA)$
$AE \perp BC$
$|BE| = |EC|$
$m(DAE) = 72°$
$m(ABD) = \alpha°$



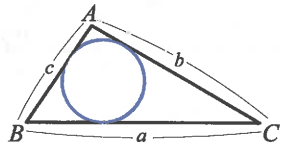
olduğuna göre α kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 **D) 18** E) 20

Eveeet, bu örnekten sonra daha önce anons ettiğimiz üzere iç açıortayların kesişim noktasının üçgenin hangi özel noktası olduğunu anlatabiliriz.

Orası neresi? İç açıortayların kesiştiği nokta elbette rastgele bir nokta değildir! Diğer yardımcı elemanlarda öyle değildi. Öyle ya, bunda da olmamalı. En azından şimdilik böyle düşünüyoruz. Bakalım bakalım.

I noktasından indirdiğimiz üç yüksekliğin boyu eşitti. Lisedeki öğretmenim 'Ne zaman eşit uzunlukta birer köşesi ortak üç doğru parçası görürseniz aklınıza çember gelsin' derdi. Geldi.



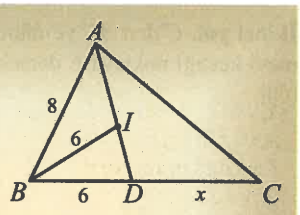
O halde bu *I* noktası bir çember merkezi ve bu dikmeler de birer yarıçap olmalı. Üçgenin kenarlarını dik kestiğini de düşünecek olursak, demek ki çember kenarlara teğet. Hem de içten teğet. Yahu bu düpedüz iç teğet çember.

Toparlayalım: *İç açıortayların kesiştiği yer, üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.*

İç teğet çembere kısaca **iç çember**, iç teğet çember merkezine de kısaca **iç çember merkezi** denebilir. Bu kavramların İngilizceleri sırasıyla Incircle ve Incenter olduğundan iç çember merkezi onları hatırlatacak şekilde genelde *I* ile gösterilir.

I noktası üçgenin içinde üç kenara da uzaklığı eşit olan tek noktadır.

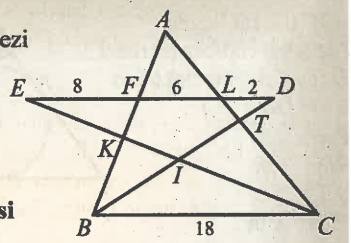
10.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
A, I, D doğrudaş
$|AB| = 8$ br
$|BI| = |BD| = 6$ br
$|DC| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

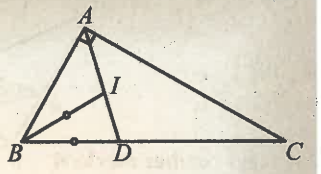
A) 10 **B) 10,5** C) 11 D) 11,5 E) 12

11.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
$ED \,//\, BC$
$|EF| = 8$ br
$|FL| = 6$ br
$|LD| = 2$ br
olduğuna göre
***AFL* üçgeninin çevresi**
kaç br dir?



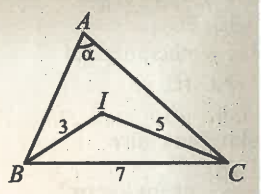
A) 15 B) 16 **C)** 17 D) 18 E) 19

12.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$|BI| = |BD|$
olduğuna göre
$m(C)$ kaç derecedir?



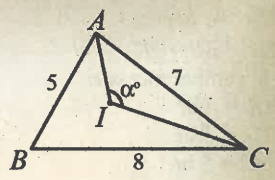
A) 10 B) 15 C) 22,5 **D)** 30 E) 36

13.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
$|IB| = 3$ br
$|BC| = 7$ br
$|CI| = 5$ br
$m(A) = \alpha$
olduğuna göre α kaçtır?



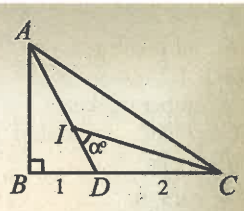
A) 30 B) 45 **C)** 60 D) 67,5 E) 75

14.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
$|CA| = 7$ br
$m(CIB) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



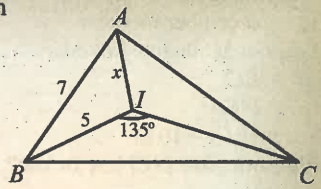
A) 105 **B)** 120 C) 135 D) 150 E) 165

15.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
A, I, D doğrudaş
I iç çember merkezi
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 2$ br
$m(CID) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



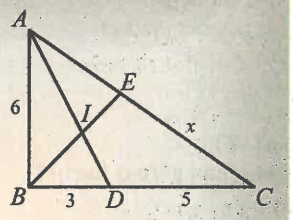
A) 15 B) 30 **C)** 45 D) 60 E) 75

16.
I noktası, ABC üçgeninin
iç teğet çemberinin
merkezidir.
$m(BIC) = 135°$
$|BI| = 5$ birim
$|BA| = 7$ birim
$|AI| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



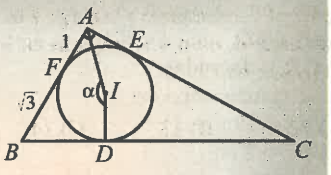
A) 3 **B)** $3\sqrt{2}$ C) 4 D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{7}$

17.
$|ABC|$ bir üçgen
$|AD| \cap |BE| = \{I\}$
I iç çember merkezi
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$|CE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



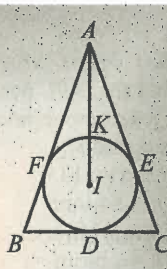
A) $\frac{30}{7}$ B) $\frac{32}{7}$ C) 5 D) $\frac{36}{7}$ **E)** $\frac{40}{7}$

18.
$|ABC|$ bir dik üçgen
$|BA| \perp |AC|$
I iç çember merkezi
D, E, F değme noktaları
$|AF| = 1$ br
$|FB| = \sqrt{3}$ br
olduğuna göre $m(AID) = \alpha$ kaç derecedir?



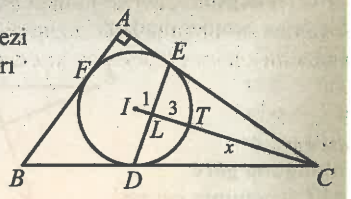
A) 105 B) 120 C) 135 D) 150 **E)** 165

19.
$|ABC|$ bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
D, E, F teğet değme noktaları
$|FB| = |EC|$
$|AK| = 2 \cdot |KI|$
Çevre$(ABC) = 16$ br
olduğuna göre $|AC|$ kaç br dir?



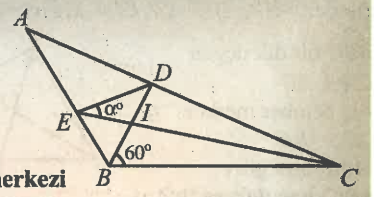
A) 7,5 B) 7 C) 6,5 **D)** 6 E) 5,5

20.
$|ABC|$ dik bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
D, E, F değme noktaları
$|CI| \cap |DE| = \{L\}$
$|CA| \perp |AB|$
$|IL| = 1$ br
$|LT| = 3$ br
$|TC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



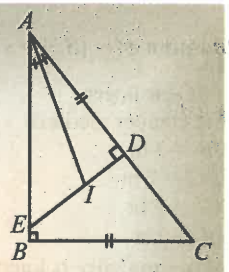
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 **E)** 12

21.
$|ABC|$ bir üçgen
$|BD| \cap |CE| = \{I\}$
$m(DBC) = 60°$
$m(DEC) = \alpha°$
I iç teğet çember merkezi olduğuna göre α kaçtır?



A) 20 **B)** 30 C) 40 D) 45 E) 60

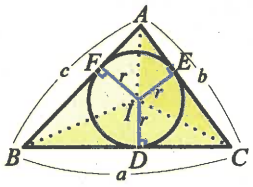
22.
$|ABC|$ bir dik üçgen
$|AB| \perp |BC|$
I iç çember merkezi
$|ED| \perp |AC|$
$|AD| = |BC|$
olduğuna göre
$\frac{|AE|}{|EB|}$ **oranı kaçtır?**



A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 7

Bu çemberin yarıçapı da diğer tüm çemberler gibi genelde r ile gösterilir. Çevresi bilinen bir üçgenin iç çember yarıçapının nasıl bulunabileceğini daha önce alan dersinde anlatmıştık ama burada bir kez daha bulalım:

Teorem. *Yarımçevresi u br ve iç teğet çemberinin yarıçapı r br olan bir üçgenin alanı $u \cdot r$ br^2 dir.*



Kanıt: Üçgenimiz her zamanki gibi ABC üçgeni olsun. İç teğet çemberini de çizelim. Merkezine de I diyelim. İç çemberin merkezinden teğet değme noktalarına yarıçaplar çizilirse, bu yarıçaplar üçgenin kenarlarını dik keseceğinden AIB, BIC ve CIA üçgenlerinin yükseklikleri olur.

$$|AIB| = \tfrac{1}{2}cr$$

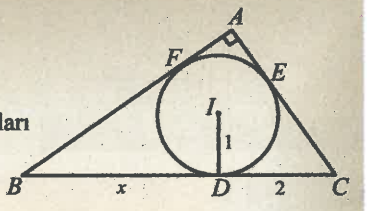
$$|BIC| = \tfrac{1}{2}ar$$

$$|CIA| = \tfrac{1}{2}br$$

Bu üç alan toplanırsa $|ABC|$ bulunur.

$$|ABC| = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \underbrace{\tfrac{1}{2}(a+b+c)}_{u}r = ur.$$

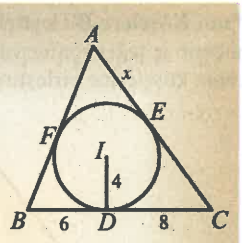
23.
ABC bir dik üçgen
$AC \perp AB$
I iç çember merkezi
D, E, F değme noktaları
$|ID| = 1$ br
$|DC| = 2$ br



olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?

A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 4

24.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
D, E, F değme noktaları
$|BD| = 6$ birim
$|CD| = 8$ birim
$|ID| = 4$ birim
$|AE| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?

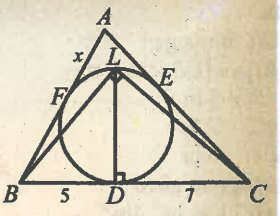


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

25.
İç teğet çemberinin yarıçapı 4 br olup kenar uzunlukları ardışık olan bir üçgenin en kısa kenarının uzunluğu kaç br dir?

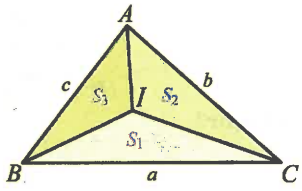
A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

26.
ABC bir üçgen
D, E, F değme noktaları
$BL \perp LC$
$LD \perp BC$
$|BD| = 5$ birim
$|DC| = 7$ birim
$|AF| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

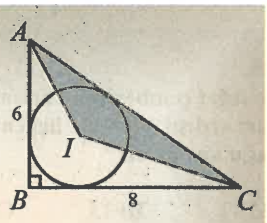
***I*'nın Köşelere Birleştirilmesi.** Herhangi bir *ABC* üçgeni çizip iç teğet çemberinin merkezi olan I noktasını üçgenin köşelerine birleştirelim.



Oluşan *BIC*, *CIA* ve *AIB* üçgenlerinin *I*'dan inen yükseklikleri, *ABC* üçgeninin iç teğet çember yarıçapı olduğundan yani hepsinin yükseklikleri ortak olduğundan, alanları oranı tabanları oranıdır.

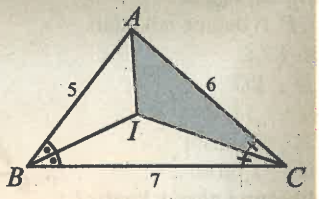
$$S_1 : S_2 : S_3 = a : b : c.$$

27.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
I iç çember merkezi
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$|AIC|$ **kaç br^2 dir?**



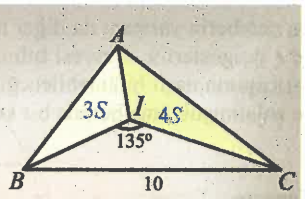
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

28.
ABC bir üçgen
[*BI*] ve [*CI*] iç açıortay
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 7$ br
$|CA| = 6$ br
olduğuna göre
$|AIC|$ **kaç br^2 dir?**



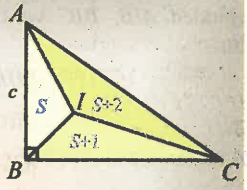
A) $2\sqrt{6}$ B) 5 C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $3\sqrt{6}$

29.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
$|ABI| = 3S$ br^2
$|AIC| = 4S$ br^2
$m(BIC) = 135°$
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre Çevre(*ABC*) kaç birimdir?



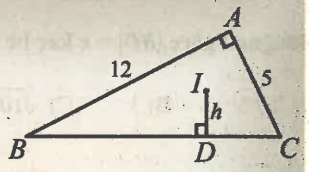
A) 30 B) 27 C) 24 D) 21 E) 18

30.
ABC bir dik üçgen
I iç teğet çember merkezi
$AB \perp BC$
$|ABI| = S$ br^2
$|IBC| = S + 1$ br^2
$|AIC| = S + 2$ br^2
olduğuna göre $|AB| = c$ kaç br dir?



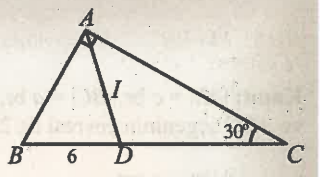
A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 10

31.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$ID \perp BC$
$|CA| = 5$ br
$|AB| = 12$ br
$|ID| = h$ br
olduğuna göre *h* kaçtır?



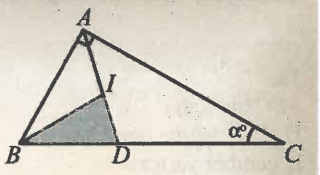
A) 1,5 **B) 2** C) 2,4 D) 2,5 E) 3

32.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
r iç çember yarıçapı
$AI \cap BC = \{D\}$
$m(C) = 30°$
$|BD| = 6$ br
Buna göre r kaçtır?



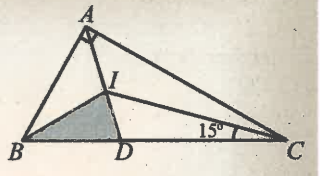
A) 2 B) 2,5 **C) 3** D) 3,5 E) 4

33.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
r iç çember yarıçapı
$AI \cap BC = \{D\}$
$|BID| = r^2$ br^2
olduğuna göre $m(C)$ kaç derecedir?



A) 15 B) 20 C) 22,5 **D) 30** E) 36

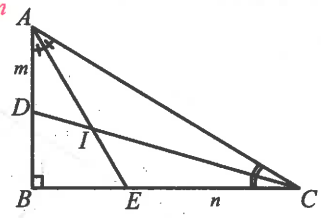
34.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
A, I, D doğrudaş
I iç çemberin merkezi
r iç çemberin yarıçapı
$m(BCI) = 15°$
olduğuna göre IBD üçgensel bölgesinin alanı r cinsinden neye eşittir?



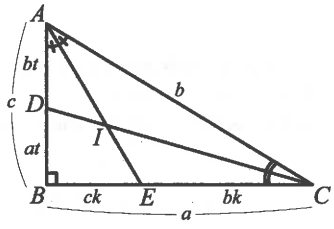
A) $2r^2$ **B) r^2** C) $\frac{1}{2}r^2$ D) $\frac{1}{4}r^2$ E) $\frac{1}{8}r^2$

Sırada, iç teğet çember yarıçapıyla ve ur alan hesabıyla ilgili, pek duyulmamış ilginç bir teorem var.

Teorem. *ABC dik üçgen*
$AB \perp BC$
AE ve CD iç açıortay
r iç çember yarıçapı
$|AD| = m$ br
$|EC| = n$ br
ise $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{r}$ olur.



Kanıt: İç açıortay dersinde m ve n'nin a, b, c cinsinden değerlerini çıkarmıştık, ama üşenmeden tekrar çıkartalım.



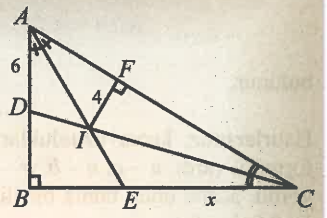
Üçgenin kenar uzunluklarını şekildeki gibi adlandırırsak, $|BE| = ck$ denirse $|EC| = bk$ ve $|BD| = at$ denirse $|DA| = bt$ olur. $ck + bk = a$ ve $at + bt = c$ eşitliklerinden

$$k = \frac{a}{b+c} \text{ ve } t = \frac{c}{a+b}$$

bulunur. Şimdi hesaplara geçebiliriz:

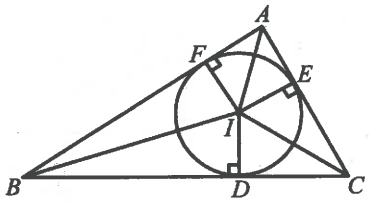
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{bt}+\frac{1}{bk}=\frac{a+b}{bc}+\frac{b+c}{ba}$$
$$=\frac{a^2+ab+bc+c^2}{abc}=\frac{b^2+ab+bc}{abc}$$
$$=\frac{b+a+c}{ac}=\frac{2u}{2\Delta}=\frac{u}{ur}=\frac{1}{r}.$$

35.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
AE ve CD iç açıortay
$AE \cap CD = \{I\}$
$IF \perp AC$
$|AD| = 6$ br
$|IF| = 4$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ kaç br dir?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 **E) 12**

İç çember kenarları hangi oranda böler? Kenarları a br, b br, c br ve yarımçevresi u br olan bir ABC üçgeninde iç çemberin üçgene teğet olduğu noktalar sırasıyla D, E, F olsun.



$$|AF| = |AE|$$
$$|BF| = |BD|$$
$$|CD| = |CE|$$

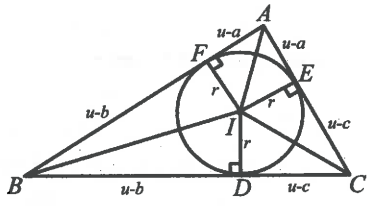
eşitliklerini unutmadan bu 6 parçanın toplamının üçgenin çevresine eşit olduğunu biliyoruz. Eşitliklerden birer tanelerini alıp toplarsak yarımçevreye ulaşmamız gerekir.

O zaman

$$|AF| + |FB| + |DC| = u \text{ br.}$$

Diğer yandan $|AF| + |FB| = |AB| = c$ br olduğundan

$$|DC| = u - c \text{ br.}$$



Aynı işlemler diğer kenarlar üzerinde yapılırsa

$$|AF| = |AE| = u - a \text{ br}$$
$$|BD| = |BF| = u - b \text{ br}$$
$$|CD| = |CE| = u - c \text{ br}$$

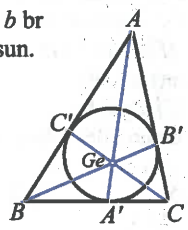
bulunur.

Hatırlarsınız, kenar uzunlukları verilen üçgenlerin alan formülü vardı, $u-a$, $u-b$, $u-c$, u gibi ifadeler cirit atıyordu, acaba onun bunla bir ilişkisi var mı? Olmaz olur mu? Sabredin...

Burada DEF üçgenine ABC üçgeninin **değme üçgeni** veya **kontak üçgeni** denir. Ayrıca AD, BE, CF doğruları da daima noktadaştır. Bu noktaya da **Gergonne Noktası** denir.

Teorem [Gergonne]. *A', B', C' noktaları bir ABC üçgeninin iç çemberinin üçgene teğet oldukları noktalar olsun. AA', BB', CC' doğruları tek noktada kesişir.*

Kanıt: $|AB| = c$ br, $|BC| = a$ br, $|AC| = b$ br ve ABC üçgeninin çevresi de $2u$ br olsun.



$$|AC'| = |AB'| = u - a \text{ br}$$
$$|BC'| = |BA'| = u - b \text{ br}$$
$$|CA'| = |CB'| = u - c \text{ br}$$

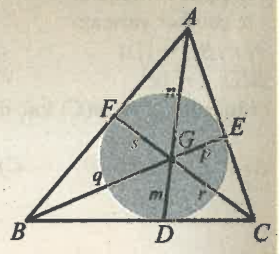
olduğunu biliyoruz.

$$\frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{u-b}{u-a} \cdot \frac{u-a}{u-c} \cdot \frac{u-c}{u-b} = 1$$

olduğundan Ceva Teoremi'nin karşıtı gereği AA', BB' ve CC' doğruları noktadaştır.

Bu nokta genelde Ge ile gösterilir.

36.
ABC bir üçgen
D, E, F değme noktaları
İç çember yarıçapı r
Çevrel çember yarıçapı R
$AD \cap BE \cap CF = \{G\}$
$|GD| = m$ br, $|GA| = n$ br
$|GE| = p$ br, $|GB| = q$ br
$|GC| = r$ br, $|GF| = s$ br

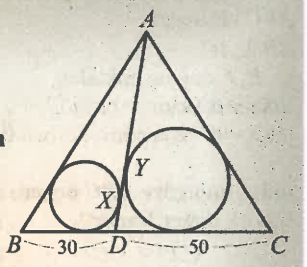


olduğuna göre $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ **toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{R}{4r}$ B) $\frac{R}{2r}$ C) $\frac{r}{R}$ D) $\frac{r}{2R}$ E) $\frac{r}{4R}$

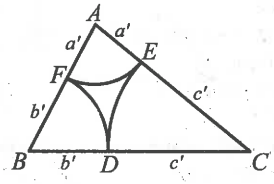
37.
ABC bir eşkenar üçgen
$|BD| = 30$ br
$|DC| = 50$ br

***ABD* ve *ADC* üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin *AD*'ye değme noktaları sırasıyla *X* ve *Y* olduğuna göre $|XY|$ kaç br dir?**



A) 8 B) 9 **C) 10** D) 11 E) 12

Teğet Parçalarıyla Üçgenin Alanı. Daha önce üçgeninin alanını hesaplamayı öğrendiğimiz yazıların birinde (Heron)

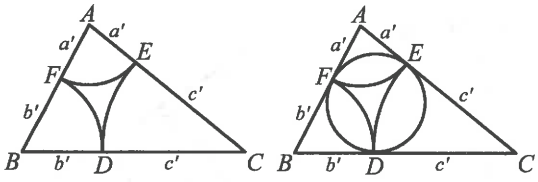


şeklindeki bir üçgende alanın

$$|ABC| = \sqrt{a'b'c'(a'+b'+c')}$$

olduğunu kanıtlamıştık.

Dikkat edilecek olursa, şekilde $|AF| = |AE|$, $|BD| = |BF|$ ve $|CE| = |CD|$ olması; D, E, F noktalarının aynı zamanda ABC üçgeninin iç teğet çemberinin değme noktaları olduğunu anlatır.



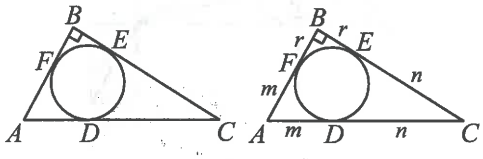
Bu sebeple, tıpkı o teoreme yaptığımız kanıt gibi Heron formülünde u, a, b, c değerleri yerlerine sırasıyla $a' + b' + c'$, $b' + c'$, $c' + a'$, $a' + b'$ değerlerini yazarsak bu güzel sonuca ulaşırız.

$$u - a = (a' + b' + c') - (b' + c') = a'$$
$$u - b = (a' + b' + c') - (c' + a') = b'$$
$$u - c = (a' + b' + c') - (a' + b') = c'$$

olduğundan

$$|ABC| = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = \sqrt{(a'+b'+c')a'b'c'}\,.$$

Teorem. *B açısı dik olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, hipotenüse D noktasında teğet olsun. ABC üçgensel bölgesinin alanı $|AD|\cdot|DC|$ çarpımına eşittir.*



Kanıt 1: Diğer değme noktalarına E ve F diyelim. $|BF| = |BE| = r$, $|AF| = |AD| = m$ ve $|CD| = |CE| = n$ olsun. ABC üçgeninde Pisagor Teoremi'nden

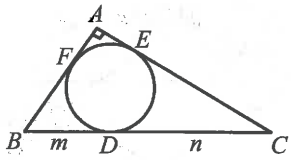
$$(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$$

olur ki; gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $r^2 + mr + nr = mn$ bulunur. Diğer yandan ABC üçgensel bölgesinin alanı

$$\frac{1}{2}\cdot(r+m)\cdot(r+n) \text{ yani } \frac{1}{2}\cdot(r^2+mr+nr+mn)$$

dir. İlk bulunan eşitlik burada yerine yazılırsa $|ABC| = m\cdot n$ bulunur.

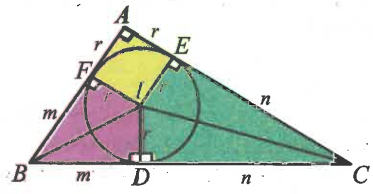
Kanıt 2: Daha önce bulduğumuz dik üçgenlere özgü alan formülünden sonuca gideceğiz.



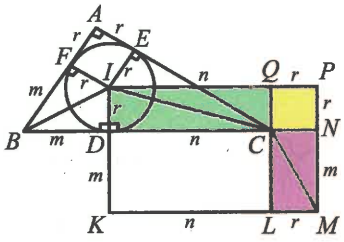
Yukardaki şekilde $|AE| = |AF|$ olmasından dolayı, $|CA| - |BA|$ yani $b - c$ farkının sabit olduğunu anlarız. Dik kenarlar farkına bağlı alan formülümüzü yazarsak;

$$|ABC| = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}$$
$$= \frac{(m+n)^2 - (n-m)^2}{4}$$
$$= mn.$$

Kanıt 3: Bulmuş olduğum bu kanıtı incelemenizi şiddetle tavsiye ederim.

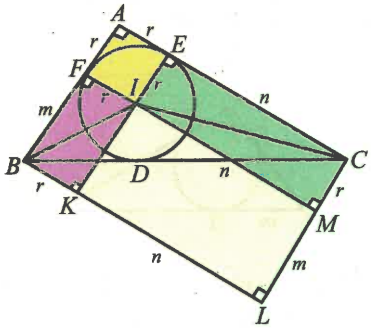


İç teğet çember merkezi olan I noktasından üçgenin kenarlarına birer dik indirerek dik üçgeni üst şekilde görüldüğü gibi 1 kare ve 2 deltoite ayıralım.



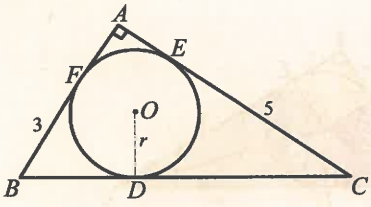
Sonra yine üst şekildeki gibi deltoitlerin dik üçgenleriyle birer dikdörtgen yapıp, şekildeki gibi yerleştirelim. Oluşan *IKMP* dikdörtgeninin alanının *ABC* üçgeninin alanının 2 katı olduğuna dikkat ediniz. O halde taralı alanların toplamı taralı olmayan dikdörtgenin alanına yani $m \cdot n$ değerine eşittir.

Kanıt 4: İtiraf edeyim; bu kanıtı, Kanıt 3'ü yazarken gördüm. Kanıt 3'ten daha kısaymış ama onu silmeye elim varmadı. Zira onu ilk bulduğum gün nasıl sevindiğimi anlatamam.



ABC'ye eş olan *LCB* dik üçgenini çizerek, *ABLC* dikdörtgenini oluşturalım. Dikdörtgenin alanının *ABC* üçgeninin alanının 2 katı olduğuna dikkat ediyoruz. *FBKI*, *AFIE* ve *EIMC* dikdörtgenlerinin alanları toplamı *ABC* üçgeninin alanına eşit olup dikdörtgenin alanının yarısı olduğundan, dikdörtgenin diğer yarısı olan *KLMI* dikdörtgenin alanı, yani $m \cdot n$ değeri, *ABC* üçgeninin alanına eşittir!

38.

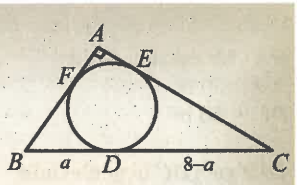


$(r+3)\cdot(r+5)$ çarpımı kaçtır?

30

39.

ABC bir üçgen
$AB \perp AC$
D, *E*, *F* değme noktaları
$|BD| = a$ birim
$|CD| = 8 - a$ birim

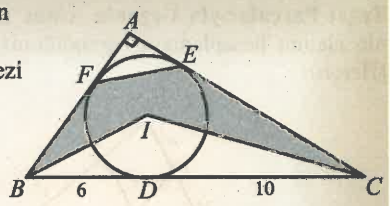


olduğuna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 12 **D)** 16 E) 64

40.

ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 10$ br

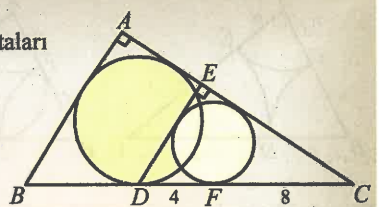


olduğuna göre *FBICE* beşgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

A) 15 B) 18 C) 24 **D)** 30 E) 36

41.

ABC bir dik üçgen
D ve *F* değme noktaları
$CA \perp AB$
$DE \perp CA$
$|DF| = 4$ br
$|FC| = 8$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br dir?



A) 60 **B)** 72 C) 84 D) 96 E) 108

***I* Noktası, İç Açıortayları Hangi Oranda Böler?** İlginçtir, matematik bilgisi hangi düzeyde olursa olsun, okuduğu sınıf düzeyi yetiyorsa kenarortayların kesim noktasının üzerinde bulunduğu kenarortayı 2 : 1 oranında kestiğini bilmeyen öğrenci görmedim. Hatta bazen toplama çıkarmayı bile yapmakta zorlanan öğrencilere ''Bir üçgenin ağırlık merkezi neresidir?'' diye sorduğumda aldığım cevap aynen şöyle oluyor: ''2'ye 1 değil mi hocam?''. Bilmekten kastım buydu tabii ki, bilmekse eğer. Neden bu bilginin bu kadar yüksek yüzdeyle bilindiğini hep merak etmişimdir. Diğer yandan, (sanki iç açıortay veya yükseklik üvey evlatmış gibi) iç çember merkezinin üzerinde bulundukları iç açıortayları ve aynı şekilde diklik merkezinin üzerinde bulundukları yükseklikleri hangi oranda böldüklerini söyleyebilen bir öğrenci de görmedim. Biz söyleyeceğiz.

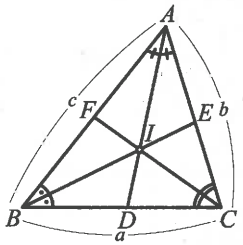
Teorem. *Bir üçgende I noktası, bir iç açıortayı, yan kenarlar toplamının karşı kenara oranında böler.*

Yani şekle göre;

$$\frac{|AI|}{|ID|}=\frac{b+c}{a}$$

$$\frac{|BI|}{|IE|}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{|CI|}{|IF|}=\frac{a+b}{c}$$



Kanıt: $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{c}{b}$ olduğundan $|BD| = ck$ br *ve* $|DC| = bk$ br olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı vardır.

$|BD| + |DC| = |BC|$ olduğundan

$$ck + bk = a$$
$$k\cdot(b + c) = a$$
$$k=\frac{a}{b+c}$$

Diğer yandan;

$$\frac{|AI|}{|ID|}=\frac{|BA|}{|BD|}=\frac{c}{ck}=\frac{1}{k}=\frac{b+c}{a}.$$

Diğerleri de benzer şekilde kanıtlanır.

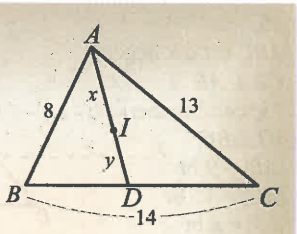
Sonuç: *Yukardaki gibi bir ABC üçgeninde, [AD], [BE], [CF] iç açıortayları I'da kesişiyorlarsa*

$$\frac{|AI|}{|AD|}+\frac{|BI|}{|BE|}+\frac{|CI|}{|CF|}=\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}=2$$

eşitliği geçerlidir.

Fark ettiyseniz teorem Von Aubel teoreminin ta kendisidir. Yani kesenlerin iç açıortay olmalarına bile gerek yoktu, noktadaş olsunlar, toplamın 2 çıkmasına yeterdi.

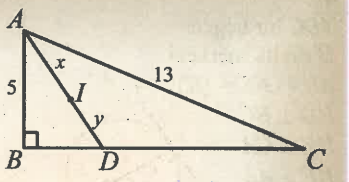
42.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 14$ br
$|CA| = 13$ br
$|AI| = x$ br
$|ID| = y$ br



olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

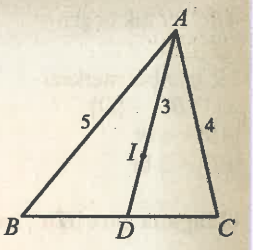
43.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
I iç çember merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AB| = 5$ br
$|CA| = 13$ br
$|AI| = x$ br
$|ID| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

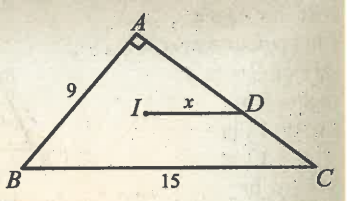
A) 1 **B) $\frac{3}{2}$** C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

44.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AI| = 3$ br
$|AC| = 4$ br
$|AB| = 5$ br
olduğuna göre
$\frac{|BC|}{|ID|}$ **oranı kaçtır?**



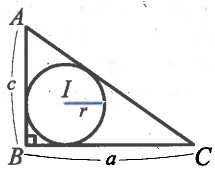
A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

45.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$ID \,//\, BC$
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 15$ br
$|ID| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Teorem. *Bir dik üçgenin iç çember yarıçapı, dik kenar uzunlukları çarpımının çevreye oranına eşittir.*



Kanıt: Dik kenar uzunlukları a br ve c br olsun. O halde alanı $\frac{1}{2}ac$ br^2 dir. Aynı alanı ur formülüne eşitlersek

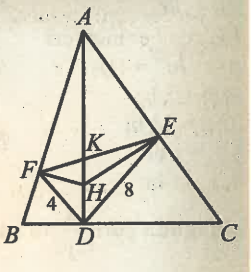
$$ac = 2ur$$

olur ki

$$r = \frac{ac}{2u}$$

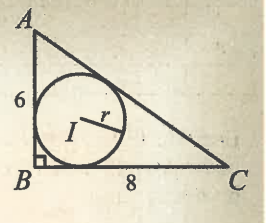
bulunur.

46.
ABC bir üçgen
H diklik merkezi
$AH \cap FE = \{K\}$
$HD \perp BC$
$HE \perp CA$
$HF \perp AB$
$|DF| = 4$ br
$|DE| = 8$ br
$|FE| = 9$ br
olduğuna göre $\frac{|DH|}{|HK|}$ oranı kaçtır?



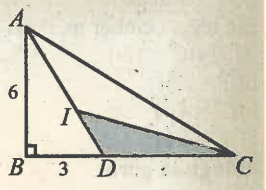
A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

48.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
I iç çember merkezi
r iç çember yarıçapı
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre r kaçtır?



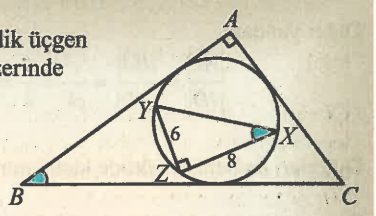
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

47.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
I iç çember merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 3$ br
olduğuna göre $|IDC|$ kaç br^2 dir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

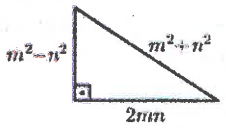
49.
ABC ve DEF birer dik üçgen
X, Y, Z iç çember üzerinde
$CA \perp AB$
$YZ \perp ZX$
$m(B) = m(X)$
$|YZ| = 6$ br
$|ZX| = 8$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 50

Bununla birlikte tüm kenarları tam sayı olan dik üçgenlerin iç çember yarıçapları da tam sayıdır. Yani $x \cdot y$ çarpımı her zaman $2u$'nun katıdır. Bunu şöyle izah edebiliriz:
$m > n$ olmak üzere m ve n tam sayıları için bir dik üçgenin kenar uzunluklarının daima $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ olacağını Dik Üçgen dersinde söylemiştik. Bu değerleri

$r = \dfrac{xy}{2u}$ eşitliğinde yerlerine yazacağız.



$$r = \frac{(m^2 - n^2)2mn}{m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2} = n(m - n)$$

n ve m tam sayı olduğundan $n(m - n)$ değeri de her zaman tam sayıdır.

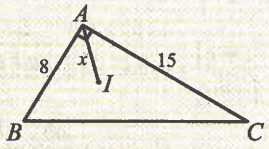
m	n	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$	r
2	1	3	4	5	1
3	1	8	6	10	2
3	2	5	12	13	2
4	1	15	8	17	3
4	2	12	16	20	4
5	1	24	10	26	4

Bununla birlikte başka formüller de vardır. Dik kenar uzunlukları a br ile b br ve hipotenüs uzunluğu c br olan bir dik üçgende

$$2r^2 = (c - a)(c - b)$$

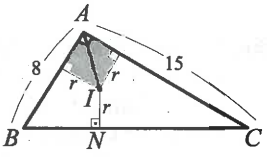
veya $r = u - c$ formüllerinden de yararlanılabilir. Bu formülleri siz de bulmaya çalışınız.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 15$ br
olduğuna göre
$|AI| = x$ *kaç* br *dir?*



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 6

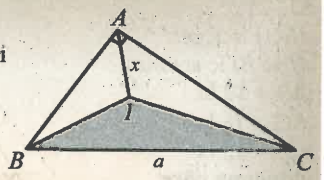
Çözüm: İç çember merkezi olan I'dan dik kenarlara inilen dikmelerin iç çember yarıçapları olduğunu görürseniz, yandaki taralı dörtgenin kare olduğunu ve sorulan $|AI|$ değerinin bu karenin köşegen uzunluğunu olduğunu da anlarsınız.



8-15-17 üçgeninin iç çember yarıçapı olan $r = 3$ olduğundan $|AI| = 3\sqrt{2}$ br dir.

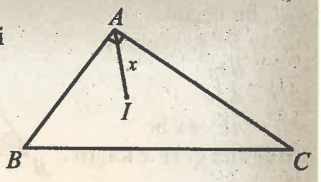
Doğru cevap: B.

50.
ABC bir dik üçgen
I iç teğet çember merkezi
$CA \perp AB$
$|AI| = x$ br
$|BC| = a$ br
$a \cdot x = 12\sqrt{2}$
olduğuna göre $|BIC|$ kaç br^2 dir?



A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

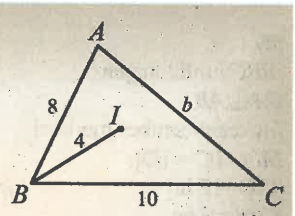
51.
ABC bir dik üçgen
I iç teğet çember merkezi
$CA \perp AB$
$|AI| = x$ br
Çevre$(ABC) = y$ br



olup $x \cdot y = 24$ olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?

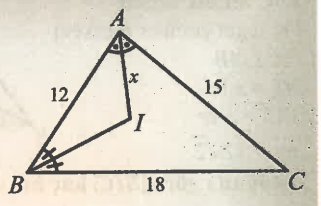
A) $6\sqrt{2}$ B) 8 C) $8\sqrt{2}$ D) 10 E) 12

52.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 10$ br
$|BI| = 4$ br
$|CA| = b$ br
olduğuna göre b kaçtır?



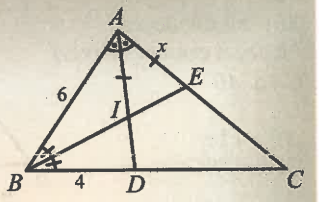
A) 10 B) 11 **C) 12** D) 13 E) 14

53.
ABC bir üçgen
AI ve BI iç açıortay
$|AB| = 12$ br
$|BC| = 18$ br
$|CA| = 15$ br
olduğuna göre
$|AI| = x$ kaç br dir?



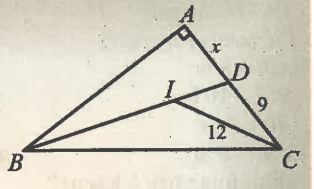
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

54.
ABC bir üçgen
AD ve BE iç açıortay
$|AB| = 6$ br
$|BD| = 4$ br
$|AI| = |AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) 5/2 **C) 3** D) 7/2 E) 4

55.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç teğet çember merkezi
$BI \cap AC = \{D\}$
$|CI| = 12$ br
$|CD| = 9$ br
olduğuna göre $|DA| = x$ kaç br dir?



A) 6 **B) 7** C) 8 D) 9 E) 16

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninin iç açıortay ayaklarını köşe kabul eden üçgen DEF olsun. Öyleyse*

$$\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

eşitliği geçerlidir.

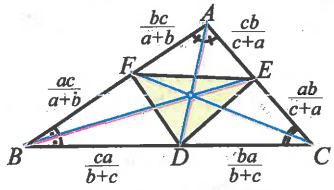
Kanıt: Her zamanki gibi $|BC| = a$ br, $|CA| = b$ br ve $|AB| = c$ br olsun. $D \in [BC]$, $E \in [CA]$ ve $F \in [AB]$ kabul edelim. AD iç açıortay olduğundan,

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

olur. O halde $|BD| = c \cdot k$ ve $|DC| = b \cdot k$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı vardır. $c \cdot k + b \cdot k = a$ olduğundan $k = \frac{a}{b+c}$ dir. Bu durumda

$$|BD| = \frac{ca}{b+c} \text{ ve } |DC| = \frac{ba}{b+c}$$

olur.



Benzer şekilde $|AE|$, $|EC|$, $|AF|$, $|FB|$ değerleri bulunarak şekildeki gibi yerlerine yazalım. Şimdi Routh Teoremi'ni kullanarak kanıtı tamamlayabiliriz.

$$\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{\frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ab}{c+a}\cdot\frac{bc}{a+b} + \frac{ab}{b+c}\cdot\frac{bc}{c+a}\cdot\frac{ca}{a+b}}{abc}$$

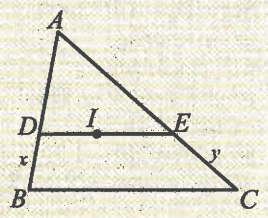
$$= \frac{2\cdot\frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ab}{c+a}\cdot\frac{bc}{a+b}}{abc}$$

$$= \frac{\frac{2a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}}{abc}$$

$$= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

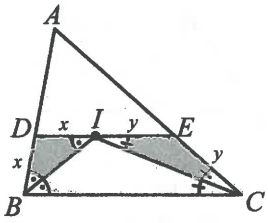
I'dan Kenarlara Paralel Çizmek. Nasıl ki bir üçgende herhangi bir açıortayın aynı zamanda yükseklik veya kenarortay olduğunu gördüğümüzde üçgene ikizkenar diyoruz, açıortayı herhangi bir koluna paralel şekilde kesen bir doğru varsa da şekilde ikizkenar üçgen var olmalı diyeceğiz. Hatta iç değil dış teğet çember merkezinden bir kenara paralel çekilse de durum değişmez, elbet bir yerlerde ikizkenar üçgen belirir. Bunu iyi belleyin!

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
I iç çember merkezi
I ∈ [DE]
DE // BC
|DB| = x br
|EC| = y br
olduğuna göre
|DE| kaç br dir?



A) $x+y$ B) $x\cdot y$ C) x^2+y^2 D) $\sqrt{x^2+y^2}$ E) $\sqrt{xy}$

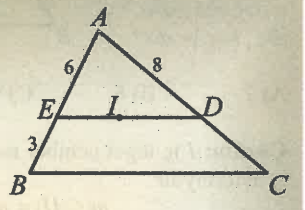
Çözümü: *BI* ve *CI* doğruları çizilirse, bu doğrular köşelerden çıkıp *I* noktasından geçtikleri için üçgenin iç açıortaylarıdır.



DE // BC olduğundan $m(CBI) = m(DBI) = m(DIB)$ ve $m(BCI) = m(ECI) = m(CIE)$ olur. O halde *BDI* ve *CEI* üçgenleri ikizkenardır. Bu yüzden $|DI| = |DB| = x$ br ve $|IE| = |EC| = y$ br olur. Sonuç olarak $|DE| = x + y$ br olarak bulunur.

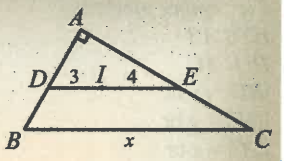
Doğru cevap: A.

56.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
E, I, D doğrudaş
|AE| = 6 br
|EB| = 3 br
|AD| = 8 br
olduğuna göre
Çevre(*AED*) kaç br dir?



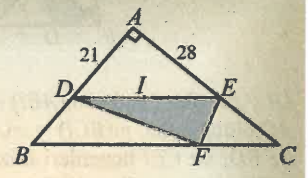
A) 20 **B) 21** C) 22 D) 23 E) 24

57.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
I iç teğet çember merkezi
DE // BC
|DI| = 3 br
|IE| = 4 br
olduğuna göre *|BC| = x* kaç br dir?



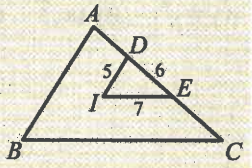
A) 10 B) 11 **C) 12** D) 13 E) 15

58.
ABC bir dik üçgen
CA ⊥ AB
I iç çember merkezi
DE // BC
I ∈ [DE], F ∈ [BC]
|AD| = 21 br
|AE| = 28 br
olduğuna göre *|DFE|* kaç br² dir?



A) 210 B) 224 **C) 225** D) 248 E) 250

Örnek. *ABC bir üçgen*
I iç çember merkezi
ID // AB
IE // BC
|ID| = 5 br
|DE| = 6 br
|IE| = 7 br
olduğuna göre |ABC| kaç br² dir?

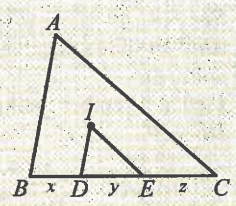


A) $6\sqrt{6}$ B) $12\sqrt{6}$ C) $18\sqrt{6}$ D) $27\sqrt{6}$ E) $54\sqrt{6}$

Çözüm: *AI* ve *CI* doğruları çizilirse *ADI* ve *CEI* üçgenlerinin ikizkenar olduğu görülür. Bu durumda *|AD| = 5* br ve *|EC| = 7* br olur. *DIE* üçgeniyle *ABC* üçgeni 1:3 oranında benzer olduğundan, alanları oranı 1:9'dur.
$|DIE| = 6\sqrt{6}$ br² olduğundan $|ABC| = 54\sqrt{6}$ br² olmalıdır.

Doğru cevap: E.

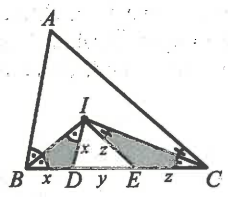
Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
I iç çember merkezi
ID // AB
IE // AC
$|BD| = x$ br
$|DE| = y$ br
$|EC| = z$ br



olduğuna göre IDE üçgeninin çevresi kaç br *dir?*

A) $x+y+z$ B) $x.y.z$ C) $\sqrt{xyz}$ D) $\sqrt[3]{xyz}$ E) $y\cdot(x+z)$

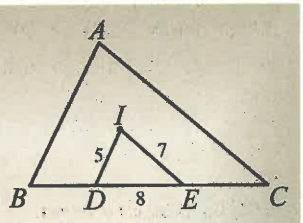
Çözümü: *BI* ve *CI* doğruları çizilirse, bu doğrular köşelerden çıkıp *I* noktasından geçtikleri için üçgenin iç açıortaylarıdır.



DI // BA olduğundan $m(ABI) = m(DBI) = m(BID)$ ve *IE // AC* olduğundan $m(BCI) = m(ACI) = m(CIE)$ olur. O halde *BDI* ve *CEI* üçgenleri ikizkenardır. Bu yüzden $|ID| = |DB| = x$ br ve $|IE| = |EC| = z$ br olur. Sonuç olarak Çevre$(IDE) = x + y + z$ br olarak bulunur.

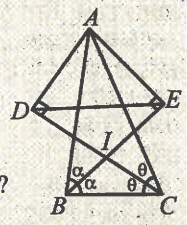
Doğru cevap: A.

59.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
ID // AB
IE // AC
$|ID| = 5$ br
$|DE| = 8$ br
$|EI| = 7$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



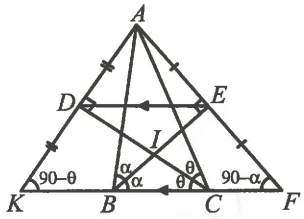
A) $16\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$ D) $24\sqrt{3}$ E) $25\sqrt{3}$

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
BE iç açıortay
CD iç açıortay
BE ⊥ EA ve CD ⊥ DA
$m(ABC) = 2\alpha$
$m(ACB) = 2\theta$
olduğuna göre m(ADE) kaç derecedir?



A) α B) θ C) $90-\alpha$ D) $90-\theta$ E) 2θ

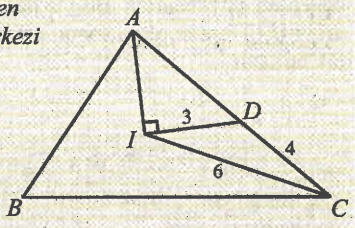
Çözümü: Açıortaylarla dikleri bir arada gördüğümüzden aklımıza hemen ikizkenar üçgen gelmeli. Hemen $[AD]$ ve $[AE]$'yi BC'yi kesene kadar uzatıyoruz.



ACK ve *ABF* birer ikizkenar üçgen, $[DE]$ de bu üçgenin orta tabanı olur. Orta taban tabana daima paralel olduğundan $m(ADE) = 90 - \theta$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
I iç teğet çember merkezi
AI ⊥ ID
$|ID| = 3$ br
$|DC| = 4$ br
$|IC| = 6$ br
olduğuna göre
$|BC|$ *kaç* br *dir?*

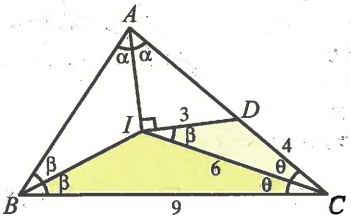


A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm: *I* iç teğet çember merkezi ise *AI*, *BI* ve *CI* birer iç açıortaydır.

$m(CAI) = m(IAB) = \alpha$
$m(ABI) = m(IBC) = \beta$
$m(BCI) = m(ICA) = \theta$

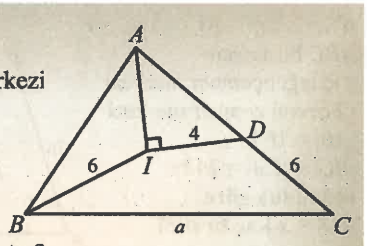
diyelim. *AIC* üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından $m(CID) = \beta$ olması gerektiğini anlayalım.



Şu durumda *DIC* ile *IBC* üçgenleri benzerdir. Bu üçgenlerde ölçüsü β olan açıların gördüğü kenarların uzunlukları 4 br ve 6 br olduğundan benzerlik oranı 2:3'tür. O halde $|IC| = 6$ br ise $|BC| = 9$ br olmalıdır.

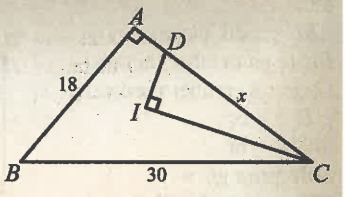
Doğru cevap: C.

60.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
$AI \perp ID$
$|BI| = 6$ br
$|ID| = 4$ br
$|DC| = 6$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



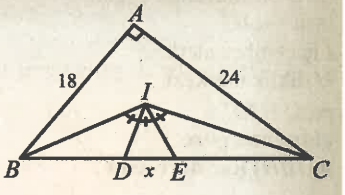
A) 12 B) 12,5 C) 13 **D) 13,5** E) 14

61.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$CI \perp ID$
$|AB| = 18$ br
$|BC| = 30$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



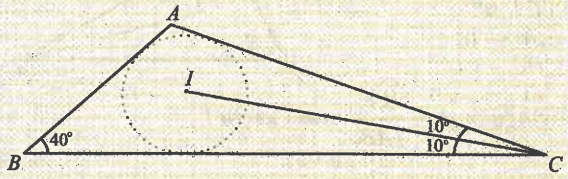
A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 **E) 20**

62.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç çember merkezi
$m(BID) = m(DIE)$
$m(DIE) = m(EIC)$
$|AB| = 18$ br
$|AC| = 24$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

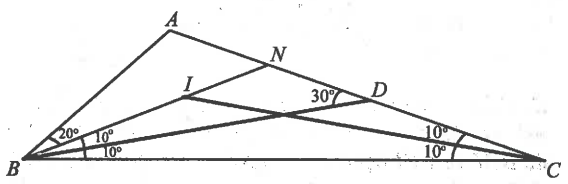
Örnek. *B ve C açılarının ölçüleri sırasıyla 40° ve 20° olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olsun.*



Buna göre $\frac{|CI|}{|AB|}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

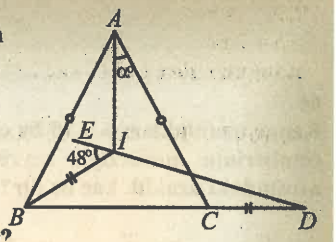
Çözüm: Soru bana, ama bu muhteşem çözüm kıymetli meslektaşım ve ortağım İbrahim Şepik'e aittir. Bu çözümü gördükten sonra kendi çözümümü vermeye utandım☺



BI iç açıortayı AC'yi N'de kessin. NBC ikizkenar üçgen olacaktır. Şimdi de NBC açısının açıortayını çizelim. NBC ikizkenar üçgen olduğundan $|BD| = |IC|$ olacağına dikkat ediniz. ABD bir 30°-30°-120° üçgeni olduğundan $|BD| = \sqrt{3} \cdot |AB|$ olur ki sorulan oran da $\sqrt{3}$ olarak bulunur.

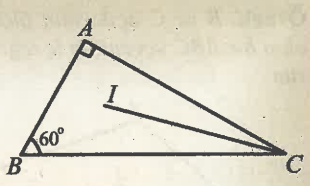
Doğru cevap: C.

63.
ABC bir ikizkenar üçgen
I iç çember merkezi
B, C, D doğrudaş
$|AB| = |AC|$
$|BI| = |CD|$
$m(BIE) = 48°$
$m(CAI) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 26 B) 32 C) 36 D) 39 E) 42

64.
ABC bir dik üçgen
I, iç çemberinin merkezi
$BA \perp AC$
$m(B) = 60°$

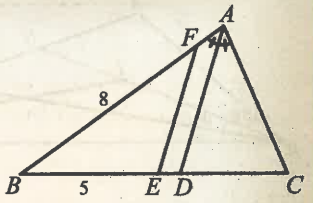


olduğuna göre $\frac{|CI|}{|AB|}$ **oranı kaçtır?**

A) 1 B) $3-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

65.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay

$|BE| = |EC|$
$FE \,//\, AD$
$|BE| = 5$ br
$|BF| = 8$ br



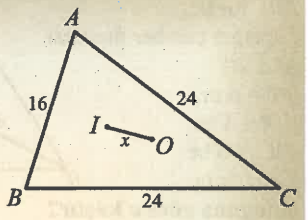
olduğuna göre ABC **üçgeninin çevresi kaç birimdir?**

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

66.
Kenar uzunlukları 6-8-10 br olan bir üçgenin iç teğet çemberinin merkeziyle çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklık kaç br dir?

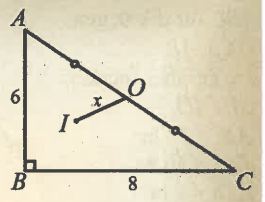
A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 3

67.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
O çevrel çember merkezi
$|AB| = 16$ br
$|BC| = |CA| = 24$ br
olduğuna göre
$|IO| = x$ **kaç br dir?**



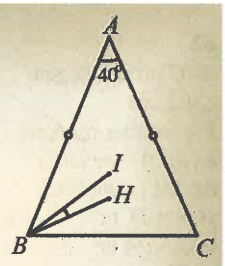
A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) $4\sqrt{2}$

68.
ABC bir dik üçgen
I iç teğet çember merkezi
O çevrel çember merkezi
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$|IO| = x$ **kaç br dir?**



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

69.
ABC bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
I iç çember merkezi
H diklik merkezi
$m(A) = 40°$
olduğuna göre
$m(IBH)$ **kaç derecedir?**



A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Dış Açıortay

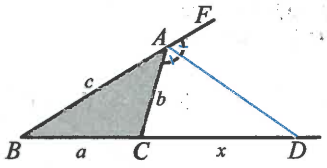
Bir üçgenin dış açısına ait açıortay doğrusuna **dış açıortay doğrusu** denir. Bir üçgenin üç açısı olduğundan üç dış açıortayı vardır. Şimdi dış açıortay ile ilgili temel teoremi farklı kanıtlarıyla birlikte sunacağız.

Teorem. *Bir ABC üçgeninde A açısının dış açıortayı, BC'yi D noktasında kessin. O zaman*

$$\frac{|DC|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|}.$$

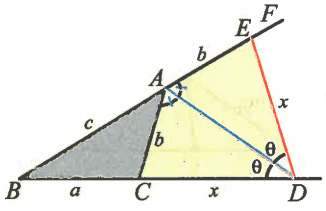
Bir de uzunluklara değer vererek formülü düzenleyelim. Öyle akılda daha kalıcı olur.

$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|CD| = x$ br
ise $\dfrac{x}{x+a}=\dfrac{b}{c}$.



Şimdi bu eşitliğin neden geçerli olduğunu kanıtlayalım:

Kanıt 1: [BA üzerinde, DA doğrusu BDE açısının açıortayı olacak şekilde bir E noktası alalım.



DCA ile DEA üçgenlerinin eş olacağını fark etmiş olmalısınız. Çünkü hem $|AC| = |AE|$, hem $m(CAD) = m(EAD)$ hem de $[AD]$ kenarları ortaktır. Bu eşlikten dolayı $m(CDA) = \theta$ dersek $m(EDA) = \theta$ olur, böylelikle EDB üçgeninde $[DA]$ iç açıortay olur. O halde

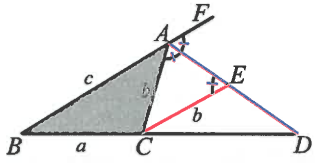
$$\frac{|DE|}{|DB|}=\frac{|AE|}{|AB|}$$

olmalıdır, diğer bir deyişle

$$\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}$$

olur.

Kanıt 2: Nihai noktada ulaşmak istediğimiz sonuç orantılı doğru parçalarıyla ilgili olduğundan aklımıza Tales teoreminin gelmesi kaçınılmazdır. Bu sebeple C noktasından BA'ya paralel olan bir doğru çizelim. Bu doğru AD'yi E'de kessin.



İç ters açıların eşliği gereği $m(FAE) = m(CEA) = \alpha$ olacağından ACE üçgeni ikizkenar olur.

$AB \parallel EC$ olduğundan ECD ve ABD üçgenlerinin benzerliğini kullanacağız:

$$\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}.$$

Kanıt 3: Bu ve bundan sonraki kanıtı da alan teknikleriyle yapalım. Teoremin aslındaki şekilden takip edebilirsiniz.

Kanıtlamak istediğimiz eşitlikte bulunan x ve $x + a$ değerleri sırasıyla ACD ve ABD üçgenlerinin taban uzunlukları olduğundan bu üçgenlerin alanlarına odaklanacağız. Tabii

$$\frac{|ACD|}{|ABD|}=\frac{x}{x+a}$$

eşitliğini hemen not edelim.

Diğer yandan aynı oran

$$\frac{|ACD|}{|ABD|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot b\cdot|AD|\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot c\cdot|AD|\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}$$

olup $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ olduğundan

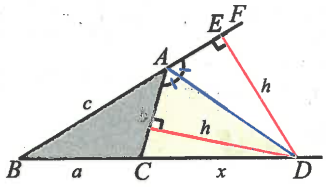
$$\frac{|ACD|}{|ABD|}=\frac{b}{c}$$

olur ki

$$\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Kanıt 4: Bu sefer teoremi sinüslü alan formülünden değil, *tabançarpıyükseklikbölüiki* formülünden kanıtlamayı planlıyoruz.



AD, nihayetinde bir açıortay olduğundan D'nin AF ve AC doğrularına uzaklıkları birbirlerine eşittir. Bu uzaklığa h br diyelim. Bu da ACD ve ABD üçgenlerinin $[CA]$ ve $[BA]$ kenarlarına inen yüksekliklerin birbirlerine eşit olması demektir. Elimizde hem

$$\frac{|ACD|}{|ABD|}=\frac{x}{x+a}$$

hem de

$$\frac{|ACD|}{|ABD|}=\frac{\frac{1}{2}\cdot b\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot c\cdot h}=\frac{b}{c}$$

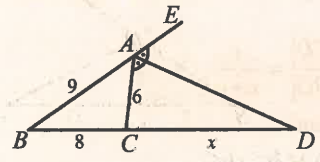
eşitliği olduğundan istenilen kanıtlanmıştır.

Orantının kendine has özelliklerinden, eşitliği

$$\frac{x}{b}=\frac{x+a}{c}$$

şeklinde de düzenleyebiliriz. Bunu yapmamızın nedeni öğrencilerin büyük çoğunluğunun bu dış açıortay teoremini hafızada tutmakta zorlanmasıdır. Şöyle bir şey düşünebilirsiniz: Dış açıortayın bittiği yerde yani D noktasındasınız ve dış açıortayın başladığı noktaya yani A noktasına gitmek istiyorsunuz. Hikaye bu ya, en kısa yoldan gitmek yasak olsun. O zaman ya x ile b'yi kullanırsınız ya da $x+a$ ile c'yi. İşte bu değerleri birbirlerine bölüp eşitleyeceksiniz.

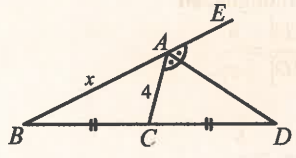
1.



x kaçtır?

16

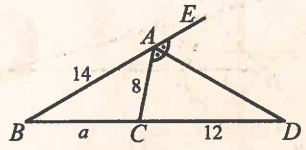
2.



x kaçtır?

8

3.



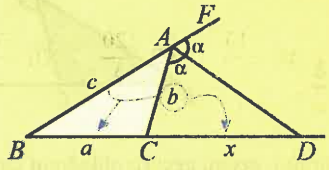
a kaçtır?

9

Dış Açıortay Teoreminin Yan Sanayisi. $\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}$ eşitliğini takla attırırsak, $\frac{c}{b}=\frac{x+a}{x}$ olur ki eşitliğin bu hali paydaları ayırmamıza izin verir.

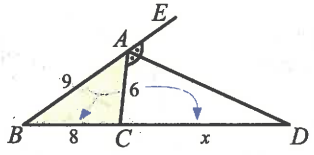
$$\frac{c}{b}=1+\frac{a}{x}$$
$$\frac{c}{b}-1=\frac{a}{x}$$
$$\frac{c-b}{b}=\frac{a}{x}$$

Bu son eşitliğin Türkçe meali şu:



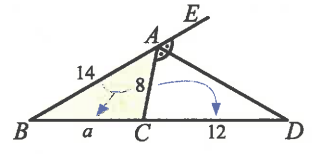
''$c-b$'ye a gelmişse, b'ye x gelir.''

Örneğin;



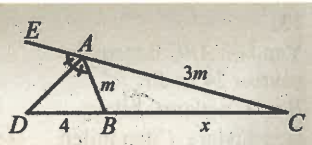
''9 – 6'ya yani 3'e 8 gelmişse, 6'ya ne gelir?'' diyerek, x'i 16 buluruz.

Bir tane daha:



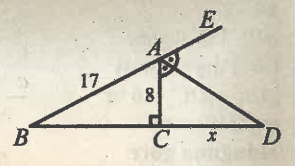
''8'e 12 gelmişse, 14 – 8'e yani 6'ya ne gelir?'' diyerek, x'i 9 buluruz.

4.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$|AC| = 3\cdot|AB| = 3m$ br
$|DB| = 4$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



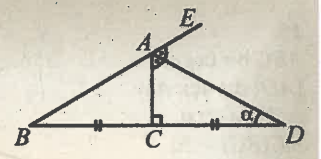
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

5.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$AC \perp BD$
$|AB| = 17$ br
$|AC| = 8$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



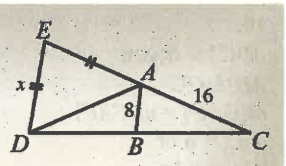
A) $\frac{100}{9}$ B) $\frac{110}{9}$ C) $\frac{120}{9}$ D) $\frac{130}{9}$ E) $\frac{140}{9}$

6.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$AC \perp BD$
$|BC| = |CD|$
$m(D) = \alpha$
olduğuna göre α kaçtır?



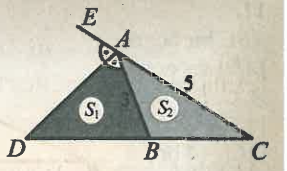
A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

7.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 16$ br
$|ED| = |EA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



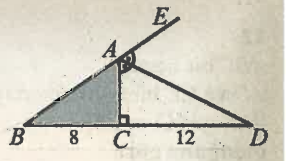
A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

8.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 5$ br
$|ADB| = S_1$ br^2
$|ABC| = S_2$ br^2
olduğuna göre $\frac{S_1}{S_2}$ kaçtır?



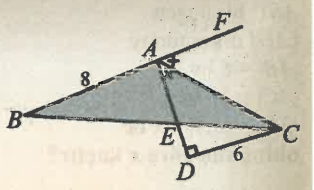
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

9.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$AC \perp BD$
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 12$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



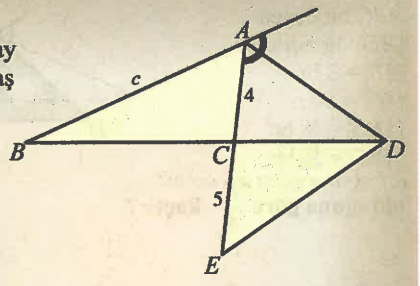
A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 48

10.
ABC bir üçgen
$AD \perp DC$
$m(DAC) = m(CAF)$
$|DC| = 6$ br
$|BA| = 8$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



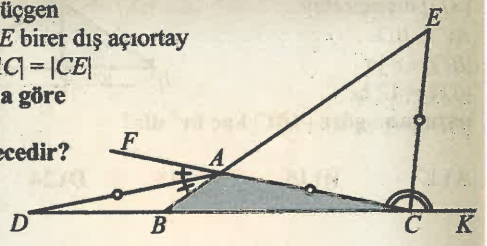
A) 48 **B) 24** C) 20 D) 16 E) 12

11.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
A, C, E doğrudaş
$|ABC| = |CED|$
$|AC| = 4$ br
$|CE| = 5$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre
c kaçtır?



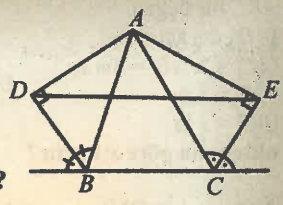
A) 7 B) 8 **C) 9** D) 10 E) 11

12.
ABC bir üçgen
AD ve CE birer dış açıortay
$|DA| = |AC| = |CE|$
olduğuna göre
$m(ACB)$
kaç derecedir?



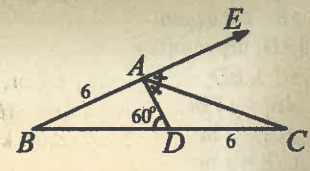
A) 6 B) 9 **C) 12** D) 15 E) 18

13.
Yandaki ABC üçgeninin çevresi 24 br dir.
B ve C açılarına ait dış açıortaylara A'dan inilen dikme ayakları sırasıyla D ve E olsun.
Buna göre $|DE|$ kaç br dir?



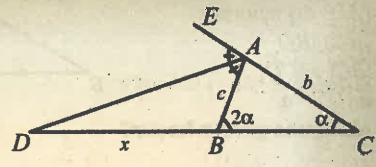
A) 6 **B) 12** C) 16 D) 18 E) 24

14.
ABC bir üçgen
$[AC]$ dış açıortay
$|AB| = |DC| = 6$ br
$m(ADB) = 60^\circ$
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 9 **D)** $9\sqrt{3}$ E) 12

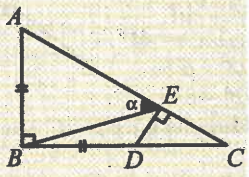
15.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$m(DCA) = \alpha$
$m(ABC) = 2\alpha$
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|DB| = x$ br
olduğuna göre x'in b ve c türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{b+c}{2}$ **B)** $b+c$ C) $\sqrt{bc}$ D) $2\sqrt{bc}$ E) $\sqrt{b^2+c^2}$

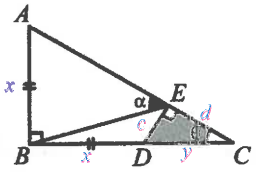
Şimdi de gizlenmiş dış açıortayları bulacağız.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$DE \perp AC$
$|AB| = |BD|$
olduğuna göre
$m(BEA) = \alpha$
kaç derecedir?



A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Çözüm: Şekildeki uzunlukları adlandırırsak çözümü daha rahat anlayabilirsiniz.



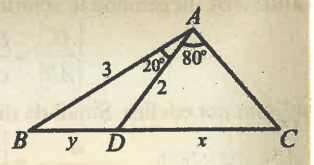
$|AB| = |BD| = x$ br, $|DC| = y$ br, $|DE| = c$ br ve $|EC| = d$ br oldun. $m(BCA) = \theta$ diyelim. ABC ile CED dik üçgenlerinin benzerliğinden veya daha kısa olarak

$$\tan\theta = \frac{x}{x+y} = \frac{c}{d}$$

yazmak mümkündür. Eşitliğe dikkat ederseniz EB'nin CED dik üçgeninde E'ye ait bir dış açıortay olduğunu anlarsınız. O halde $m(AEB) = 45°$'dir. Dolayısıyla $\alpha = 45$ dir.

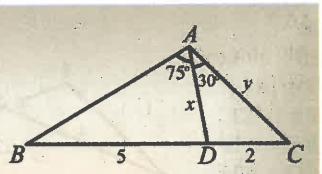
Doğru cevap: C.

16.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$m(BAD) = 20°$
$m(DAC) = 80°$
$|AB| = 3$ br
$|AD| = 2$ br
$|BD| = y$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre y/x kaçtır?



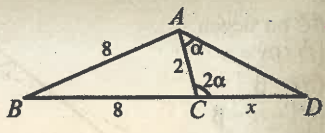
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

17.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$m(BAD) = 75°$
$m(DAC) = 30°$
$|AD| = x$ br
$|AC| = y$ br
olduğuna göre x/y kaçtır?



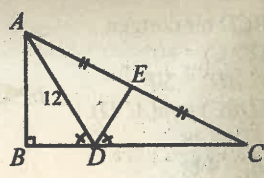
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{3}{5}$

18.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 8$ br
$|CA| = 2$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



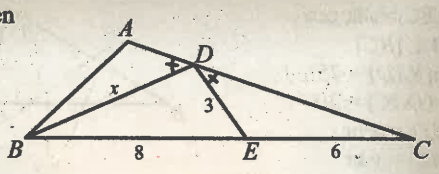
A) $\frac{8}{3}$ B) 3 C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{11}{3}$ E) 4

19.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
$|AE| = |EC|$
$m(ADB) = m(EDC)$
$|AD| = 12$ br
olduğuna göre
$|DE|$ kaç br dir?



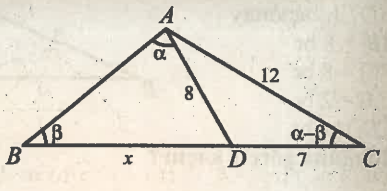
A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

20.
ABC bir üçgen
$D \in [AC]$
$E \in [BC]$
$|BE| = 8$ br
$|EC| = 6$ br
$|DE| = 3$ br
$m(BDA) = m(EDC)$
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç birimdir?



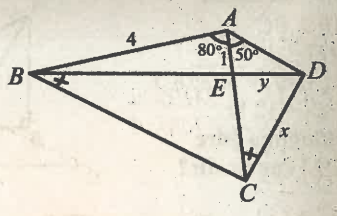
A) 4 B) 5 C) 6 **D) 7** E) 8

21.
ABC bir üçgen
$m(DAB) = \alpha$
$m(B) = \beta$
$m(C) = \alpha - \beta$
$|DC| = 7$ br
$|CA| = 12$ br
$|AD| = 8$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 12 B) 13 **C) 14** D) 15 E) 16

22.
$ABCD$ bir dörtgen
$m(BAC) = 80°$
$m(CAD) = 50°$
$m(DBC) = m(ACD)$
$|AE| = 1$ br
$|AB| = 4$ br
$|CD| = x$ br
$|DE| = y$ br
olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



A) 4 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) $2\sqrt{2}$ **E) 2**

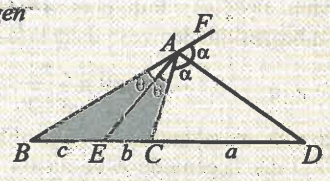
23.
ABC bir üçgen
$DA \perp AB$
$m(DAC) = 45°$
$|DA| = 6$ br
$|AB| = 8$ br
olduğuna göre $|ADC|$ kaç br^2 dir?



A) 80 **B) 72** C) 64 D) 48 E) 36

Biraz da iç ve dış açıortayların bir arada olduğu soru tiplerine bakalım.

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
AE iç açıortay
AD dış açıortay
$|BE| = c$ br
$|EC| = b$ br
$|CD| = a$ br



olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $\frac{ac}{b}$'ye eşittir?

A) $a+b$ B) $b+c$ C) $a+c$ D) $a+b+c$ E) $a \cdot b \cdot c$

Kanıt: ABC üçgeninde iç açıortay teoreminden

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$

eşitliğini not edelim. Şimdi de dış açıortay teoreminden

$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

eşitliğini not edelim. Bu iki eşitlikten

$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{b}{c}$$

doğar. O halde $\frac{ac}{b} = a+b+c$ olmalıdır.

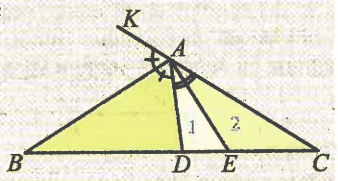
Doğru cevap: D.

Üstteki şekilde $2\alpha + 2\theta = 180°$ olduğundan

$$m(EAD) = \alpha + \theta = 90°$$

olduğuna da dikkat etmiş olmalısınız. Etmediyseniz de edin, çünkü bir çok soruda iç açıortayla dış açıortayı birlikte vermek yerine bir iç açıortayla dik açıyı ya da bir dış açıortayla bir dik açıyı verirler. Unutmayın ki bu üçünden ikisi varsa üçüncüsü de vardır!

Örnek. *ADC bir üçgen*
Bu üçgende
AE iç açıortay
AB dış açıortay
$|ADE| = 1$ br^2
$|AEC| = 2$ br^2
olduğuna göre
$|ABD|$ *kaç* br^2 *dir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

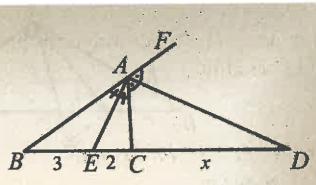
Çözüm: $|ABD| = x$ br^2 olsun. Bu durumda $|DE| = k$ br dersek, $|EC| = 2k$ br ve $|BD| = xk$ br olur. Dış açıortay teoreminden

$$\frac{xk}{(x+3)k} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$$

bulunur ki buradan $x = 3$ olduğu görülür.

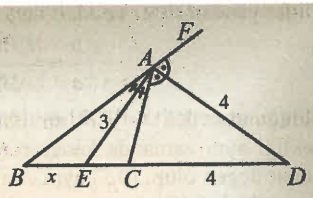
Doğru cevap: C.

24.
ABC bir üçgen
[*AD*] dış açıortay
[*AE*] iç açıortay
$|BE| = 3$ br
$|EC| = 2$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



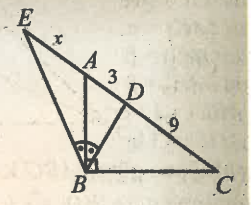
A) 9 **B)** 10 C) 12 D) 15 E) 18

25.
ABC bir üçgen
[*AD*] dış açıortay
[*AE*] iç açıortay
$|AE| = 3$ br
$|AD| = |CD| = 4$ br
$|BE| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



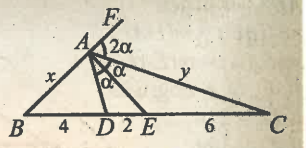
A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

26.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
C, D, A, E doğrudaş
$m(DBA) = m(ABE)$
$|CD| = 9$ br
$|DA| = 3$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



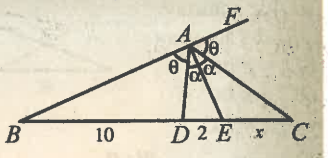
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

27.
ABC bir üçgen
$m(FAC) = 2\alpha$
$m(CAE) = m(EAD) = \alpha$
$|BD| = 4$ br
$|DE| = 2$ br
$|EC| = 6$ br
olduğuna göre $|AB| : |AC| = x : y$ oranı kaçtır?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

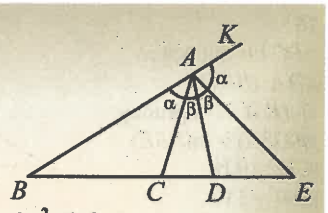
28.
ABC bir üçgen
B, A, F doğrudaş
$m(CAE) = m(DAE) = \alpha$
$m(BAD) = m(FAC) = \theta$
$|BD| = 10$ br
$|DE| = 2$ br
$|EC| = x$ br
olduğuna göre *x* kaçtır?



A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

29.

$m(BAC) = \alpha$
$m(EAK) = \alpha$
$m(CAD) = \beta$
$m(DAE) = \beta$
$|ABD| = 12$ br^2
$|ADE| = 3$ br^2

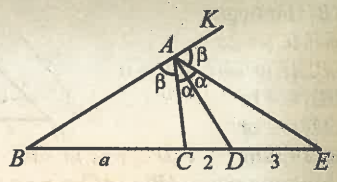


olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?

A) 11 **B) 10** C) 9 D) 8 E) 7

30.

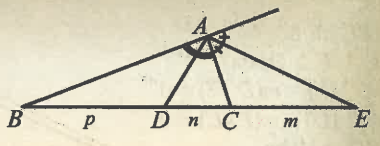
ABC bir üçgen
$m(CAD) = m(DAE)$
$m(BAC) = m(EAF)$
B, C, D, E doğrudaş
$|CD| = 2$ br
$|DE| = 3$ br
olduğuna göre
$|BC| = a$ kaç br dir?



A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

31.

ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$[AE]$ dış açıortay
$|BD| = p$ br
$|DC| = n$ br
$|CE| = m$ br

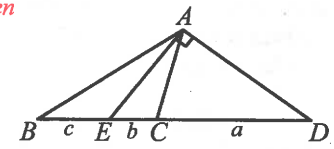


olduğuna göre $\frac{m-n}{m+n}$ oranı hangi orana eşittir?

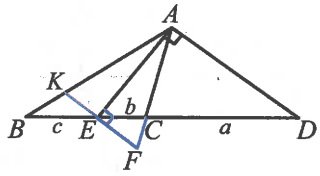
A) $\frac{n}{p}$ B) $\frac{m}{p}$ C) $\frac{m-n}{p}$ D) $\frac{m+n}{p}$ E) $\frac{p}{mn}$

İç ve dış açıortaylar bir aradayken kullandığımız bu teoremin karşıtı da doğrudur. Şimdi, ilerde sıkça karşılaşacağımız bu teoremin kanıtını vereceğiz.

Teorem. *ABD bir üçgen*
$m(DAE) = 90^\circ$
$|BE| = c$ br
$|EC| = b$ br
$|CD| = a$ br
$\frac{a}{a+b+c} = \frac{b}{c}$
ise ABC üçgeninde AE iç açıortay, AD de dış açıortaydır.



Kanıt: AD'ye paralel ve E den geçen doğru AC'yi F'de, AB'yi K'de kessin.



KBE ile ABD üçgenlerinin benzerliğinden dolayı

$$\frac{c}{a+b+c} = \frac{|KE|}{|AD|}$$

olur. Aynı zamanda

$$\frac{c}{a+b+c} = \frac{b}{a}$$

verildiğinden

$$\frac{|KE|}{|AD|} = \frac{b}{a}$$

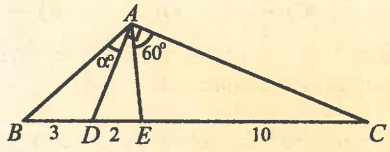
çıkar.

Diğer yandan ACD ve FCE üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{b}{a} = \frac{|EF|}{|AD|}$$

olduğundan $|KE| = |EF|$'dir. AKF üçgeninde $[AE]$ yüksekliği aynı zamanda kenarortay çıktığından AKF ikizkenar üçgen olup, $[AE]$ aynı zamanda iç açıortaydır. Dolayısıyla da $[AD]$ dış açıortay olur.

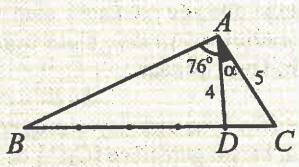
32.



α kaçtır?

30

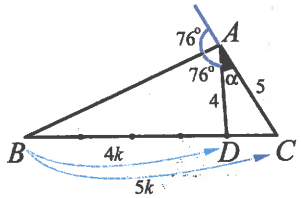
Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = 4\cdot|DC|$
$|AD| = 4$ br
$|AC| = 5$ br
$m(BAD) = 76°$
olduğuna göre
$m(DAC) = \alpha$ *kaç derecedir?*



A) 14 B) 16 C) 18 D) 28 E) 52

Çözüm: Bu soruda sırtınıza çok yük biniyor. Cin gibi olmalısınız. Bu yüzden iki farklı çözüm versek sanırım daha iyi olacak.

Birinci yol. Bu yolda şunu göremezseniz yandınız:



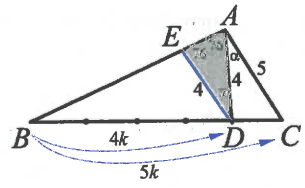
Hem $\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{4}{5}$ hem de $\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{4}{5}$ olduğundan AB doğrusu ADC üçgeninde A açısının dış açıortayıdır.

$$2\cdot 76° + \alpha° = 180°$$

eşitliğinden $\alpha = 28$ olarak bulunur.

İkinci yol. Soruda orantılı doğru parçaları olduğundan aklımıza Tales veya benzerlik teoremlerini getirmeliyiz.

Bu sebeple D'den CA'ya paralel bir doğru çizeceğiz. Bu doğrunun BA'yı kestiği nokta E olsun.



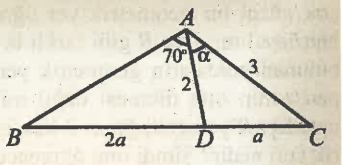
$$\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|CA|}=\frac{4}{5}$$

olması gerektiğinden $|DE| = 4$ br olmalıdır. Bu da ADE üçgeninin ikizkenar olması anlamına gelir.

Diğer yandan iç ters açıların eşliği gereği de $m(ADE) = \alpha$ olur. ADE üçgeninin iç açı ölçülerinin toplamından $\alpha = 28$ olduğu kolaylıkla bulunabilir.

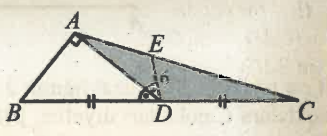
Doğru cevap: D.

33.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$m(BAD) = 70°$
$m(DAC) = \alpha°$
$|AD| = 2$ br
$|AC| = 3$ br
$|BD| = 2\cdot|DC| = 2a$ br
olduğuna göre α kaçtır?



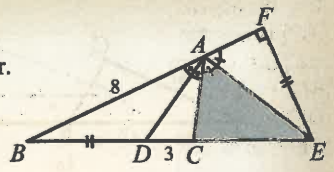
A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

34.
ABC bir üçgen
$DA \perp AB$
$|BD| = |DC|$
$m(BDA) = m(ADE)$
$|DE| = 6$ br
olduğuna göre $|DC|$ kaç br dir?



A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

35.
ABC üçgeninde *A*'ya ait iç açıortay ayağı *D*, dış açıortay ayağı *E*'dir.
$EF \perp BA$
$|EF| = |BD|$
$|DC| = 3$ br
$|BA| = 8$ br
olduğuna göre $|ACE|$ kaç br^2 dir?



A) 6 B) 9 C) 12 D) 18 E) 24

Dış açıortay teoreminin karşıtının da doğru olması, bize çok güzel bir geometrik yer öğretecek. Öncelikle şunu hatırlayalım: A ve B gibi farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nereydi? $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesi değil mi? Evet! Peki, ya A'ya uzaklığı B'ye uzaklığının 2 katı olan noktaların geometrik yeri nedir? Şimdi onu öğreneceğiz.

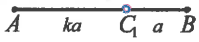
Apollon Çemberi. k bir pozitif reel sayı olmak üzere, A ve B gibi iki farklı noktaya uzaklıkları oranı k olan noktaların geometrik yeri bir çemberdir. İşte bu çembere Apollon çemberi denir.

Şimdi bu noktaların neden bir çember oluşturduğunu izah edelim.

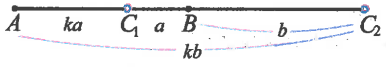
Rastgele bir $[AB]$ doğru parçası çizelim.



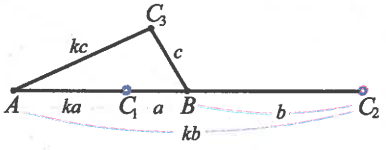
A'ya uzaklığı B'ye uzaklığının 2 katı olan aradığımız bu noktalara C noktaları diyelim. $[AB]$ üzerinde de bu koşulu sağlayan bir nokta vardır. Ona C_1 diyelim.



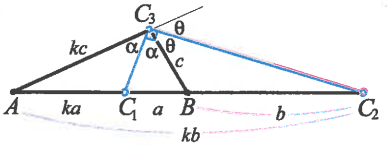
Bir de AB üstünde ama $[AB]$ dışında böyle bir nokta daha olmalıdır. Ona da C_2 diyelim.



AB üzerinde şartı sağlayan başka nokta olamayacağından AB dışından bir nokta arayalım.



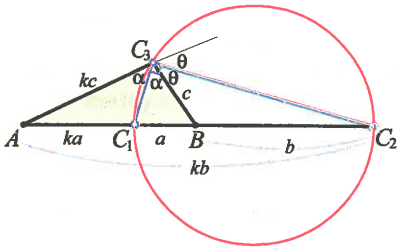
O nokta yukardaki, gözkararıyla işaretlenmiş C_3 noktası olsun. C_1, C_2 ve C_3 noktalarının B'ye uzaklıkları sırasıyla a, b ve c birim ise A'ya uzaklıklarının ka, kb ve kc birim olması gerektiğini biliyoruz.



Şekle dikkatle bakılacak olursa, *yanların oranı tabanların oranına eşit* diye C_3AB üçgeninde $[C_3C_1]$ iç açıortaydır. Diğer yandan

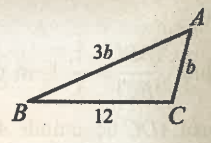
$$b : bk = c : ck$$

ve $[C_1C_3]$ iç açıortay olduğundan, dış açıortay teoreminin karşıtı gereğince $[C_3C_2]$ de dış açıortay olmak zorundadır. Bu durum $C_2C_3C_1$ açısını dik yapar.



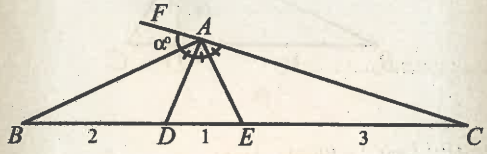
Şu durumda C noktalarının $[C_1C_2]$ doğru parçasını dik açı altında gören noktalar olduğunu anlamış bulunuyoruz. O halde C noktaları, $[C_1C_2]$'yi çap kabul eden çemberi belirtirler.

36.
ABC bir üçgen
$|BC| = 12$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = 3b$ br
olduğuna göre A'nın BC'ye uzaklığı en çok kaç br olabilir?



A) 3 B) 3,5 C) 4 **D) 4,5** E) 5

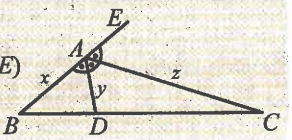
37.
ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $m(BAD) = m(DAE) = m(EAC)$ olacak şekilde D ve E noktaları alınıyor.



$|BD| = 2$ br, $|DE| = 1$ br ve $|EC| = 3$ br olduğuna göre ABC üçgeninin A'ya ait dış açı ölçüsü kaç derecedir?

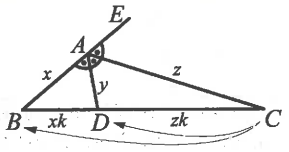
A) 15 B) 22,5 C) 30 **D) 45** E) 60

Soru Tipi. *ABC bir üçgen*
B, A, E doğrudaş
$m(BAD) = m(DAC) = m(CAE)$
$|AB| = x$ br
$|AD| = y$ br
$|AC| = z$ br
olduğuna göre x, y ,z arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x^2 = y \cdot z$ B) $y^2 = x \cdot z$ C) $z^2 = x \cdot y$
D) $xz = xy + yz$ E) $y^2 = x \cdot (x + z)$

Çözümü: Aşağıdaki şekilden takip ediniz.



İç açıortay Teoremi'ne göre

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{x}{z}$$

olduğundan $|BD| = xk$ br dersek $|DC| = zk$ br olur. Dikkat edilecek olursa AC doğrusu ABD üçgeninin A açısının dış açıortayıdır. Dış açıortay teoremine göre de

$$\frac{zk}{xk + zk} = \frac{y}{x}$$

olmalıdır. k'leri sadeleştirip içler-dışlar çarpımı yaparsak

$$xz = xy + yz$$

elde ederiz.

Doğru cevap: D.

Eşitliğin bu hali hiç de akılda kalıcı değildir. Ya denklemden y'yi çekip

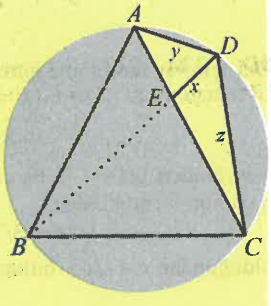
$$y = \frac{xz}{x + z}$$

olarak (çarpımları/toplamları) şekilde akılda tutun ya da eşitliğin her iki tarafını xyz çarpımına bölerek

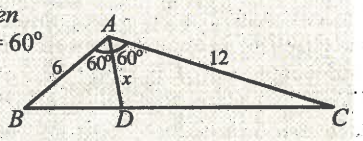
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

eşitliğini unutmamaya çalışın!

Sonuç: *ABC* eşkenar üçgen
D bu üçgenin çevrel çemberi üzerinde bir nokta
$AC \cap BD = \{E\}$
$|DE| = x$ br
$|DA| = y$ br
$|DC| = z$ br
ise *ADC* üçgeninde
$m(ADE) = m(EDC) = 60°$
olacağından $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ olur.



Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BAD) = m(DAC) = 60°$
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 12$ br
olduğuna göre
$|AD| = x$ *kaç* br *dir?*

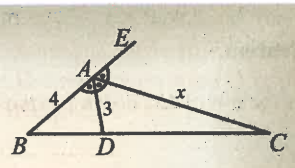


A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: *CAB* açısının bütünleyeninin ölçüsü 60° olduğundan sorumuz yukardaki soru tipine uygundur. O halde hemen değerleri, bulduğumuz formülde yerine yazalım: $x = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = \frac{72}{18} = 4$ olarak bulunur.

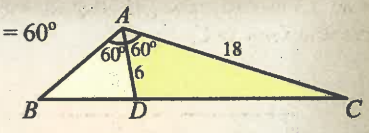
Doğru cevap: A.

38.
ABC bir üçgen
[AD] iç açıortay
B, A, E doğrudaş
$m(EAC) = m(CAD)$
$|AB| = 4$ br ve $|AD| = 3$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



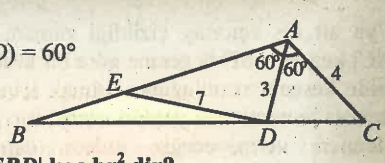
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

39.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(DAC) = 60°$
$|AD| = 6$ birim
$|AC| = 18$ birim
olduğuna göre
$|ADC|$, $|ABD|$'nin kaç katıdır?



A) 2 B) 2,4 C) 2,5 D) 3 E) 3,2

40.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(CAD) = 60°$
$|AC| = 4$ br
$|AD| = 3$ br
$|DE| = 7$ br
olduğuna göre $|EBD|$ kaç br^2 dir?



A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $4\sqrt{3}$

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dış Açıortay Uzunluğu

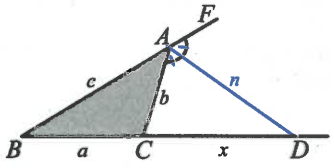
Dış açıortay teoremini artık iyi anlamış olmalısınız. Şimdi de o doğru parçasının uzunluğunu hesaplamayı öğreneceğiz. Hemen ilgili teoremi verelim:

Teorem. *Bir ABC üçgeninde A açısının dış açıortayı, BC'yi D noktasında kessin. O zaman,*

$$|DA|^2 = |DC|\cdot|DB| - |AC|\cdot|AB|.$$

Bir de formülü, uzunlukları adlandırarak verelim:

$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|CD| = x$ br
$|AD| = n$ br



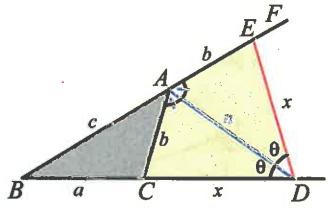
ise $n^2 = x\cdot(x+a) - b\cdot c$ *eşitliği geçerlidir.*

Dış açıortay teoreminin $\frac{x}{x+a} = \frac{b}{c}$ olduğunu hatırlarsanız, o formülde böldüğümüz şeyleri burada çarpıyoruz, araya da ''='' işareti yerine '' – '' işareti koyuyoruz.

Şimdi bu eşitliğin neden geçerli olduğunu kanıtlayalım.

A'ya ait dış açıortay çizildiği zaman, *ABC* üçgeninin [*AC*] kenarı, *ABD* üçgenine göre bir kesen olmaktadır. O halde kesenin uzunluğunu bulmak için yaptığımız gibi Stewart teoreminden yardım istenebilir. Ama biz o sıkıcı işlemleri vermeyeceğiz sadece darda kaldığınızda Stewart teoremini kullanabileceğinizi belirtelim dedik.

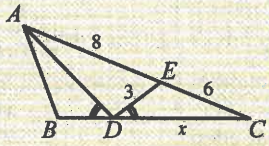
Kanıt: Dış açıortay Teoremi'ne verdiğimiz Kanıt 1'deki şekli kullanacağız.



AD doğrusu *ABC* üçgenine göre dış açıortaydır ama *EDB* üçgenine göre iç açıortaydır. İç açıortayın da boyunu hesaplamayı bildiğimizden sonuca hemencecik varıyoruz:

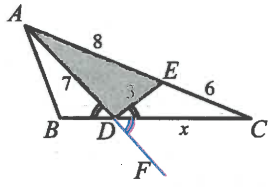
$$n^2 = x\cdot(x+a) - b\cdot c$$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$m(ADB) = m(EDC)$
$|DE| = 3$ br
$|AE| = 8$ br
$|EC| = 6$ br
olduğuna göre $|DC| = x$ *kaç* br *dir?*



A) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{30}$ C) $\sqrt{42}$ D) $\sqrt{55}$ E) $\sqrt{63}$

Çözüm: *AD* kenarı *D* yönünde uzatılırsa ters açıların eşliği gereği *ADB* ile *CDF* açıları eş olacaktır. Bu da *ADE* üçgeninde *DC*'nin dış açıortay olması demektir.



Dış açıortay teoremine göre

$$\frac{6}{6+8} = \frac{3}{|AD|}$$

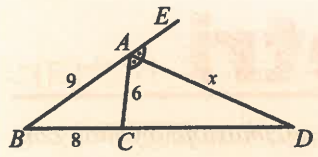
eşitliğinden $|AD| = 7$ br çıkar. Sonra da dış açıortayın boyunun formülünden,

$$x^2 = 6\cdot 14 - 3\cdot 7 = 84 - 21 = 63$$

olduğundan $x = \sqrt{63}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

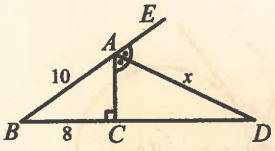
1.



x kaçtır?

$\sqrt{330}$

2.

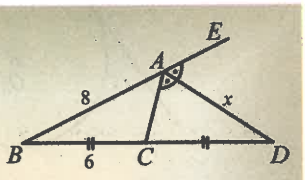


x kaçtır?

$6\sqrt{5}$

3.

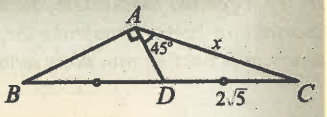
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
$|AB| = 8$ br
$|BC| = |CD| = 6$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x^2 kaçtır?



A) 38 **B) 40** C) 42 D) 44 E) 48

4.

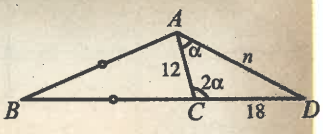
ABC bir üçgen
$BA \perp AD$
$m(DAC) = 45°$
$|BD| = |DC| = 2\sqrt{5}$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

5.

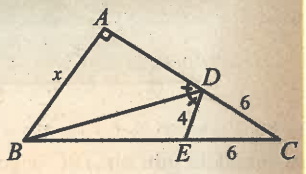
ABC bir üçgen
$m(DAC) = \alpha$
$m(ACD) = 2\alpha$
$|BA| = |BC|$
$|AC| = 12$ br
$|CD| = 18$ br
olduğuna göre $|AD| = n$ kaç birimdir?



A) $4\sqrt{15}$ B) $5\sqrt{15}$ C) $6\sqrt{15}$ D) $7\sqrt{15}$ E) $8\sqrt{15}$

6.

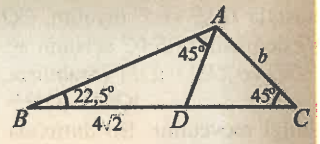
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$m(ADB) = m(BDE)$
$|DC| = |EC| = 6$ br
$|DE| = 4$ br
olduğuna göre
$|AB| = x$ kaç br dir?



A) 8 B) $6\sqrt{2}$ C) 9 **D) $8\sqrt{2}$** E) 10

7.

ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$m(B) = 22,5°$
$m(BAD) = m(C) = 45°$
$|BD| = 4\sqrt{2}$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre b kaçtır?



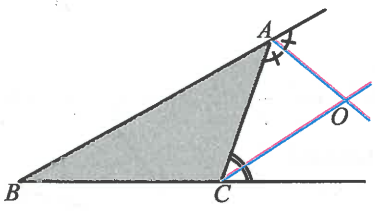
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) 4

Geometri Notları

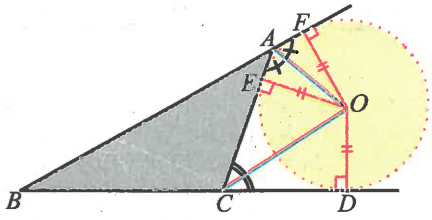
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dış Teğet Çemberler

Nasıl ki iç açıortayların kesiştiği yer üçgen için özel bir yerdi, dış açıortayların kesiştiği yer de öyledir. Bir üçgende iki dış açıortayın kesiştiği yer, üçgenin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir. İyi de, dış teğet çember ne ki, merkezi nere ola? Şimdi buna bir yorum getirelim:



Üst şekildeki gibi bir ABC üçgeni çizip bu üçgenin A ve C açılarına ait dış açıortayları çizelim. Bu dış açıortayların kesişim noktasına da O diyelim.



O'dan BC, CA ve AB doğrularına inen dikme ayaklarına sırasıyla D, E ve F diyelim. CO doğrusu ACD açısının, AO doğrusu da FAC açısının açıortayı olduğundan $|OD| = |OE|$ ve $|OE| = |OF|$ yazabiliriz. O halde elimizde

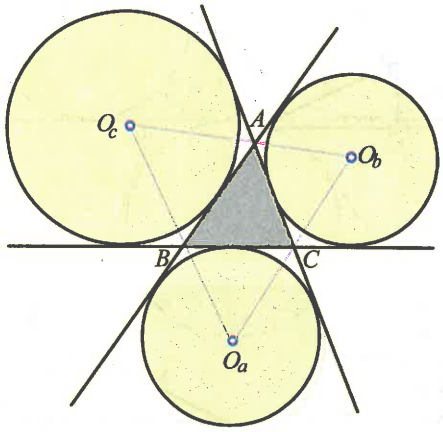
$$|OD| = |OE| = |OF|$$

eşitliği mevcuttur. Bu durumda daha önce anlattığımız üzere D, E, F noktalarının belirttiği çember O merkezlidir.

$$OD \perp BC,\ OE \perp CA \text{ ve } OF \perp AB$$

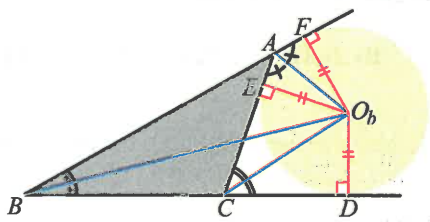
olması da bu çemberin üçgenin kenarlarına veya kenarlarını taşıyan doğrulara teğet olması anlamına gelir. Hem üçgenin dış bölgesinde olması hem de bu teğetlik durumundan çembere üçgenin bir dış teğet çemberi denir.

Nasıl ki iç teğet çember üçgenin iç bölgesinde kalır diye ona İç Çember (Inner Circle) deyip merkezini I ile gösteriyoruz, dış teğet çember de üçgenin dış bölgesinde kalır diye ona Dış Çember (Outer Circle) deyip merkezini O ile göstereceğiz.



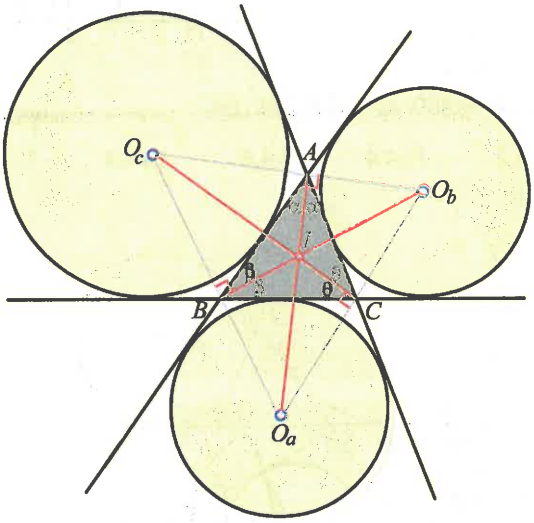
Fakat yukardaki şekilden de kolayca görüleceği üzere bir üçgenin üç adet dış teğet çemberi vardır. Her birinin merkezini O ile göstermek karışıklığa yol açacaktır. Bu yüzden üçgenin $[BC]$ kenarına yani uzunluğunu a ile göstermeye alıştığımız kenarına teğet olan dış çemberin merkezini O_a ile, üçgenin $[CA]$ kenarına yani uzunluğunu b ile göstermeye alıştığımız kenarına teğet olan dış çemberin merkezini O_b ile, üçgenin $[AB]$ kenarına yani uzunluğunu c ile göstermeye alıştığımız kenarına teğet olan dış çemberin merkezini O_c ile gösteririz. Hem de bu sayede çevrel çember merkezini simgeleyen O harfi misyonunu devam ettirmiş olur.

Dış teğet çember merkezleri, bir üçgenin herhangi iki dış açıortayının kesiştiği noktalardır, fakat bu noktalar aynı zamanda üçüncü açının da iç açıortayı üzerindedirler.



Daha önce $|OD| = |OE| = |OF|$ olduğunu kanıtlamıştık. İşte buradaki $|OD| = |OF|$ eşitliği bize BO doğrusunun ABC açısının iç açıortayı olduğunu anlatır.

Böylelikle 'Üçgende Açı' dersinde zorlanarak kanıtladığımız ''*İki dış açıortayın kesiştiği yerden üçüncü açının iç açıortayı geçer*'' teoremi de çok sade biçimde kanıtlanmış olur.



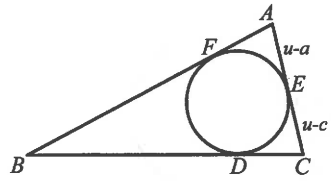
Yukarıdaki şekilden takip ediniz.

ABC üçgeninde

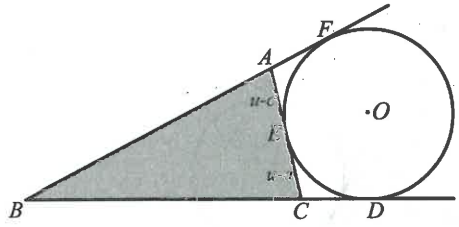
- ✓ BO_a ve CO_a birer dış açıortay olduğundan AO_a iç açıortaydır.
- ✓ CO_b ve AO_b birer dış açıortay olduğundan BO_b iç açıortaydır.
- ✓ AO_c ve BO_c birer dış açıortay olduğundan CO_c iç açıortaydır.
- ✓ AO_a, BO_b, CO_c doğruları *ABC* üçgeninin iç açıortayları olduklarından *I* noktasında kesişirler.
- ✓ Bir üçgende aynı açıya ait iç açıortay ile dış açıortay dik kesişeceğinden $AO_a \perp AO_c$ dir.
- ✓ Bir üçgende aynı açıya ait iç açıortay ile dış açıortay dik kesişeceğinden $BO_b \perp BO_a$ dır.
- ✓ Bir üçgende aynı açıya ait iç açıortay ile dış açıortay dik kesişeceğinden $CO_c \perp CO_b$ dir.
- ✓ O halde *I* noktası $O_aO_bO_c$ üçgeninin diklik merkezidir.

Şimdi de iç teğet çember ile dış teğet çember arasındaki güzel bir ilişkiden bahsedeceğiz:

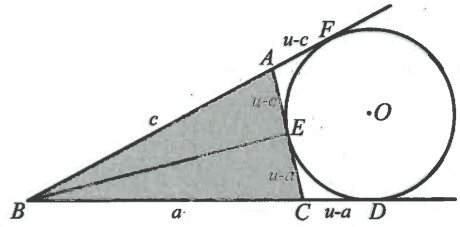
Bir üçgeninin iç teğet çemberi üçgenin herhangi bir kenarını hangi oranda bölüyorsa, o kenara değen dış teğet çember aynı kenarı o oranın tam tersiyle böler.



Yani üstteki şekilde $\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{u-a}{u-c}$ iken



bu şekilde $\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{u-c}{u-a}$ olur. Bunun sebebi oldukça basittir. Hemen izah edelim.



Öncelikle $|AF| = |AE|$, $|BF| = |BD|$ ve $|CE| = |CD|$ eşitliklerini unutmayalım. Diğer yandan

$$\begin{aligned} 2u &= \text{Çevre}(ABC) \\ &= |BA| + |AC| + |BC| \\ &= |BA| + |AE| + |EC| + |BC| \\ &= |BA| + |AF| + |CD| + |BC| \\ &= |BF| + |BD| \end{aligned}$$

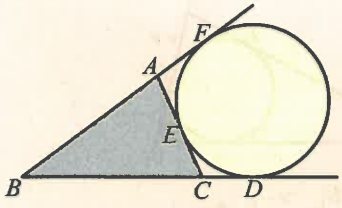
olduğundan $|BF| = |BD| = u$ br olur.

$|BA| = c$ br ve $|BC| = a$ br ise $|AF| = |AE| = u - c$ br ve $|CD| = |CE| = u - a$ br olur.

Kanıtımız bitti ama birkaç laf daha edeceğiz. Bulduğumuz sonuç bize *BEA* ile *BEC* üçgenlerinin çevrelerinin eşit olduğunu anlatır. Demek ki *E* değme noktasının üçgenin kenarları üzerinden *B* köşesine olan uzaklığı tam yarım çevre kadardır. İşte bu yüzden [*BE*] kesenine **çevreortay** denir.

Bir üçgenin üç adet dış teğet çemberi olduğundan üç adet çevreortayı vardır. Bu üç çevreortay her üçgende noktadaştır. Karşıt-Ceva teoreminden hemencecik kanıtlayabilirsiniz.

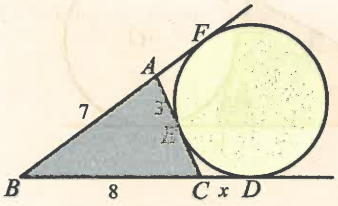
1.



Çevre(ABC) = 30 br ise $|BD|$ kaç br dir?

15

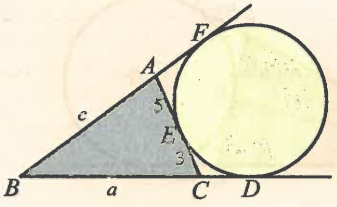
2.



x kaçtır?

2

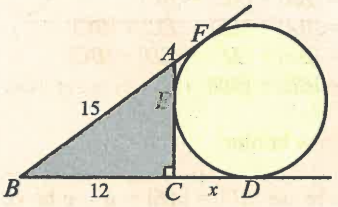
3.



$a - c$ farkı kaçtır?

2

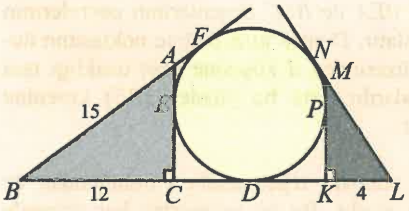
4.



x kaçtır?

6

5.

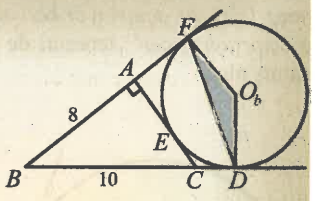


$|LM| + |MP|$ toplamı kaçtır?

10

6.

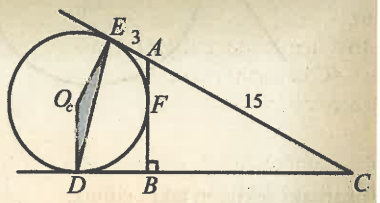
Yandaki O_b merkezli çember ABC dik üçgeninin dış teğet çemberi olup D, E, F teğet değme noktalarıdır.
$CA \perp FB$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre $|DO_bF|$ kaç br^2 dir?



A) 4,2 B) 4,4 C) 4,6 **D) 4,8** E) 5

7.

ABC bir dik üçgen
$AB \perp DC$
E, F, D teğet değme noktaları
$|EA| = 3$ birim
$|AC| = 15$ birim

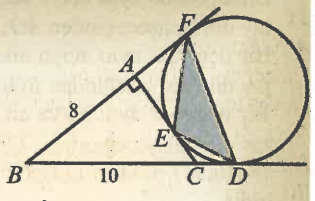


O_c dış teğet çemberin merkezi olduğuna göre $|EO_cD|$ kaç br^2 dir?

A) 10 B) 10,2 C) 10,4 D) 10,6 **E) 10,8**

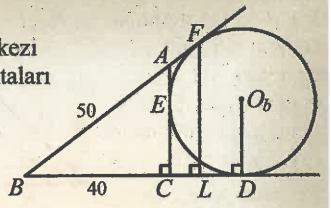
8.

Yandaki çember ABC dik üçgeninin dış teğet çemberi olup D, E, F teğet değme noktalarıdır.
$CA \perp FB$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre $|DEF|$ kaç br^2 dir?



A) 7,2 B) 8 C) 9,6 D) 10 E) 12,4

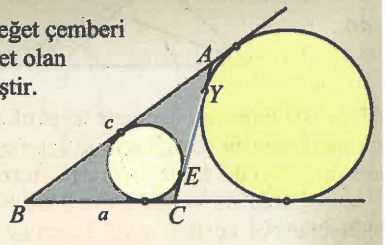
9.
ABC bir dik üçgen
O_b dış teğet çember merkezi
D, E, F teğet değme noktaları
$AC \perp BD$
$FL \perp BD$
$O_bD \perp BD$
$|BC| = 40$ br
$|BA| = 50$ br
olduğuna göre $|LD| - |CL|$ farkı kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
ABC üçgeninin iç teğet çemberi ve AC kenarına teğet olan dış çemberi çizilmiştir.

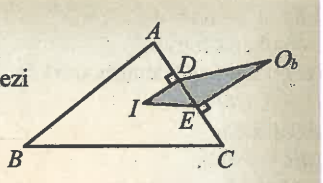
$c > a$ olmak üzere
$|AB| = c$ birim
$|BC| = a$ birim



olduğuna göre $|EY|$ kaç br dir?

A) $c-a$ B) $c-2a$ C) $2a-c$ D) c^2-a^2 E) $2c-a$

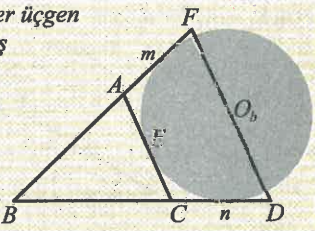
11.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
O_b dış teğet çember merkezi
$ID \perp AC$
$O_bE \perp AC$
$|BC| - |AB| = 3$ br



Bu üçgenin, merkezleri verilen çemberlerinin yarıçaplarının toplamı 10 br olduğuna göre $|IEO_bD|$ kaç br^2 dir?

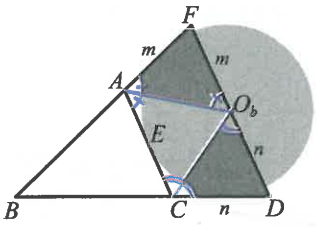
A) 10 B) 13 C) 15 D) 18 E) 30

Örnek. *ABC ve FBD birer üçgen O_b, ABC üçgeninin bir dış teğet çember merkezi $O_b \in [DF]$ $|AF| = m$ br $|CD| = n$ br olduğuna göre $|FD|$'nin m ve n türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\sqrt{mn}$ B) $\sqrt{m^2+n^2}$ C) $2\sqrt{mn}$ D) $\frac{m+n}{2}$ E) $m+n$

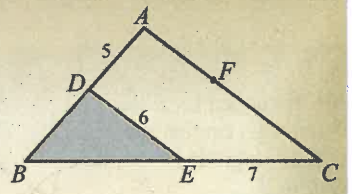
Çözüm: Bu sorunun çözümü FD'nin AC'ye paralel olmasında yatıyor. Şöyle ki:



ABC üçgenine göre O_b dış teğet çember merkezi olduğundan AO_b ve CO_b birer dış açıortaydır. Verilen paralellik şekilden de görüleceği üzere FAO_b ve DCO_b üçgenlerini ikizkenar yapar. Bu yüzden $|AF| = |FO_b| = m$ br ve $|CD| = |DO_b| = n$ br olur. Buradan da $|FD| = m + n$ br olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

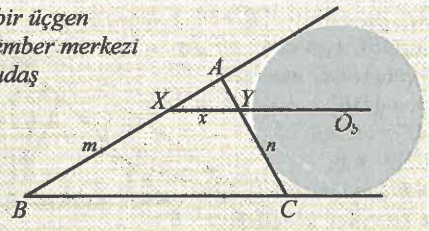
12.
ABC bir üçgen
$F \in [AB]$
$DE \,//\, AC$
$|AD| = 5$ br
$|DE| = 6$ br
$|EC| = 7$ br



F noktası, DBE üçgeninin bir dış teğet çember merkeziyse $|DBE|$ kaç br^2 dir?

A) $3\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{6}$ C) $5\sqrt{6}$ **D) $6\sqrt{6}$** E) $12\sqrt{6}$

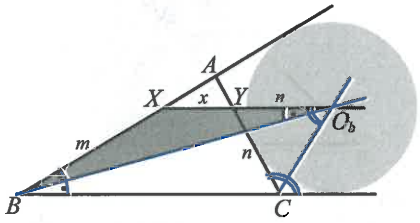
Örnek. *ABC bir üçgen*
O_b dış teğet çember merkezi
X, Y, O_b doğrudaş
XY // BC
$|XB| = m$ br
$|YC| = n$ br
$|XY| = x$ br



olduğuna göre x'in m ve n türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m-n$ B) $\sqrt{mn}$ C) $\sqrt{m^2-n^2}$ D) $2n-m$ E) $\frac{m-n}{2}$

Çözüm: Bu sorunun çözümünde de tüm olay *XY*'nin *BC*'ye paralel olmasında yatıyor. Şöyle ki:

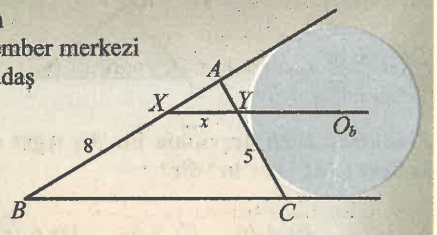


O_b dış teğet çember merkezi olduğundan CO_b dış açıortaydır. Verilen paralellikten dolayı CYO_b üçgeninin ikizkenar olduğunu anlarız. Bu da $|YO_b| = n$ br olduğu anlamına gelir. Diğer yandan BO_b de iç açıortay olduğundan, verilen paralellik gereği BXO_b üçgeni de ikizkenar olur. Şu durumda $|BX| = |XO_b|$ olması gerektiğinden $m = x + n$ yani $x = m - n$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

13.
ABC bir üçgen
O_b dış teğet çember merkezi
X, Y, O_b doğrudaş
XY // BC

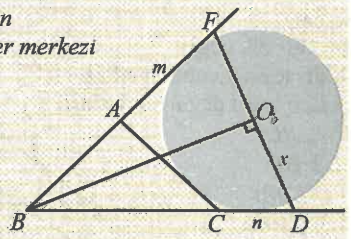
$|XB| = 8$ br
$|YC| = 5$ br
$|XY| = x$ br



olduğuna göre x kaçtır?

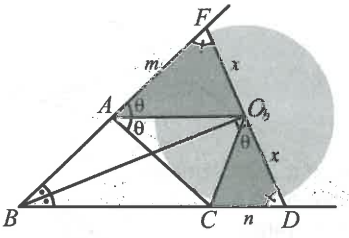
A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

Örnek. *ABC bir üçgen*
O_b bir dış teğet çember merkezi
$F \in BA, D \in BC$
$FD \perp BO_b$
$|O_bD| = x$ br
$|AF| = m$ br
$|CD| = n$ br
olduğuna göre x'in m ve n türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $m-n$ B) $\sqrt{mn}$ C) $\sqrt{m^2-n^2}$ D) $2n-m$ E) $\frac{m-n}{2}$

Çözüm: Amacımız O_bFA ve O_bDC üçgenlerinin benzer olduğunu göstermek olacak. Bunun için de iki açısının eş olduğunu göstermeye çalışacağız.



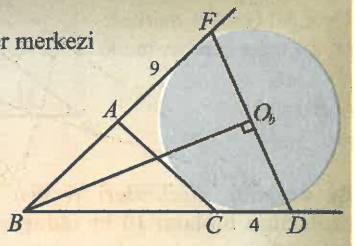
BF ve *BD* doğruları çembere teğet olup, BO_b, bu çemberin merkezinden geçtiği için iç açıortaydır. BO_b aynı zamanda *DF*'yi dik kestiği için *FBD* ikizkenar üçgendir.

$m(DFB) = m(BDF)$ ve $|FO_b| = |O_bD| = x$

olduğunu not edelim. *ABC* üçgenine göre AO_b bir dış açıortay olduğundan $m(FAO_b) = \theta$ dersek $m(O_bAC) = \theta$ olur. Bu da $m(CAB) = 180° - 2\theta$ anlamına gelir. Şimdi taa geometrinin ilk dersine gidiyoruz: *ABC* üçgeninde BO_b iç açıortay, CO_b dış açıortay olduğundan $m(CO_bB)$ değeri $m(CAB)$ değerinin yarısı yani $90° - \theta$ olur. Bu da DO_bC açısının ölçüsünün θ olduğunu anlatır ki benzerliği yakalamış oluruz. Gerekli eşleme kurulursa $\frac{x}{m} = \frac{n}{x}$ orantısından $x^2 = m \cdot n$ eşitliğine erişilir.

Doğru cevap: B.

14.
ABC bir üçgen
O_b bir dış teğet çember merkezi
$F \in BA, D \in BC$
$FD \perp BO_b$
$|AF| = 9$ br
$|CD| = 4$ br
olduğuna göre
$|FD|$ kaç br dir?



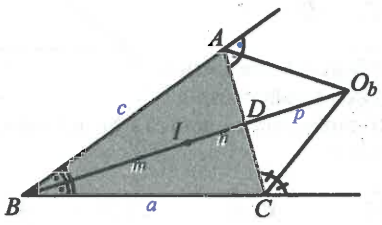
A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 18

Teorem. *ABC üçgeninin iç çember merkezi I, A ve C'ye ait dış açıortayların kesim noktası O_b ve BO_b doğrusunun AC'yi kestiği nokta D olsun.*

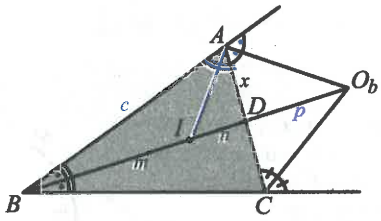
$|BI| = m$ br
$|ID| = n$ br
$|DO_b| = p$ br
$|AB| = c$ br
$|BC| = a$ br
ise hem

$$\frac{m}{m+n+p} = \frac{n}{p}$$

olur hem de $m(m+n+p) = ac$ olur.



Hemen sebebini izah edelim:



$|AD| = x$ br olsun. I noktası iç teğet çember merkezi olduğundan iç açıortayların kesim noktasıdır, bu yüzden AI iç açıortaydır. İç açıortay teoremine göre

$$\frac{x}{c} = \frac{n}{m}$$

olur. Diğer yandan dış açıortay teoremine göre

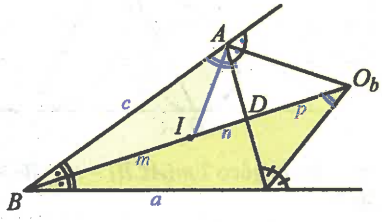
$$\frac{m}{m+n+p} = \frac{x}{c}$$

oluyor. İlk eşitliği burada kullanırsak

$$\frac{m}{m+n+p} = \frac{n}{p}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Gelelim ikinci sonucun kanıtına...

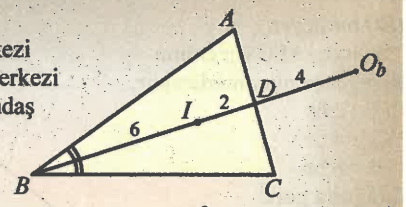


Geometrinin ilk derslerinden BO_bC açısının ölçüsünün BAC açısının ölçüsünün yarısı olduğunu biliyoruz. Bu durum BAI ile BO_bC üçgenlerini A.A. gereğince benzer yapar. Eşleme kurulursa

$$\frac{m}{a} = \frac{c}{m+n+p}$$

çıkar ki bu da $m(m+n+p) = ac$ eşitliğinin kanıtıdır.

15.
ABC bir üçgen
I iç çember merkezi
O_b dış çember merkezi
B, I, D, O_b doğrudaş
$|BI| = 6$ br
$|ID| = 2$ br
$|DO_b| = 4$ br
olduğuna göre $|ABC|$ en çok kaç br^2 olabilir?

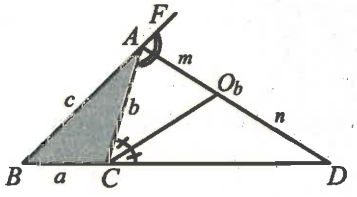


A) 24 B) 30 C) 32 D) 36 E) 72

Teorem. *ABC üçgeninin A'ya ait dış açıortayı BC'yi D'de kessin. C'ye ait dış açıortayın da bu dış açıortayla arakesiti O_b olsun.*

$|AO_b| = m$ br *ve*
$|O_bD| = n$ br *ise*

$$\frac{m}{n} = \frac{c-b}{a}$$



Kanıt: $|CD| = x$ br olsun. Daha önce Dış Açıortay dersinde

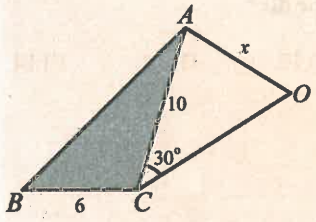
$$\frac{x}{b} = \frac{a}{c-b}$$

olduğunu kanıtlamıştık. CO_b doğrusu ACD üçgeninde iç açıortay olduğundan

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{x}$$

dir. Şu durumda istenilen yani $\frac{m}{n} = \frac{c-b}{a}$ eşitliği kanıtlanmış demektir.

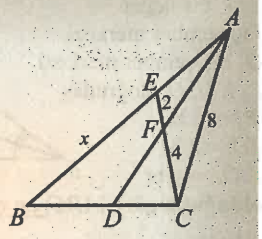
16.



O noktası, ABC üçgenine ait bir dış teğet çember merkezi ise x kaçtır?

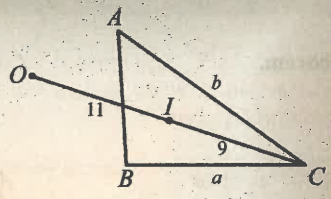
$2\sqrt{7}$

17.
ABC bir üçgen
D noktası, AEC üçgeninin dış teğet çember merkezidir.
$|EF| = 2$ br
$|FC| = 4$ br
$|CA| = 8$ br
olduğuna göre
$|EB| = x$ kaç br dir?



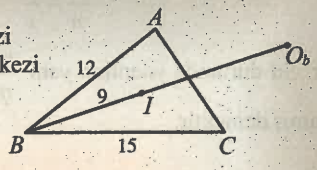
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 **E) 12**

18.
Şekildeki I noktası ABC üçgeninin iç teğet çemberinin, O noktası da dış teğet çemberinin merkezidir.
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|CI| = 9$ br
$|OI| = 11$ br
olduğuna göre b/a oranı kaçtır?



A) 1 B) 1,2 C) 1,25 D) 1,4 E) 1,5

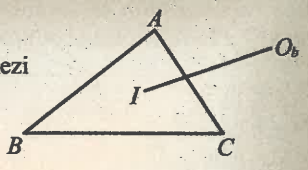
19.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
O_b dış teğet çember merkezi
$|BI| = 9$ br
$|BA| = 12$ br
$|BC| = 15$ br



olduğuna göre $|IO_b|$ kaç br dir?

A) 10 **B) 11** C) 12 D) 13 E) 14

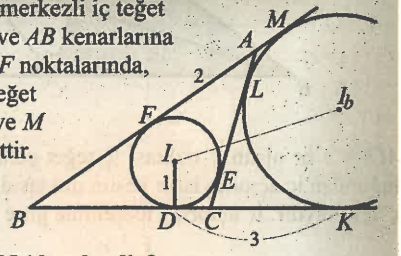
20.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
O_b dış teğet çember merkezi
$|BC| - |AB| = 5$ br



Bu üçgenin, merkezleri verilen çemberlerinin yarıçaplarının toplamı 12 br olduğuna göre $|IO_b|$ kaç br dir?

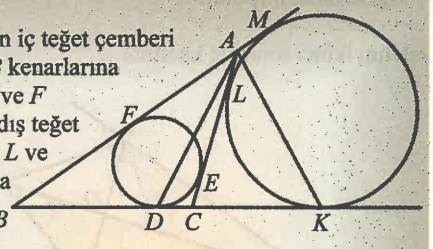
A) 12 **B) 13** C) 15 D) 17 E) 20

21.
ABC üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında, O_b merkezli dış teğet çemberi de K, L ve M noktalarında teğettir.
$|ID| = 1$ br
$|FA| = 2$ br
$|DK| = 3$ br
olduğuna göre $|IO_b|$ kaç br dir?



A) $2\sqrt{2}$ B) 3 **C) $\sqrt{10}$** D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{13}$

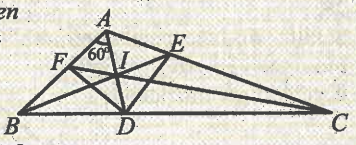
22.
ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında, dış teğet çemberi de K, L ve M noktalarında teğettir.



$|AD| = |AK|$ olduğuna göre $2 \cdot m(ACB) - m(ABC)$ farkı kaç derecedir?

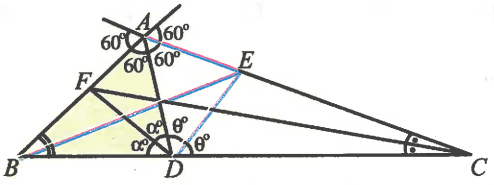
A) 210 **B) 180** C) 150 D) 120 E) 90

Örnek. *ABC bir üçgen* $AD \cap BE \cap CF = \{I\}$ *I iç çember merkezi* $m(CAD) = 60°$ *olduğuna göre* $m(FDE)$ *kaç derecedir?*



A) 60 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

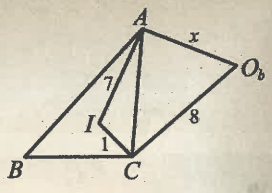
Kanıt: *BE* ve *CF* birer iç açıortay olduklarından onların kesim noktasından geçen *AD* de bir iç açıortaydır. O halde $m(BAD) = 60°$ yazabiliriz.



Şimdi $[BA]$ ve $[CA]$ kenarlarını *A* yönünde biraz uzatalım. *ABD* üçgenine odaklanalım. Bu üçgene göre *AE* bir dış açıortay ve *BE* bir iç açıortay olduğundan *DE* de dış açıortay olmak zorundadır. $m(ADE) = m(EDC) = \theta$ olsun. Şimdi de *ADC* üçgenine geçiyoruz. Bu üçgene göre *AF* bir dış açıortay ve *CF* bir iç açıortaydır. O halde *DF* de dış açıortay olmalıdır. $m(ADF) = m(FDB) = \alpha$ olsun. $2\alpha + 2\theta = 180°$ olduğundan $\alpha + \theta = m(FDE) = 90°$ olarak bulunur.

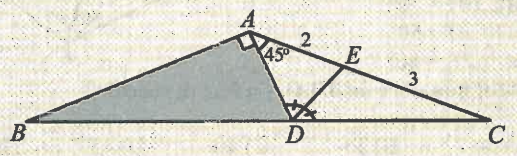
Doğru cevap: C.

23.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
O_b dış teğet çember merkezi
$|AI| = 7$ br
$|CI| = 1$ br
$|CO_b| = 8$ br
$|AO_b| = x$ br
olduğuna göre x **kaçtır?**



A) 3 **B) 4** C) 5 D) 6 E) 7

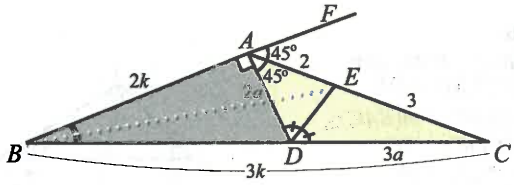
Örnek [Mehmet YAŞAR]. *A açısının ölçüsü 135° olan bir ABC üçgeninin [BC] kenarı üzerinde BA ⊥ AD olacak şekilde bir D noktası alınıyor. ADC üçgeninde D'ye ait iç açıortay ayağı E olup* $|AE| = 2$ br *ve* $|EC| = 3$ br *dir.*



Buna göre $|ABD|$ *kaç* br^2 *dir?*

A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 20

Çözüm: Alt şekilden takip ediniz. *BA* kenarı *A* yönünde uzatılırsa $m(CAF) = 45°$ olacağından *BAD* üçgeninde *AC*'nin dış açıortay olduğu görülür.



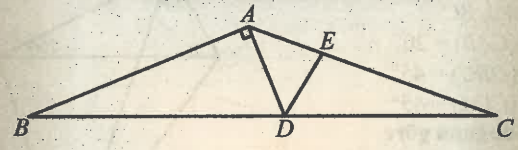
AE ve *DE* dış açıortay olduklarından *BE* de iç açıortay olmak zorundadır. $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{2}{3}$ diye $|DA| = 2a$ br dersek $|DC| = 3a$ br olur. Aynı zamanda $|BA| = 2k$ br dersek $|BC| = 3k$ br olur. Dış açıortayın boyunu bulma formülüne göre

$$5^2 = 3a \cdot 3k - 2a \cdot 2k$$

olur ki buradan $a \cdot k = 5$ bulunur. $|BAD| = 2ak$ br^2 olduğundan cevap 10 br^2 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

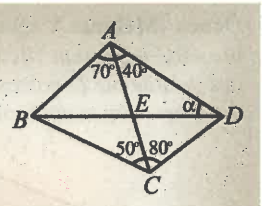
24.
ABC ikizkenar üçgeninin *[BC]* kenarı üzerinde *BA ⊥ AD* olacak şekilde bir *D* noktası alınıyor.



***E* noktası *ABD* dik üçgeninin bir dış teğet çember merkezi olduğuna göre $m(ADE)$ kaç derecedir?**

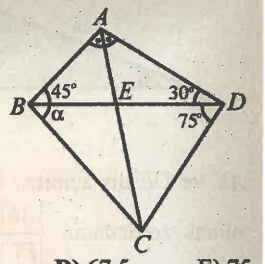
A) 52,5 **B)** 56,25 C) 57,5 D) 61,25 E) 67,5

25.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$m(DAC) = 40°$
$m(CAB) = 70°$
$m(BCA) = 50°$
$m(ACD) = 80°$
olduğuna göre $m(BDA) = \alpha$ kaç derecedir?



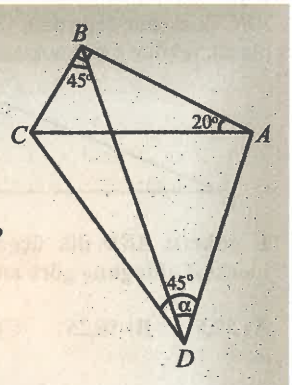
A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

26.
$ABCD$ bir dörtgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$m(DAC) = m(BAC)$
$m(CDB) = 75°$
$m(BDA) = 30°$
$m(ABD) = 45°$
$m(DBC) = \alpha°$
olduğuna göre α kaçtır?



A) 30 B) 45 C) 60 **D) 67,5** E) 75

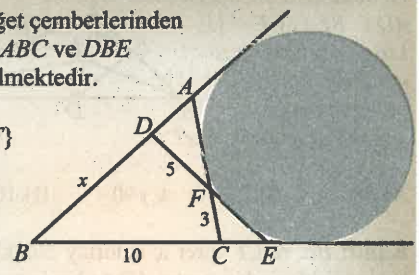
27.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$m(CAB) = 20°$
$m(DBC) = 45°$
$m(CDA) = 45°$
olduğuna göre
$m(BDA) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 40 **B) 35**
C) 30 D) 25 E) 20

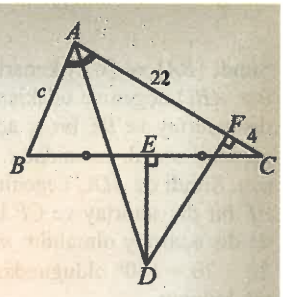
28.
Şekilde, dış teğet çemberlerinden biri ortak olan ABC ve DBE üçgenleri görülmektedir.

$AC \cap DE = \{F\}$
$|BC| = 10$ br
$|CF| = 3$ br
$|FD| = 5$ br
$|DB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



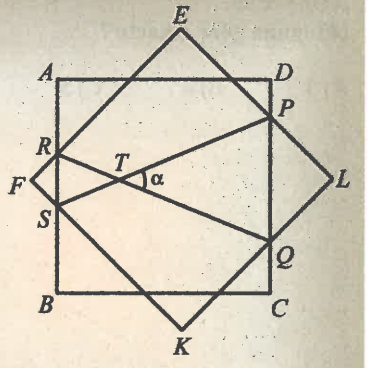
A) 6 B) 7 **C) 8** D) 9 E) 10

29.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$|BE| = |EC|$
$DE \perp BC$
$DF \perp CA$
$|CF| = 4$ br
$|FA| = 22$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c kaçtır?



A) 12 B) 14 C) 16 **D) 18** E) 20

30.
$ABCD$ ve $EFKL$ birer eş karedir.
$SP \cap RQ = \{T\}$
olduğuna göre
$m(PTQ) = \alpha$
kaç derecedir?



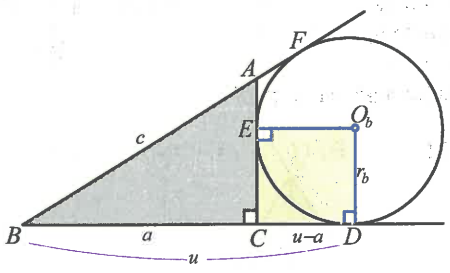
A) 30
B) 36
C) 45
D) 60
E) 72

DIŞ TEĞET ÇEMBER YARIÇAPININ BULUNUŞU

Nasıl ki iç teğet çember yarıçapını bulmak için iki türlü alan hesaplıyor ve birbirlerine eşitliyorduk, dış teğet çember yarıçapını bulurken de aynısını yapacağız. Fakat $S = u \cdot r$ gibi bir formülümüz olmalı ki Heron'dan veya tabançarpıyükseklikbölüiki'den veya başka türlü bulduğumuz alanı ona eşitleyelim. Üzülmeyin, birazdan öyle bir formülümüz olacak!

Her ne kadar iç teğet çember yarıçapını bulmak için formül lazım olsa da, hatırlarsanız bazen hiç de formül kullanmadan r'yi bulabiliyorduk. Örneğin dik üçgende I'dan kenarlara dikmeler indirince kare oluşuyor ve işimizi hemencecik görebiliyorduk. Aynı durum dış teğet çemberlerde de var. Hatta illa üçgenin dik olmasına gerek yok, sadece bir açısı özel olsun yeter. Hepsini tek tek göstereceğiz. Dik üçgen ile başlayalım.

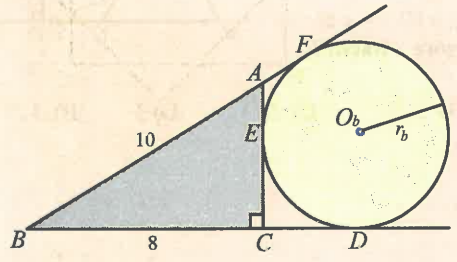
Dik Üçgende Dış Teğet Çember Yarıçapı. Önce dik kenarlara teğet olan dış çemberlerin yarıçaplarını bulmayı öğreneceğiz. Bu sebeple hemen bir dik üçgen ve ardından bir dik kenarına teğet olan dış çemberini çizivereliim.



Yukardaki şekilde dik kenar uzunlukları a ve b olan bir dik üçgen görmektesiniz. Dış çember de uzunluğu b olan kenara teğet verilmiş. Şaşacaksınız ama cevap 1 saniyelik: $r_b = u - a$. Bu kadar!

$|BF| = |BD| = u$ olduğunu daha önce öğrenmiştik. $|BC| = a$ olduğundan $|CD| = u - a$ olur. O_b noktasından kenarlara veya uzantılarına dikler indirilirse O_bECD dörtgeninin bir kare olduğu görülür.

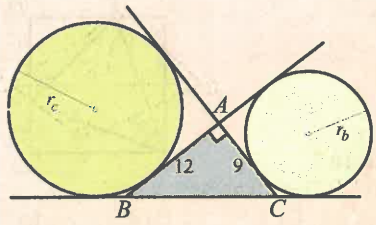
31.



r_b kaçtır?

4

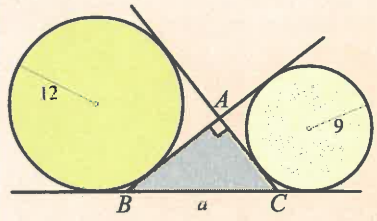
32.



$r_b + r_c$ kaçtır?

15

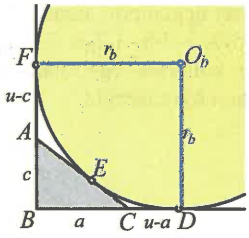
33.



a kaçtır?

21

Dik kenarlara teğet olan dış çember yarıçaplarını bulmayı öğrendik. Şimdi hipotenüse teğet olan dış çemberi inceleyelim. Bu onlardan da kolay!



Yukardaki şekilden de görüldüğü üzere, hipotenüse teğet olan dış çemberin yarıçapı her daim u'ya yani yarımçevreye eşittir.

34.
Dik kenar uzunlukları 5 br ve 12 br olan bir dik üçgenin en büyük dış teğet çemberinin yarıçapı kaç br dir?

15

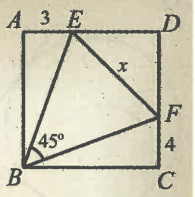
35.
6-8-10 üçgeninin dış teğet çemberlerinin yarıçaplarının toplamı kaç br dir?

22

36.
A açısı dik olan bir ABC üçgeninde a, r_b ve r_c arasında geçerli olan bağıntı nedir?

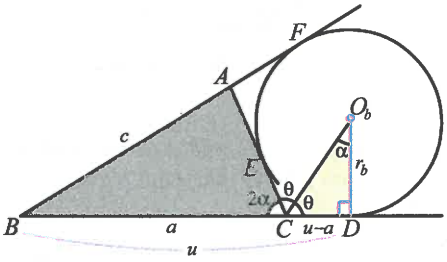
$a = r_b + r_c$

37.
$ABCD$ bir kare
$m(EBF) = 45°$
$|AE| = 3$ birim
$|FC| = 4$ birim
$|EF| = x$ birim
olduğuna göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Özel Üçgenlerde Dış Teğet Çember Yarıçapı. Kenarlarına göre özel üçgenler genelde dik üçgen olduklarından onlarda dış çember yarıçapı hesaplamayı öğrendik. Şimdi açılarına göre özel üçgenlerle, kenarlarına göre özel olup dik olmayan 3-5-7, 5-7-8, 3-7-8, 7-8-13, ... gibi üçgenlerde özel açının kollarına teğet olan dış çemberlerin yarıçaplarını bulmayı öğreneceğiz.



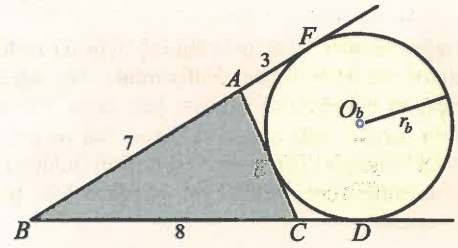
Yukardaki gibi, sözgelimi C açısı özel olan bir ABC üçgeni çizelim. Üçgenin $[CA]$ kenarına dıştan teğet olan çemberi de çizelim. Merkezi O_b olsun. $m(C) = 2\alpha$ olsun.

Öğrendiğimiz üzere CO_b, ABC üçgenine ait bir dış açıortaydır. Dış açıortay ölçülerine θ dersek, $m(DO_bC) = \alpha$ olur.

Bildiğiniz üzere özel açıların yarıları da, katları da özeldir. Bu yüzden O_bDC bir özel üçgendir. O özel üçgenin kuralları kullanılarak r_b değeri a cinsinden bulunur. Şeklimize göre

$$\tan\alpha = \frac{u-a}{r_b}.$$

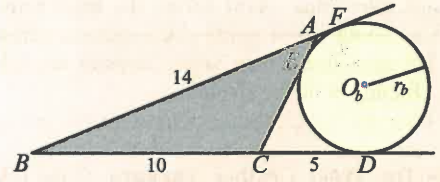
38.



r_b kaçtır?

$2\sqrt{3}$

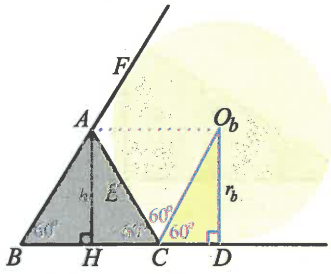
39.



r_b kaçtır?

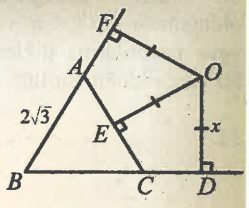
$\frac{5}{3}\sqrt{3}$

Eşkenar üçgenin üç kenarı eşit uzunlukta olduğundan üç dış teğet çemberi de eştir.



Yukardaki şekil dikkatlice incelenirse, eşkenar üçgenin herhangi bir dış teğet çemberinin yarıçapının herhangi bir yüksekliğiyle aynı boyda olduğu görülür.

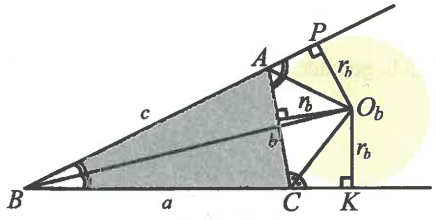
40.
ABC bir eşkenar üçgen
$OD \perp BC$
$OE \perp CA$
$OF \perp BA$
$|AB| = 2\sqrt{3}$ br
$|OD| = |OE| = |OF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 3 E) $3\sqrt{2}$

Herhangi Bir Üçgenin Herhangi Bir Dış Teğet Çemberinin Yarıçapı. Üçgenin özelliği olmayınca işlemler gıcıklaşır ama bu işlemleri her defasında yapmayacağız ki... Şimdi yorulacak ama bulduğumuz sonucu bir ömür boyu mutlulukla kullanacağız. Başlıyoruz:

ABC üçgeninin CA kenarına değen dış teğet çemberini çizelim. Merkezi O_b, yarıçapının boyu da r_b br olsun.



Kanıtın püf noktası ABC üçgeninin alanını aşağıdaki gibi hesaplamakta yatıyor:

$$|ABC| = |ABO_b| + |BCO_b| - |ACO_b|$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}|ABC| &= \frac{1}{2}cr_b + \frac{1}{2}ar_b - \frac{1}{2}br_b \\ &= \frac{1}{2}(c+a-b)r_b \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{c+a+b}_{2u} - 2b)r_b \\ &= \frac{1}{2}(2u-2b)r_b \\ &= (u-b)r_b\end{aligned}$$

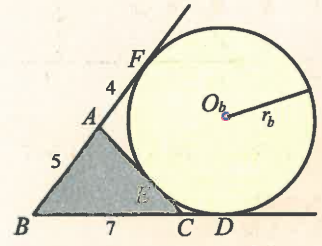
bulunur. Benzer işlemleri diğer dış çemberlerle yaparsak benzer sonuçlar çıkacaktır.

Sonuç 1: *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br, dış teğet çember yarıçapları r_a br, r_b br ve r_c br, yarımçevresi u br olan bir ABC üçgeninin alanı*

$$S = (u-a)\cdot r_a$$
$$S = (u-b)\cdot r_b$$
$$S = (u-c)\cdot r_c$$

formülleriyle bulunabilir.

41.

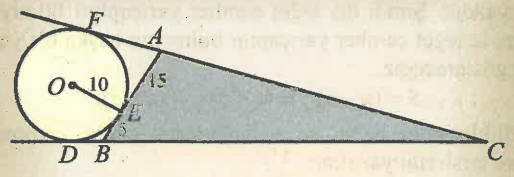


r_b kaçtır?

$2\sqrt{6}$

42.

O merkezli çember, ABC üçgenine ait 10 br yarıçaplı bir dış teğet çemberdir.



$|EA| = 3\cdot|BE| = 15$ br olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?

A) 360 B) 400 C) 480 D) 560 E) 600

Sonuç 2: Elimizdeki, üçgenin çemberleriyle alakalı üçgen alanı formüllerini bir yazalım bakalım:

$$S = ur$$
$$S = (u-a)r_a$$
$$S = (u-b)r_b$$
$$S = (u-c)r_c$$

Şimdi S'ye eşit olan bu dört ifadeyi çarpalım:

$$S^4 = \underbrace{u(u-a)(u-b)(u-c)}_{S^2} rr_a r_b r_c$$

elde edilir.

$$S^4 = S^2 rr_a r_b r_c$$
$$S^2 = rr_a r_b r_c$$
$$S = \sqrt{rr_a r_b r_c}$$

Böylelikle nur topu gibi bir alan formülümüz daha oldu.

Vaktizamanında bir meslektaşım bana, sadece dış teğet çember yarıçapları verilen bir üçgenin çizilip çizilemeyeceğini sormuştu. Ona verdiğim cevabı hatırladım da, yazayım dedim.

$$(u-a)r_a = (u-b)r_b = (u-c)r_c$$

eşitliği bize dış teğet çember yarıçaplarının $u-a$, $u-b$ ve $u-c$ değerleri ters orantılı olduğunu anlatır. Bu ters orantı kullanılarak a br, b br ve c br değerleri arasındaki oran bulunabilir. O halde Heron ve ur alan formülleri kullanılarak r değeri de bulunabilir. Heron formülünden bulunan alan değeri $\sqrt{rr_a r_b r_c}$ değerine eşitlenerek a br, b br ve c br değerleri bulunur, dolayısıyla üçgen çizilir. Üç kenarı bilinen üçgenleri çizmeyi biliyorsunuz değil mi? Bilmiyorsanız ileride anlatılıyor zaten.

Sonuç 3: Yukarıdaki satırlarda r_a, r_b ve r_c değerlerinden üçgenin kenar uzunluklarının bulunabileceğini anlattık. Satır arasındaysa fark ettiyseniz r'nin de bulunabileceğini yazdık. Şimdi dış teğet çember yarıçapları biliniyorken, iç teğet çember yarıçapını bulmanın başka bir yolunu göstereceğiz.

$$S=(u-a)r_a=(u-b)r_b=(u-c)r_c$$

eşitliklerinden r_a, r_b ve r_c değerlerini çekip, çarpmaya göre terslerini yazalım:

$$\frac{1}{r_a}=\frac{u-a}{S}$$

$$\frac{1}{r_b}=\frac{u-b}{S}$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{u-c}{S}$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{u-a}{S}+\frac{u-b}{S}+\frac{u-c}{S}=\frac{u}{S}=\frac{u}{ur}=\frac{1}{r}.$$

43.
Bir ABC üçgeninde

$r_a=2$ br
$r_b=3$ br
$r_c=6$ br

olduğuna göre r kaçtır?

1

44.
Bir ABC üçgeninde

$r_a=4$ br
$r_b=6$ br
$r_c=12$ br

olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?

24

Sonuç 4: r_a, r_b ve r_c'nin üçgenin kenar uzunlukları ve alanıyla şaşılası ilişkisi aklımıza üçgenin yüksekliklerini getiriyor. Öyle ya, onlar da üçgenin kenarlarıyla ve alanıyla alakalı uzunluklardır. Şimdi benzer işlemleri h_a, h_b ve h_c değerlerine yapacağız.

$$2S=ah_a=bh_b=ch_c$$

eşitliklerinden h_a, h_b ve h_c değerlerini çekip, çarpmaya göre terslerini yazalım:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$$

$$\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$$

$$\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{2u}{2S}=\frac{u}{S}=\frac{u}{ur}=\frac{1}{r}.$$

45.
Bir ABC üçgeninde

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{3}{4}$$

olduğuna göre $\frac{8}{h_a}+\frac{8}{h_b}+\frac{8}{h_c}$ kaç br dir?

6

46.

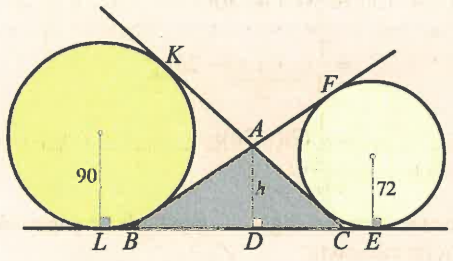
13-14-15 üçgeninde $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ toplamı kaçtır?

$\frac{1}{4}$

Sonuç 5: İlk dördü kadar önemli olmayan ama güzel bir eşitlik daha çıkartacağız. Dış teğet çember yarıçaplarının üçünün terslerini toplayınca güzel bir sonuç çıktı ya, acaba sadece ikisini toplayınca ne çıkıyor, ona bakacağız.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{u-a}{S}+\frac{u-b}{S}=\frac{2u-a-b}{S}=\frac{c}{S}=\frac{c}{\frac{1}{2}ch_c}=\frac{2}{h_c}.$$

47.



h kaçtır?

80

Sonuç 6: Büyük konuşmamak lazımmış, önemsiz dediğimiz sonuç yeni bir sonuca götürdü bizi ☺ Bulduğumuz eşitliği aşağıdaki eşitlikte yerine yazalım:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\frac{2}{h_c}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

48.
Bir ABC üçgeninde

$h_a=4$ br
$h_b=6$ br
$h_c=3$ br

olduğuna göre r_c kaçtır?

12

Sonuç 7: Son eşitliğimiz de r_a, r_b, r_c ve r'nin R ile ilişkisi üzerine olacak.

$$r_a+r_b+r_c-r=\frac{S}{u-a}+\frac{S}{u-b}+\frac{S}{u-c}-\frac{S}{u}$$
$$=S\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u}\right)$$

deyip parantez içinde sıkılmadan payda eşitlerseniz, parantez içini $\frac{abc}{S^2}$ bulacaksınız. S ile çarpınca $\frac{abc}{S}$ olacak. $S=\frac{abc}{4R}$ değerini de yerine yazarsanız

$$r_a+r_b+r_c-r=4R$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

49.
6-8-10 üçgeninde

$$r_a+r_b+r_c$$

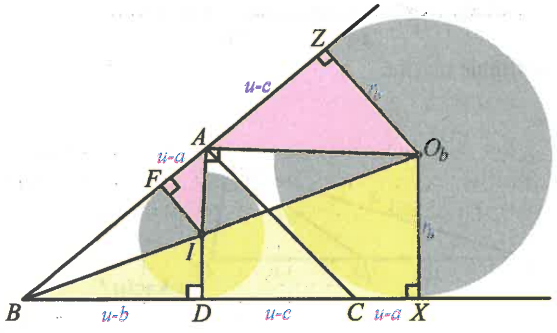
toplamı kaçtır?

22

İç ve dış teğet çemberlerin üçgenin alanı ile beklenmedik ilişkisi (Heron formülü). *Kenar uzunlukları a, b, c olarak verilen bir üçgenin alanı S olsun. Üçgenin yarımçevresi u ise*

$$S^2=u(u-a)(u-b)(u-c).$$

Kanıt: ABC üçgeninin iç çember merkezi I, b kenarına teğet dış çember merkezi O_b olsun.



Yandaki şekilde IDB ile OFB üçgenlerinin benzer olmasından

$$r/r_b=(u-b)/u$$

bulunur. Aynı zamanda IEA ile ATO üçgenlerinin benzer olmasından

$$rr_b=(u-a)(u-c)$$

bulunur. Her iki eşitlikten r_b ler çekilir ve kalanlar eşitlenirse

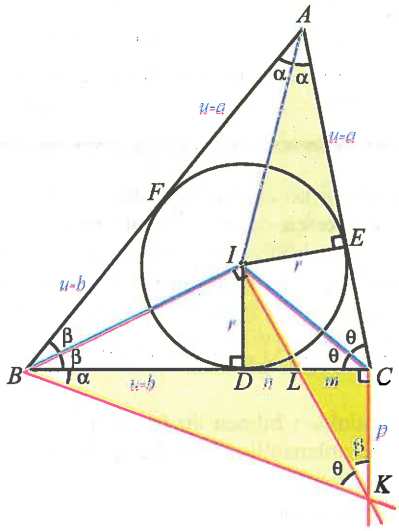
$$ur^2=(u-a)(u-b)(u-c)$$

bulunur. Buradan da r değeri çekilip ur formülünde yerine yazılırsa

$$S^2=u(u-a)(u-b)(u-c)$$

formülü elde edilip, kanıt tamamlanmış olur.

Bu da iç çember ile Heron formülüne yapılmış bir başka muhteşem kanıt: Bir ABC üçgeni ve beraberinde iç çemberini çizelim. Merkeze her zamanki gibi I diyelim. AI, BI ve CI iç açıortaylarını çizelim.



C'den geçen ve BC'ye dik bir doğru ile I'dan geçen BI'ya dik bir doğru K noktasında kesişsinler. $BICK$ dörtgeninin bir kiriş dörtgeni olduğunu görerek gerekli açılar yerlerine yazılacak olursa AEI ile BCK üçgenlerinin benzer olduğunu görürüz. Eşlemeyi kurarsak $r/p=(u-a)/a$ çıkar.

Diğer yandan

$$|AF|=|AE|=u-a$$
$$|BF|=|BD|=u-b$$
$$|CE|=|CD|=u-c$$

olduğunu biliyoruz. İç çember yarıçapı r, $|DL|=n$, $|LC|=m$ ve $|CK|=p$ olsun. IDL ile KCL üçgenlerinin benzerliğinden

$$r/p=n/m$$

buluruz. O halde

$$n/m=(u-a)/a$$

dır. Bu eşitliği

$$n/(u-a)=m/a$$

şekline getirebiliriz. Birbirine eşit iki oranın paylarının ve paydalarının toplanması ile elde edilen yeni oranın eski orana eşit olduğunu biliyoruz. O halde

$$n/(u-a)=(n+m)/u=(u-c)/u$$

olur. Düzenlenirse

$$un=(u-a)(u-c)$$

bulunur. BIL dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden

$$r^2=(u-b)n$$

bulunur ki buradan n çekilir, bir önce bulunan eşitlikte yerine yazılırsa

$$ur^2=(u-a)(u-b)(u-c)$$

bulunur. Buradan da r değeri çekilip ur formülünde yerine yazılırsa

$$S^2=u(u-a)(u-b)(u-c)$$

formülü elde edilip, kanıt tamamlanmış olur.

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kenarortay

Bir üçgende bir köşeden karşısındaki kenara çizilen doğru parçasına **kesen** denir. Eğer bir kesen, kestiği kenarı iki eşit parçaya bölüyorsa (ortalıyorsa), ona artık **kenarortay** diyeceğiz. Kenarortay eğer A köşesinden çıkıyorsa yani boyunu a ile göstermeye alıştığımız kenarı ortalıyorsa v_a ile gösteririz. Diğer iki kenarortay da benzer mantıkla v_b ve v_c ile gösterilir.

Kenar uzunlukları bilinen bir üçgenin üç kenarortayının da boyu hesaplanabilir. Bunu hangi formülle yapacağımızı aşağıda verdik.

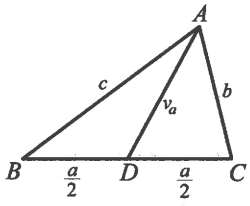
Kenarortay Teoremi. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde kenarortayların boyları v_a br, v_b br ve v_c br ise;*

$$4v_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$4v_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$
$$4v_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: Biz v_a için teoremi kanıtlayacağız. Diğerlerini de siz benzer şekilde kanıtlarsınız.

Kenarortayı çizilmiş bir üçgen şekli bize Stewart Teoremi'ni hatırlatıyor.



$$v_a^2 = \frac{c^2\cdot\frac{a}{2} + b^2\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} - \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$$
$$= \frac{\frac{a}{2}(c^2+b^2)}{a} - \frac{a^2}{4}$$
$$= \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{2}$$
$$= \frac{c^2+b^2-\frac{1}{2}a^2}{2}$$

eşitliğinin her iki yanı 4'le çarpılırsa

$$4v_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

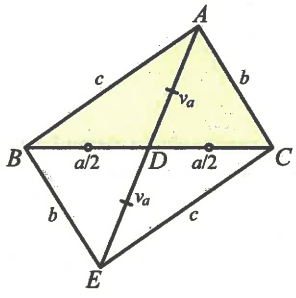
olduğu kanıtlanmış olur.

Bu teorem **Apollonius Teoremi** olarak da bilinir.

Formülü hafızasında tutmaya zorlananlara şu da önerilebilir: Daha önce, kosinüs teoremi başlıklı yazıda, kenar uzunlukları a ve b, köşegen uzunlukları e ve f olan bir paralelkenarda

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

olduğunu bulmuştuk. Bu sebeple, ABC üçgeninin $[AD]$ kenarortayını D yönünde kendi boyu kadar uzatırsak, alttaki şekilden de görüleceği üzere,

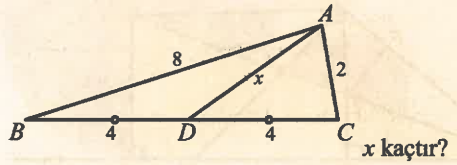


$|AD| = |DE|$ ve $|BD| = |DC|$ olduğundan $ABEC$ bir paralelkenar olur. Kenar uzunlukları b ve c, köşegen uzunlukları da a ve $2\cdot v_a$ olduğundan

$$4\cdot v_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$$

eşitliğine ulaşılır.

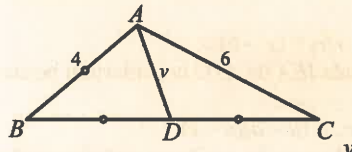
1.



x kaçtır?

$3\sqrt{2}$

2.



v kaçtır?

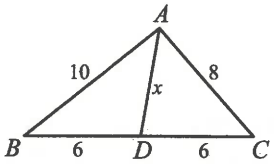
$\sqrt{10}$

b ve c değerleri sabitken, a'nın büyümesinin v_a'yı küçülteceğini görerek a ile v_a'nın ters orantılı olduğunu da söyleyebiliriz. Yani kısa kenara inen kenarortay uzun, uzun kenara inen kenarortay kısadır.

Örnek. *Kenar uzunlukları* 8 br, 10 br *ve* 12 br *olan bir üçgenin en kısa kenarortayının boyu kaç br dir?*

A) $4\sqrt{2}$ B) 6 C) $2\sqrt{10}$ D) $\sqrt{46}$ E) 7

Çözüm: Kenarortaylar kenarlarla ters orantılı olduğundan, üçgenin en kısa kenarortayı en uzun kenarına gidendir.



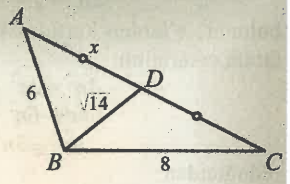
Bu sebeple

$$4x^2 = 2\left(8^2 + 10^2\right) - 12^2$$

eşitliğini çözmek gerekiyor. Ben çözdüm, $x = \sqrt{46}$ çıktı.

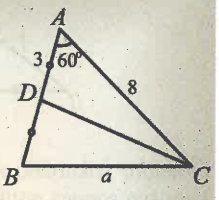
Doğru cevap: D.

3.
ABC bir üçgen
$[BD]$ kenarortay
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
$|BD| = \sqrt{14}$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



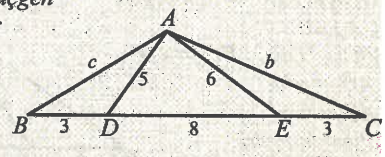
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

4.
ABC bir üçgen
$[CD]$ kenarortay
$m(A) = 60°$
$|AD| = 3$ br
$|AC| = 8$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a^2 kaçtır?



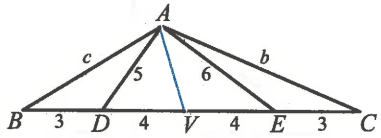
A) 48 B) 50 **C) 52** D) 54 E) 56

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |EC| = 3$ br
$|DE| = 8$ br
$|AD| = 5$ br
$|AE| = 6$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre $b^2 + c^2$ toplamı kaçtır?



A) 112 B) 118 C) 124 D) 127 E) 131

Çözüm: Dikkat edilecek olursa, ABC üçgeninin A köşesine ait kenarortay, ADE üçgeninde de kenarortay olacaktır. Bu sebeple $[AV]$ kenarortayını çizip, iki üçgen için de kenarortay teoremini uygulayalım.



ABC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$4\cdot|AV|^2 = 2(b^2 + c^2) - 14^2$$

ADE üçgeninde kenarortay teoreminden

$$4\cdot|AV|^2 = 2(5^2 + 6^2) - 8^2$$

olduğu için

$$2(b^2 + c^2) - 14^2 = 2(5^2 + 6^2) - 8^2$$

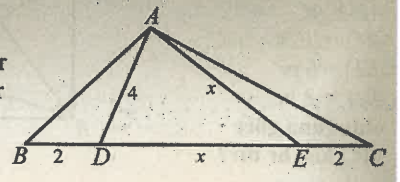
olmalıdır. Bu eşitlik çözülürse

$$b^2 + c^2 = 127$$

bulunur.

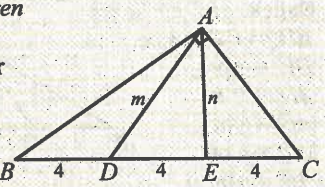
Doğru cevap: D.

5.
ABC bir üçgen
$|BD| = |EC| = 2$ br
$|DE| = |AE| = x$ br
$|AD| = 4$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
olup $b^2 + c^2 = 84$ olduğuna göre x kaçtır?



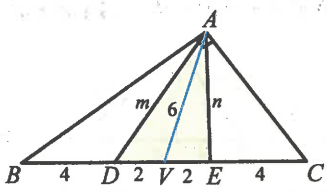
A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 9

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$CA \perp AB$
$|BD| = |DE| = |EC| = 4$ br
$|AD| = m$ br
$|AE| = n$ br
olduğuna göre
$m^2 + n^2$ *toplamı kaçtır?*



A) 80 B) 96 C) 102 D) 108 E) 112

Çözüm: Yine benzer durum var: ABC üçgeninin A köşesine ait kenarortay, ADE üçgeninde de kenarortay olacaktır. Bu sebeple $[AV]$ kenarortayını çizelim.



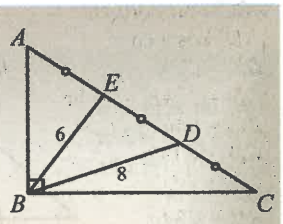
ABC bir dik üçgen olduğundan, muhteşem üçlü gereği, $|AV| = 6$ br olacaktır. Şimdi ADE üçgeninde kenarortay teoremini uygulayalım.

$$4 \cdot 6^2 = 2(m^2 + n^2) - 4^2$$

eşitliğinden $m^2 + n^2 = 80$ bulunur.

Doğru cevap: A.

6.
ABC dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AE| = |ED| = |DC|$
$|BE| = 6$ br
$|BD| = 8$ br
olduğuna göre
$|AC|$ **kaç br dir?**

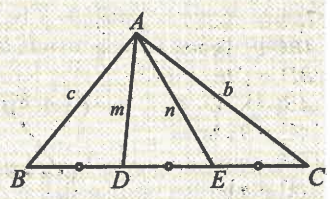


A) $3\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$ D) $6\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{5}$

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |DE| = |EC|$

$|AB| = c$ br
$|AC| = b$ br
$|AD| = m$ br
$|AE| = n$ br

olduğuna göre $\dfrac{c^2 - b^2}{m^2 - n^2}$ *oranı kaçtır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Burada fark edilmesi gereken şey, $[AD]$'nin ABE üçgeninde, $[AE]$'nin de ADC üçgeninde bir kenarortay olduğudur. $|BD| = |DE| = |EC| = x$ br olsun diyerek gerekenleri yapalım.

ABE üçgeninde kenarortay teoreminden

$$4m^2 = 2c^2 + 2n^2 - 4x^2$$

ADC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$4n^2 = 2b^2 + 2m^2 - 4x^2$$

bulunur. x'lerden kurtulmak amacıyla denklemleri taraf tarafa çıkartalım:

$$4m^2 - 4n^2 = 2c^2 - 2b^2 + 2n^2 - 2m^2$$
$$6m^2 - 6n^2 = 2c^2 - 2b^2$$
$$3m^2 - 3n^2 = c^2 - b^2$$

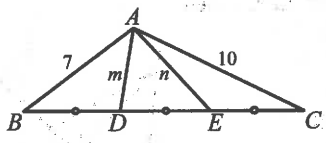
olduğundan

$$\frac{c^2 - b^2}{m^2 - n^2} = 3$$

olarak bulunur.

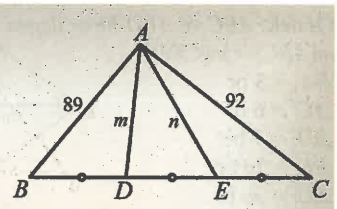
Doğru cevap: C.

Bu oranın 3 çıkması, kareleri farkıyla alakalı bir soru sorulduğunda c, m, n, b değerlerini, öyle olmadıkları halde, aritmetik dizi gibi düşünebileceğimizi anlatır. Zira c, m, n, b değerleri sırasıyla a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ olsa da bu oran hep 3 çıkar.



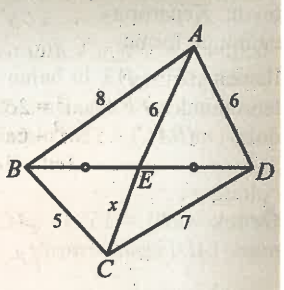
Örneğin, yukardaki soruda $n^2 - m^2$ sorulursa $9^2 - 8^2$ işlemi sizi sonuca götürür.

7.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DE| = |EC|$
$|AB| = 89$ br
$|AC| = 92$ br
$|AD| = m$ br
$|AE| = n$ br
olduğuna göre $n^2 - m^2$ farkı kaçtır?



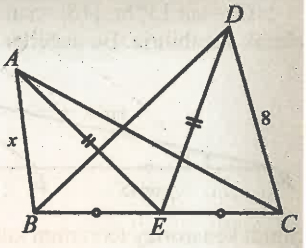
A) 90 B) 91 C) 181 D) 362 E) 543

8.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|BE| = |ED|$
$|AE| = |AD| = 6$ br
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = 7$ br
$|CE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



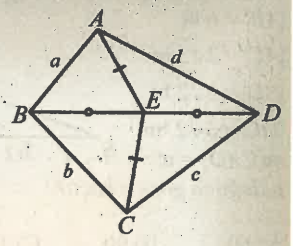
A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{23}$ E) $2\sqrt{6}$

9.
ABC ve DBC birer üçgen
$|BE| = |EC|$
$|AE| = |DE|$
$|CD| = 8$ br
$|DB| = 10$ br
$|CA| = 12$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



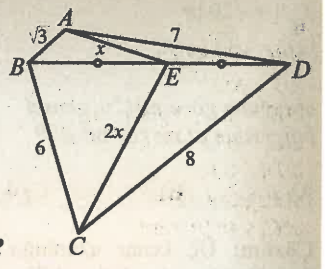
A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{6}$ E) 5

10.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|BE| = |ED|$
$|AE| = |EC|$
$|AB| = a$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
$|DA| = d$ br
olduğuna göre a, b, c, d arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



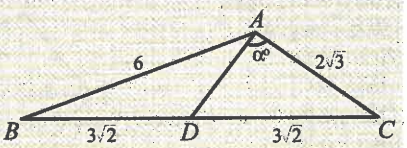
A) $a + d = b + c$ B) $a + b = c + d$ C) $a \cdot c = b \cdot d$
D) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ E) $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

11.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|BE| = |ED|$
$|CE| = 2 \cdot |AE| = 2x$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 8$ br
$|DA| = 7$ br
$|AB| = \sqrt{3}$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) 4

Örnek [EKY]. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 2\sqrt{3}$ br
$|BD| = 3\sqrt{2}$ br
$|DC| = 3\sqrt{2}$ br
$m(CAD) = \alpha^\circ$
olduğuna göre α *kaçtır?*



A) 60 B) 90 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: α'yı bulabilmemiz için ADC üçgeninin üç kenar uzunluğunu da bilmemiz gerekiyor. ABC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$4\cdot|AD|^2 = 2\cdot\left[6^2 + (2\sqrt{3})^2\right] - (6\sqrt{2})^2 = 96 - 72 = 24$$

bulunur ki, $|AD| = \sqrt{6}$ br dir. Şimdi tam kosinüs teoreminden α'yı bulacaktık ki, gözümüze bir şey takıldı. Dikkat edilirse

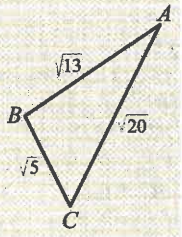
$$(\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$$

üçgeninde Pisagor teoremi sağlandığından kosinüs teoremine gerek yoktur. $\alpha = 90$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

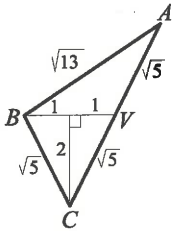
Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BC| = \sqrt{5}$ br
$|CA| = \sqrt{20}$ br
$|AB| = \sqrt{13}$ br

olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 *dir?*



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

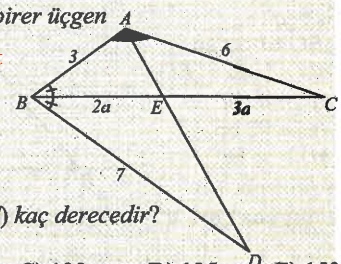
Çözüm: Üç kenar uzunluğu da bilindiğinden Heron formülünden alan bulunabilir ama ne size böyle bir eziyeti öneririm ne de ben bunun altına girerim. Başka bir çözüm yolu arayalım.



$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ olduğundan adamın bunu ikiye bölesi geliyor. B'den bir kenarortay çizelim. Daha sonra kenarortay teoreminden veya Stewart teoreminden $|BV| = 2$ br çıkar. BCV ikizkenar olduğundan tabana indirilen dikmesi tabanı ikiye böler ve boyu da 2 br olur. $|BVC| = 2$ br^2 olduğundan $|ABC| = 4$ br^2 bulunur.

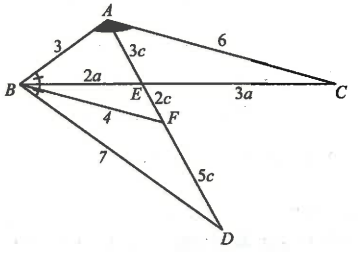
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC ve ABD birer üçgen*
$m(ABC) = m(CBD)$
$|BA| = 3$ br
$|AC| = 6$ br
$|BD| = 7$ br
$|BE| = 2a$ br
$|EC| = 3a$ br
olduğuna göre $m(BAC)$ *kaç derecedir?*



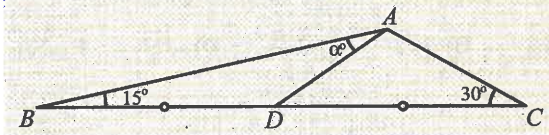
A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150

Çözüm: B'den AC'ye paralel çizilen doğru, AD'yi F'de kessin. Kelebekten $|BF| = 4$ br bulunur. $|AE| = 3c$ br ise $|EF| = 2c$ br ve $|FD| = 5c$ br olur. O halde çizilen BF, ABD üçgeninde kenarortaydır. Kenarortay uzunluğu formülünden $|AF| = \sqrt{13}$ br bulunur. ABF üçgeninde kosinüs teoreminden FBA açısının ölçüsü 60° olur, paralellikten dolayı $m(BAC) = 120^\circ$ olarak bulunur.



Doğru cevap: C.

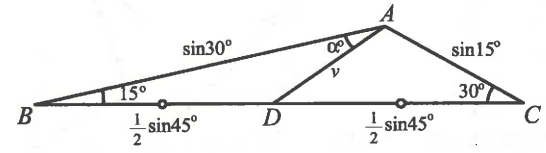
Örnek. $m(B) = 15^\circ$ *ve* $m(C) = 30^\circ$ *olan bir ABC üçgeninde* $[AD]$ *kenarortaydır.*



Buna göre $m(DAB)$ *kaç derecedir?*

A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 45 E) 60

Çözüm: $|AD| = v$ br olsun. ABC üçgeninin kenar uzunluklarını, sinüs teoremi gereğince
$|AC| = \sin 15^\circ$ br, $|AB| = \sin 30^\circ$ br, $|BC| = \sin 45^\circ$ br
olarak yazabiliriz. Bu değerler α'yı değiştirmeyecektir.



Şimdi kenarortay teoremini kullanarak v'yi bulalım.

$$4\cdot v^2 = 2\cdot\sin^2 30^\circ + 2\cdot\sin^2 15^\circ - \sin^2 45^\circ$$

eşitliğinde $2\cdot\sin^2 30^\circ = \sin^2 45^\circ$ olduğundan, denklem

$$4\cdot v^2 = 2\cdot\sin^2 15^\circ \text{ yani } v = \sqrt{2}\sin 15^\circ$$

halini alır. Bu denklemi de

$$\frac{v}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$$

şeklinde düzenlersek, ABC ile DBA üçgenlerinin benzerliği görülür. Bu yüzden $\alpha = 30$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve kenarortay uzunlukları sırasıyla v_a br, v_b br, v_c br olan bir ABC üçgeni için*

$$4\left(v_a^2+v_b^2+v_c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right),$$
$$16\left(v_a^4+v_b^4+v_c^4\right)=9\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Kanıt: İlk eşitliğin, üç kenarortay için de ayrı ayrı kenarortay teoremi yazıp toplayınca çıkacağını umuyoruz. Görün bakın, çıkacak!

$$4v_a^2=2b^2+2c^2-a^2$$
$$4v_b^2=2c^2+2a^2-b^2$$
$$4v_c^2=2a^2+2b^2-c^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$4\left(v_a^2+v_b^2+v_c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Gelelim ikinci eşitliğe... v_a, v_b, v_c için bulduğumuz eşitliklerin karelerini alıp taraf tarafa toplayacağız.

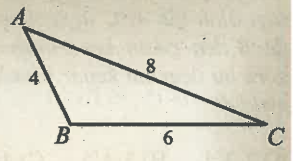
$$16v_a^4=4b^4+4c^4+a^4+8b^2c^2-4b^2a^2-4c^2a^2$$
$$16v_b^4=4c^4+4a^4+b^4+8c^2a^2-4c^2b^2-4a^2b^2$$
$$16v_c^4=4a^4+4b^4+c^4+8a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$16\left(v_a^4+v_b^4+v_c^4\right)=9\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

eşitliği de kanıtlanmış olur.

12.
ABC bir üçgen
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 6$ br
$|CA| = 8$ br
olduğuna göre *ABC* üçgeninin kenarortay uzunluklarının kareleri toplamı kaç br^2 dir?



A) 87 B) 88 C) 89 D) 90 E) 91

13.
Kenar uzunlukları *a* br, *b* br ve *c* br, bunun yanında kenarortay uzunlukları sırasıyla v_a br, v_b br ve v_c br olan bir *ABC* üçgeninde

$$a^4+b^4+c^4=32$$

olduğuna göre $v_a^4+v_b^4+v_c^4$ toplamı kaça eşittir?

A) 9 B) 16 C) 18 D) 27 E) 32

Kenarlarla kenarortaylar arasındaki eşitliğin böyle gıcık çıkması, formülün tüm üçgenleri sağlayan bir formül olmasındandır. Ama üçgen özelleştikçe bu formül güzelleşir. Öncelikle üçgeni dik alalım bakalım,

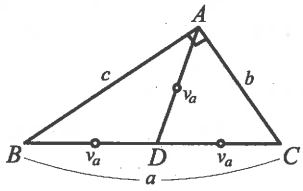
$$4\left(v_a^2+v_b^2+v_c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

eşitliği neye dönüşüyor?

Teorem. *A açısı dik olan bir ABC üçgeninde*

$$5v_a^2=v_b^2+v_c^2.$$

Kanıt: Üçgen dik seçildiğinde, muhteşem üçlü gereğince $a = 2v_a$ olacaktır. Bu sayede Pisagor teoreminden gelen $b^2+c^2=a^2$ eşitliği de $b^2+c^2=4v_a^2$ halini alacaktır.



Bulduğumuz bu değerleri

$$4\left(v_a^2+v_b^2+v_c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

eşitliğinde yerlerine yazarsak,

$$v_a^2+v_b^2+v_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$v_a^2+v_b^2+v_c^2=\frac{3}{4}\left((2v_a)^2+4v_a^2\right)$$
$$v_a^2+v_b^2+v_c^2=6v_a^2$$

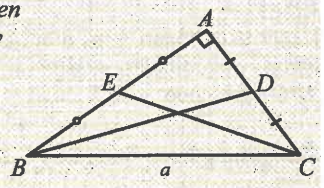
çıkar ki, bu da

$$5v_a^2=v_b^2+v_c^2$$

demektir zaten.

Öyle aman aman bilinmesi gereken bir teorem değildir. Zira bu teorem olmadan da, bu teoremin iş göreceği sorular kolaylıkla çözülür. Şimdi tam bu teoreme göre bir soru yazalım ama başka yollardan da çözelim ki, ben bu formüllerin hepsini nasıl aklımda tutacağım demeyin!

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
[BD] ve [CE] kenarortay
CA ⊥ AB
|BD| = 8 br
|CE| = 6 br
|BC| = a br
olduğuna göre a kaçtır?

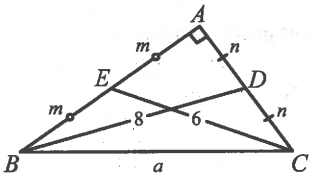


A) $2\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{5}$ E) 10

Çözüm: Üç farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Öğrendiğimiz $5v_a^2 = v_b^2 + v_c^2$ teoremine göre $5v_a^2 = 8^2 + 6^2$ eşitliğinden $v_a = 2\sqrt{5}$ bulunur. Muhteşem üçlüden dolayı da $a = 2v_a = 4\sqrt{5}$ olmalıdır.

İkinci yol. $|AE| = |EB| = m$ br ve $|AD| = |DC| = n$ br olsun.



DAB ve *CAB* dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden gelen

$$4m^2 + n^2 = 64$$
$$m^2 + 4n^2 = 36$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

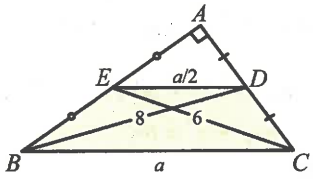
$$5m^2 + 5n^2 = 100$$

yani $m^2 + n^2 = 20$ bulunur. Diğer yandan *CAB* dik üçgeninde Pisagor teoreminden de

$$a^2 = 4m^2 + 4n^2$$

olduğunu bildiğimizden $a^2 = 80$, dolayısıyla da $a = 4\sqrt{5}$ olmalıdır.

Üçüncü yol. Ne zaman orta nokta gördük mü, o zaman orta tabanı akla getirecektik. Hemen *E* ile *D*'yi birleştirelim. $|BC| = a$ br olduğundan $|ED| = a/2$ br olur.



ECBD dörtgeninin (*EBCD* değil!) köşegenleri dik kesiştiğinden, daha önce dik üçgen notlarında, 'katlama sanatı' adı altında gösterdiğimiz üzere

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8^2 + 6^2$$

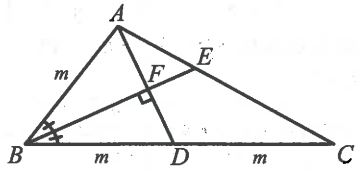
eşitliğinden $a = 4\sqrt{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Kenarortay ile Diğer Yardımcı Elemanlar Arasındaki Bazı Bağıntılar. Artık kenarortay teoremini anlamış olmalısınız. Bundan sonra kenarortayın boyunu hesaplamak yerine, verilmiş kenarortayların açıortaylarla ve yüksekliklerle bazı ilişkilerini öğrenip başka uzunluk ya da açı ölçülerini hesaplamaya başlayacağız. İlk teoremimiz kenarortay ile açıortay arasında bir ilişki üzerine...

Teorem. *Bir üçgende bir kenarortay ile bir iç açıortay dik kesişiyorlarsa, kenarlardan biri diğerinin 2 katıdır.*

Kanıt: Üçgenimiz *ABC*, dik kesişen kenarortayla iç açıortay da, alttaki şekilde görüldüğü üzere, sırasıyla *[AD]* ve *[BE]* olsun.

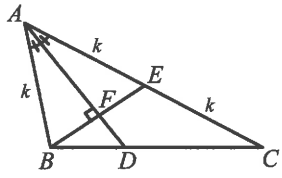


ABD üçgeninde *BF* hem iç açıortay hem de yükseklik olduğundan *ABD* üçgeni ikizkenardır. İkiz kenarlarının boylarına *m* br diyelim. Kenarortayın indiği *[BC]* kenarının uzunluğu *2m* br olduğundan kanıt biter.

Örnek [2008 Estonya]. *Kenar uzunlukları ardışık tam sayı olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait iç açıortayı ile B'den çıkan kenarortayı birbirlerine dik olduğuna göre bu üçgenin kenar uzunlukları aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2-3-4 B) 3-4-5 C) 4-5-6 D) 5-6-7 E) 7-8-9

Çözüm: Yandaki gibi şeklimizi oluşturalım. *AD* iç açıortayıyla *BE* kenarortayının kesim noktasına *F* diyelim. *EAB* üçgeninde *[AF]* hem yükseklik hem de iç açıortay olduğundan *EAB* ikizkenar üçgendir.

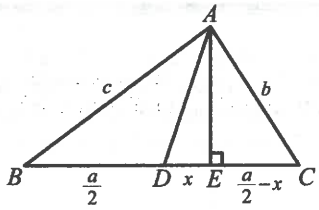


Şu durumda $|BA| = |AE| = |EC|$ oldu. $|BA| = k$ br dersek $|AC| = 2k$ br olur. $2k$ değeri ya ortanca ya da en büyük kenarın uzunluğu olmalıdır. Eğer ortanca olursa $k = 1$ olur ki bu durumda üçgenin kenar uzunlukları 1-2-3 olacağından üçgen eşitsizliği sağlanmaz. O halde $2k$ en büyük değer olmalıdır. Bu durumda üçgen de 2-3-4 üçgeni olur.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br, c br olan bir ABC üçgeninde uzunluğu a olan kenara inen yükseklik ayağı ile aynı kenara inen kenarortay ayağının arasındaki uzaklık x olsun. Öyleyse;* $x = \dfrac{|c^2 - b^2|}{2a}$.

Kanıt: $|AB| > |AC|$ farz edelim. Şu durumda kenarortay ayağı olan D noktası, yükseklik ayağı olan E noktasının solunda kalacaktır. Buna göre şeklimizi çizelim.



Dik üçgen dersinde öğrendiğimiz yükseklik teoremini kullanacağız:

$$c^2 - b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 2ax$$

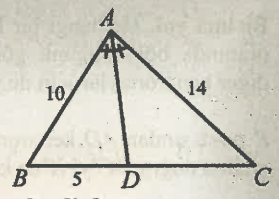
olduğundan

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2a}$$

olarak bulunur.

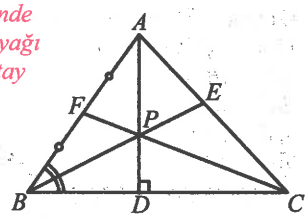
Tabii şekli $|AC| > |AB|$ gibi çizersek bu değer negatif çıkar diye teoremde mutlak değer kullanırız.

14.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$|CA| = 14$ br
$|AB| = 10$ br
$|BD| = 5$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin en kısa kenarortayının uzunluğu kaç br dir?

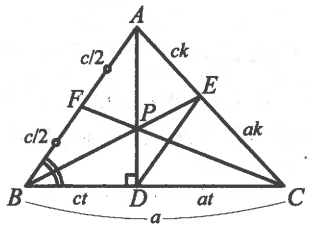


A) $\sqrt{73}$ B) $\sqrt{74}$ C) $\sqrt{75}$ D) $\sqrt{76}$ E) $\sqrt{77}$

Teorem. *Bir ABC üçgeninde A köşesine ait yükseklik ayağı D, B köşesine ait iç açıortay ayağı E ve C köşesine ait kenarortay ayağı F olsun. AD, BE ve CF doğruları noktadaş ise DE // BA olmalıdır.*



Kanıt: $|BC| = a$ br ve $|BA| = c$ br olsun.



$[CF]$ kenarortay olduğundan

$$|AF| = |FB| = c/2 \text{ br},$$

$[BE]$ iç açıortay olduğundan

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{c}{a}$$

olur. AD, BE ve CF noktadaş olduğundan Ceva Teoremi uygulanabilir. Buradan

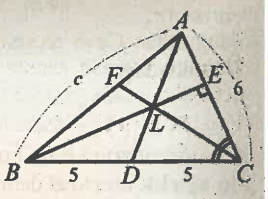
$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{a}$$

bulunur. Bu durumda

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

olduğundan Tales Teoremi karşıtı gereği DE // BA olur.

15.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$[BE]$ yükseklik
$[CF]$ iç açıortay
$AD \cap BE \cap CF = \{L\}$
$|BD| = |DC| = 5$ br
$|AC| = 6$ br
olduğuna göre $|AB| = c$ kaç br dir?



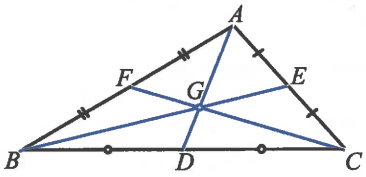
A) $\sqrt{90}$ B) $\sqrt{91}$ C) $\sqrt{92}$ D) $\sqrt{93}$ E) $\sqrt{94}$

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Ağırlık Merkezi

Daha önceki derslerimizde bir üçgene ait üç yüksekliğin daima noktadaş olup kesiştikleri noktaya üçgenin diklik merkezi dendiğini, daha sonra da bir üçgenin üç iç açıortayının da noktadaş olup kesiştikleri noktanın üçgenin iç teğet çemberinin merkezi olduğunu söylemiştik. Şimdi sıra kenarortaylara geldi.



Diğer yardımcı elemanlar gibi, bir üçgenin üç kenarortayı da noktadaştır. Hatırlarsanız, bunu Ceva Teoremi'ni anlatırken kanıtlamıştık. Tekrar etmekte fayda var:

A, B, C köşelerinden çıkan kenarortayların ayakları sırasıyla D, E, F olsun.

$$|AF| = |FB|$$
$$|BD| = |DC|$$
$$|CE| = |EA|$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

olduğundan Ceva teoreminin karşıtı gereğince AD, BE, CF noktadaştır.

Kenarortayların kesim noktasına ***ABC* üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi** denir. Genelde G ile gösterilir. Kenarortaylar üçgenin iç bölgesinde olduklarından kesiştikleri G noktası da daima üçgenin iç bölgesindedir.

Burada önemli bir noktaya değinmekte fayda var: G noktası üçgenin değil, üçgensel bölgenin ağırlık merkezidir! Peki, bunların farkı ne? Üçgensel bölgenin içi doludur fakat üçgenin içi boştur. İçi boş ise ağırlık merkezi kenarortayların kesiştiği nokta değil, başka bir yerdir. Bunu bir sonraki konumuz olan Kenar-Açı Bağıntıları dersinde öğreneceğiz. Fakat bu yanlış dilimize öyle çok yerleşmiş ki, ve bunun doğrusunu bilen o kadar az insan var ki bu yüzden 'G ağırlık merkezidir' dersek siz üçgensel bölgenin ağırlık merkezi olarak algılayın.☺

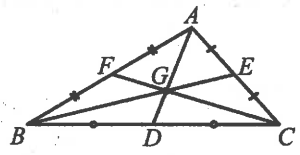
G noktası, tarih itibarıyla üçgende bulunmuş ilk özel noktadır. Haliyle oldukça fazla özelliğe sahiptir. Şimdi yavaş yavaş G noktasının bazı özelliklerini vermeye başlayacağız. Önce en önemlisinden başlıyoruz:

Teorem. *Bir ABC üçgeninde AD, BE ve CF kenarortayları G noktasında kesişiyor olsunlar.*

Bu durumda

$$|AG| = 2\cdot|GD|$$
$$|BG| = 2\cdot|GE|$$
$$|CG| = 2\cdot|GF|$$

eşitlikleri geçerlidir.

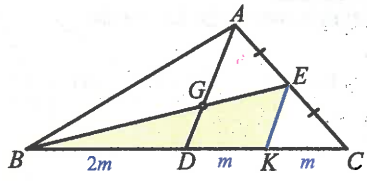


Yani kısacası teorem diyor ki: *G noktası, kenarortayların her birini 2:1 oranında böler.*

Kanıt: Çok önemli olan bu teoremi birkaç farklı şekilde kanıtlayalım.

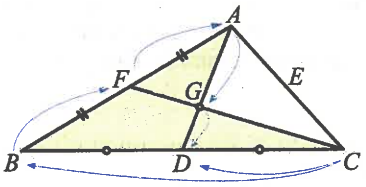
Birinci yol. Herhangi bir kenarortayın G tarafından 2:1 oranında bölündüğünü göstersek yeter. Aynı işlemleri diğer kenarortaylar için de yapabiliriz.

E noktasından AD kenarortayına paralel olacak biçimde çizilen doğru DC'yi K'de kessin.



ADC üçgeninde $[EK]$ orta taban olduğu için $|DK| = |KC|$ olur. Bu doğru parçalarının her birinin uzunluğuna m br dersek, $[AD]$ kenarortay olduğundan $|BD| = 2m$ br olur. Şimdi BKE üçgeninde $GD \,//\, EK$ olduğundan Tales Teoremi gereği $|BG| = 2\cdot|GE|$'dir.

İkinci yol. Üçgen içinde kesişen doğrular görünce aklımıza Menelaus teoremi de geliyor. Dikkatle bakılacak olursa şeklin içinde üç adet Menelaus şekli saklıdır. Her birinde ayrı ayrı yapılacak birer Menelaus teoremi uygulaması bizi sonuca götürecektir. Biz sadece birini yapalım, diğerleri size alıştırma kalsın.



C'den B yönünde harekete başlarsak,

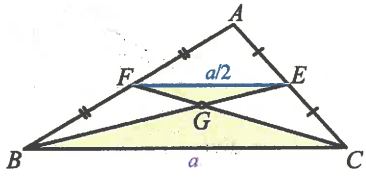
$$\frac{|CD|}{|CB|}\cdot\frac{|BF|}{|FA|}\cdot\frac{|AG|}{|GD|}=\frac{\frac{1}{2}a}{a}\cdot\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}c}\cdot\frac{|AG|}{|GD|}=1$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$|AG|=2|GD|$$

sonucuna hemencecik varılır.

Üçüncü yol. Şekilde zibil gibi (Adanaca "çok fazla" demek) orta nokta var. Orta nokta gördük mü, orta tabanı hatırlamamız gerekiyordu. Bu sebeple, F ile E noktalarını birleştirirsek, ABC üçgeninde $[FE]$ orta taban olur.

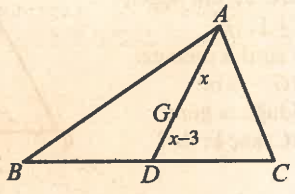


Orta tabanın tabana paralel olduğunu bildiğimizden taranmış şekil bir kelebektir. Orta tabanın boyunun tabanın boyunun yarısı olduğunu da biliyoruz. O halde kelebeğin kanatları arasındaki benzerlik oranı 1:2'dir. Demek ki

$$|BG|=2|GE| \text{ ve } |CG|=2|GF|$$

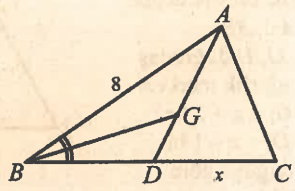
olmalıdır.

1.
ABC bir üçgen
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$|AG|=x$ br
$|GD|=x-3$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



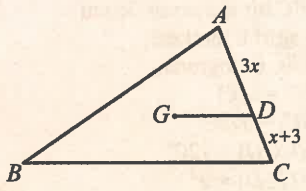
6

2.
ABC bir üçgen
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$[BG]$ iç açıortay
$|AB|=8$ br
$|DC|=x$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



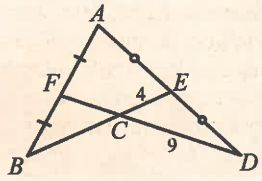
4

3.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GD \parallel BC$
$|AD|=3x$ br
$|DC|=x+3$ br
olduğuna göre
x kaçtır?



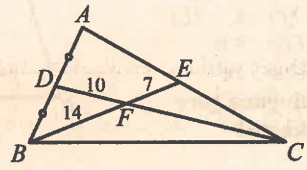
6

4.
$ABCD$ bir konkav dörtgen
$BE \cap DF=\{C\}$
$|AF|=|FB|$
$|AE|=|ED|$
$|CE|=4$ br
$|CD|=9$ br
olduğuna göre
$|CB|-|CF|$ kaçtır?



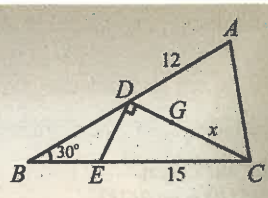
3,5

5.
ABC bir üçgen
$BE \cap CD=\{F\}$
$|AD|=|DB|$
$|BF|=14$ br
$|FE|=7$ br
$|FD|=10$ br
olduğuna göre
$|CF|$ kaç br dir?



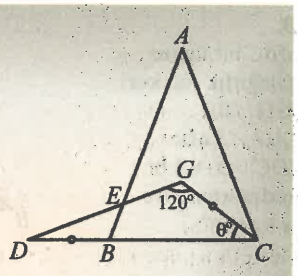
20

6.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$m(ABC)=30°$
$CD \perp DE$
$|AD|=12$ br
$|EC|=15$ br
olduğuna göre $|GC|=x$ kaç br dir?



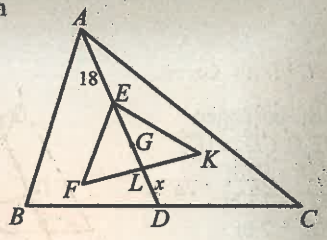
A) 12 B) 10 C) 9 **D) $4\sqrt{5}$** E) 8

7.
ABC bir ikizkenar üçgen
G ağırlık merkezi
D, B, C doğrudaş
$|AB| = |AC|$
$|GC| = |DB|$
$m(CGD) = 120°$
$m(GCD) = \theta°$
olduğuna göre θ kaçtır?



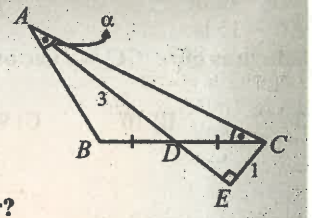
A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 **E) 40**

8.
ABC ve EFK birer üçgen
G iki üçgenin de ağırlık merkezi
$E \in [AD]$
$AD \cap FK = \{L\}$
$|AE| = 18$ br
$|LD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 4 B) 4,5 C) 6 **D) 9** E) 12

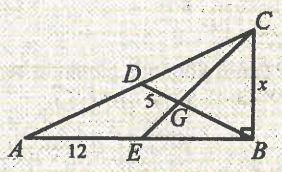
9.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = m(BCA)$
AD kenarortay
$CE \perp AD$
$|AD| = 3$ br
$|CE| = 1$ br
olduğuna göre
$m(CAE) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 10 **B) 15** C) 18 D) 22,5 E) 30

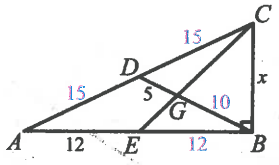
Ağırlık merkezi ile ilgili sorular, dik üçgende sorulduğu zaman anlayın ki muhteşem üçlü teoremi kullanılacak. Şimdi buna dair örneklerimizi sunalım.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
$AB \perp BC$
$BD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$|DG| = 5$ br
$|AE| = 12$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 18

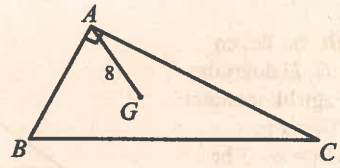
Çözüm: Ağırlık merkezi kenarortayları 2:1 oranında böler ya, bundan dolayı $|DG| = 5$ br diye $|GB| = 10$ br olur.



Dik köşeye ait kenarortayın boyunu 15 br bulundu diye muhteşem üçlü teoreminden $|AD| = |DC| = 15$ br olur. ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden de $|BC| = 18$ br olarak bulunur.

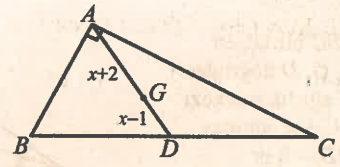
Doğru cevap: E.

10.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$|AG| = 8$ br
olduğuna göre
$|BC|$ kaç br dir?



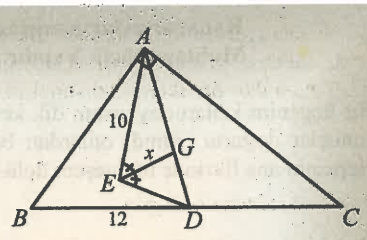
24

11.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$|AG| = x + 2$ br
$|GD| = x - 1$ br
olduğuna göre
$|BC|$ kaç br dir?



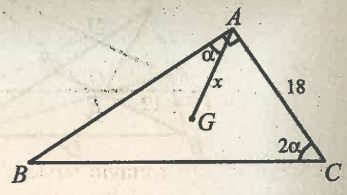
18

12.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$m(AEG) = m(GED)$
$|AE| = 10$ br
$|BD| = 12$ br
$|EG| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



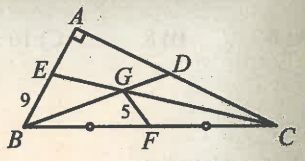
A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{16}$ D) $\sqrt{17}$ **E)** $\sqrt{18}$

13.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$m(GAB) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$|AC| = 18$ br
$|AG| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



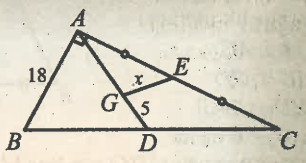
A) 9 B) 10 **C)** 12 D) 13 E) 15

14.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$BD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$|GF| = 5$ br
$|BE| = 9$ br
olduğuna göre $|CD|$ kaç br dir?



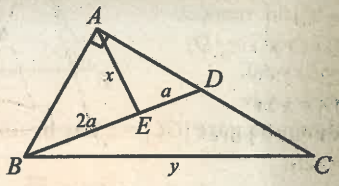
A) 10 **B)** 12 C) 15 D) 17 E) 18

15.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$|AE| = |EC|$
$|GD| = 5$ br
$|AB| = 18$ br
olduğuna göre $|GE| = x$ br kaç br dir?



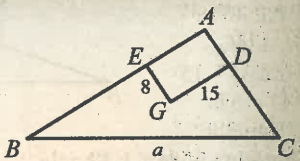
A) $\sqrt{48}$ B) $\sqrt{50}$ **C)** $\sqrt{52}$ D) $\sqrt{54}$ E) $\sqrt{56}$

16.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
B, E, D doğrudaş
$|AD| = |CD|$
$|BE| = 2|ED| = 2a$ br
$|AE| = x$ br
$|BC| = y$ br
olduğuna göre y/x oranı kaç olur?



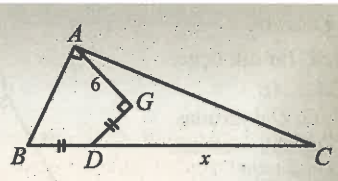
A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

17.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GDAE$ bir dikdörtgen
$|GD| = 15$ br
$|GE| = 8$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaçtır?



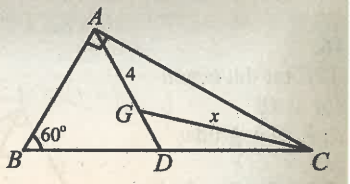
A) 25,5 B) 34 **C)** 51 D) 68 E) 102

18.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$BA \perp AC$
$AG \perp GD$
$|BD| = |DG|$
$|AG| = 6$ birim
olduğuna göre $|DC| = x$ kaç birimdir?



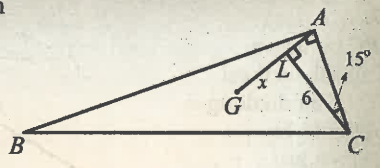
A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

19.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$AG \cap BC = \{D\}$
$m(B) = 60°$
$|AG| = 4$ br
olduğuna göre $|GC| = x$ kaç br dir?



A) $4\sqrt{3}$ B) 7 C) $2\sqrt{13}$ D) $4\sqrt{7}$ E) 8

20.
ABC bir dik üçgen
G ağırlık merkezi
$CA \perp AB$
$CL \perp AG$
$m(LCA) = 15°$
$|LC| = 6$ br
$|GL| = x$ br
olduğuna göre $x + 4$ kaçtır?



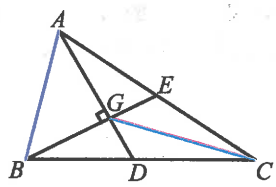
A) $4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{2}$

Kenarortaylar Kesişince Dik Muhteşemüçlü Yapılır Dedik

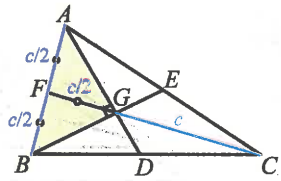
Bir üçgenim kenarortaylarının dik kesişmesi, ilginç bazı sonuçlar doğurur. Şimdi onlardan bazılarını vereceğiz. Hepsinin ana fikrinde muhteşem üçlü vardır, ona göre:...

Teorem. *Bir dik üçgende iki kenarortay dik kesişirse, üçüncü köşenin ağırlık merkezine uzaklığı, üçüncü kenarın boyu kadardır.*

Yani yandaki üçgende
$AD \perp BE$ olup G de ağırlık merkeziyse;
$|GC| = |AB|$.

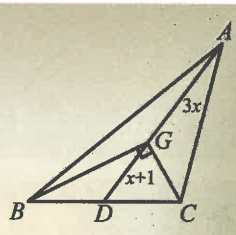


Kanıt: Bir üçgende üç kenarortay noktadaş olduğundan $[CG]$'yi G yönünde uzatırsak, $[AB]$'yi ortalar.



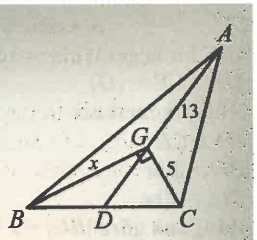
$|AF| = |FB| = c/2$ br dersek, AGB bir dik üçgen olduğundan muhteşem üçlü gereğince $|GF| = c/2$ br olur. Ağırlık merkezi kenarortayı 2:1 oranında böldüğünden $|GC| = c$ br olur ki kanıt tamamlanmıştır.

21.
ABC bir üçgen
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$CG \perp GB$
$|AG| = 3x$ br
$|GD| = x + 1$ br
iken $|BC|$ kaç br dir?



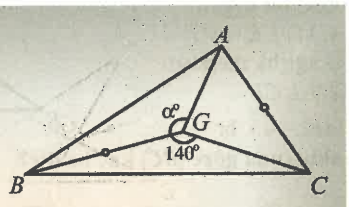
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

22.
ABC bir üçgen
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$CG \perp GB$
$|AG| = 13$ br
$|CG| = 5$ br
$|BG| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



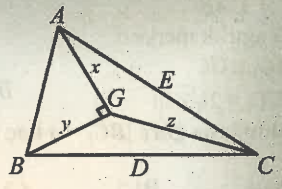
A) 10 **B) 12** C) 13 D) 15 E) 16

23.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$|BG| = |AC|$
$m(AGB) = \alpha^\circ$
$m(BGC) = 140^\circ$
iken α kaçtır?



A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 **E) 130**

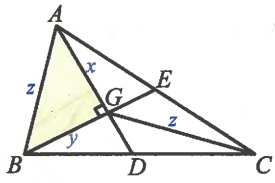
24.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GA \perp GB$
$|AG| = x$ br
$|BG| = y$ br
$|CG| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $x + y = z$ B) $x \cdot y = z^2$ C) $x + y = 2z$
D) $x^2 + y^2 = z^2$ E) $x^2 + y^2 = 2z^2$

Teorem. *Bir üçgende iki kenarortay birbirine dik ise bu kenarortayların boylarının kareleri toplamı üçüncü kenarortay boyunun karesine eşittir.*

Kanıt: Üçgenimiz ABC, dik kesişen kenarortaylar da A ve B köşelerinden çıkanlar olsun. Kanıtlamamız gereken eşitlik $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$ dir. Kanıtlayalım:



$|AG| = x$ br, $|BG| = y$ br ve $|AB| = z$ br olsun. AGB dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi gereğince $x^2 + y^2 = z^2$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $|GC| = |AB|$ olduğunu da kanıtlamıştık. O halde

$$x = |GA| = \frac{2}{3}v_a$$

$$y = |GB| = \frac{2}{3}v_b$$

$$z = |GC| = \frac{2}{3}v_c$$

olduğundan $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliği

$$\left(\frac{2}{3}v_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}v_b\right)^2 = \left(\frac{2}{3}v_c\right)^2$$

halini alır ki, eşitliğin her iki yanı 9/4 ile çarpılırsa

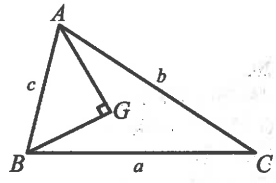
$$v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$$

olduğu kanıtlanır.

Bu teorem bizi şu sonuca götürür:

Sonuç: *Kenar uzunlukları a br, b br, c br olan bir ABC üçgeninde A ve B köşelerine ait kenarortaylar birbirine dik ise*

$a^2 + b^2 = 5c^2$.



Böyle bir durumda $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$ olacağını daha önce kanıtlamıştık. Bunu

$$4(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

denkleminde yerine yazalım.

$$4(2v_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$8v_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

elde edilir. Diğer yandan $v_c = \frac{3}{2}c$ olduğunu biliyoruz. Bu bilgiyi de kullanırsak

$$18c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

eşitliğini elde ederiz. Eşitliğin her iki yanını 3'e böldükten sonra c'leri bir tarafta toplarsak

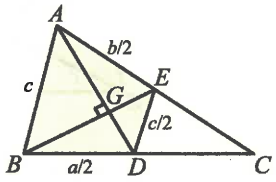
$$a^2 + b^2 = 5c^2$$

eşitliğine ulaşılır.

Aslına bakarsanız, konumuz kenarortay diye bir önceki teoremi ve ondan çıkan sonucu böyle kanıtladık. Kenarortay özelliklerini defalarca kullanalım ki kafaya kazınsın diye... Ama aklı başında bir adam o soruyu öyle çözmez ki ☺ Siz de bu tarz soruları şöyle çözün lütfen:

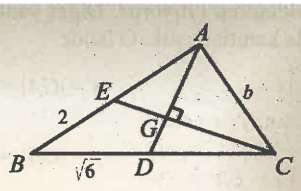
D ve *E* orta noktalar olduğundan [*ED*] orta tabandır. *ABDE* bir dikgen dörtgen olduğundan, karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirlerine eşittir.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$$



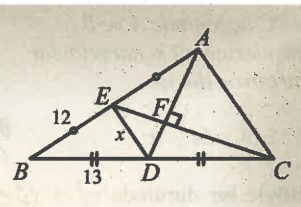
Buyrun, size nur topu gibi bir $a^2+b^2=5c^2$ eşitliği....

25.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$AD \perp CE$
$|BE| = 2$ br
$|BD| = \sqrt{6}$ br
olduğuna göre $|AB| = b$ kaç br dir?



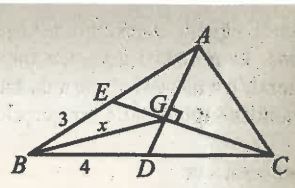
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{6}$ **D)** $2\sqrt{2}$ E) 3

26.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{F\}$
$AD \perp CE$
$|BE| = |EA| = 12$ br
$|BD| = |DC| = 13$ br
$|ED| = x$ br
olduğuna göre $5x^2$ kaçtır?



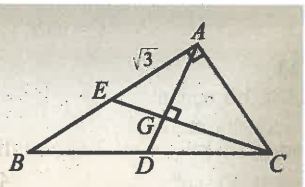
A) 310 B) 311 C) 312 **D)** 313 E) 314

27.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$AD \perp CE$
$|BE| = 3$ br
$|BD| = 4$ br
olduğuna göre $|BG| = x$ kaç br dir?



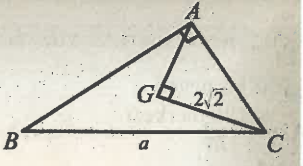
A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4 **D)** $2\sqrt{5}$ E) 5

28.
ABC bir üçgen
$AD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$AD \perp CE$
$|AE| = \sqrt{3}$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $4\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}$

29.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$AG \perp GC$
$|GC| = 2\sqrt{2}$ br
olduğuna göre $|BC| = a$ kaç br dir?



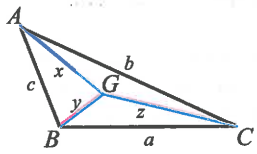
A) 4 B) 5 **C)** 6 D) 7 E) 8

Şimdi ağırlık merkezinin köşelere olan uzaklıklarıyla, kenar uzunlukları arasında bir bağıntı öğreneceğiz. Çok önemli bir teorem olmasa da bazı soruların çözümlerinde pratiklik sağladığı da bir gerçektir.

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br, c br olan bir ABC üçgeninde ağırlık merkezi G ise*

$$|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Diğer bir deyişle;
yandaki ABC üçgeninde G ağırlık merkeziyse $a^2+b^2+c^2=3(x^2+y^2+z^2)$.



Kanıt: Oldukça kolay. Beni izleyin:

$$x=|GA|=\frac{2}{3}v_a$$

$$y=|GB|=\frac{2}{3}v_b$$

$$z=|GC|=\frac{2}{3}v_c$$

olduğunu biliyoruz. Bu üç eşitliğin kareleri alınırsa

$$|GA|^2=\frac{4}{9}{v_a}^2$$

$$|GB|^2=\frac{4}{9}{v_b}^2$$

$$|GC|^2=\frac{4}{9}{v_c}^2$$

buluruz. Bulduğumuz bu üç eşitliği toplarsak;

$$|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2=\frac{4}{9}\left({v_a}^2+{v_b}^2+{v_c}^2\right)$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)$$

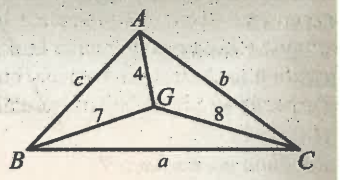
$$=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

30.
Alanı $9\sqrt{3}$ br^2 olan bir eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G'dir.
Buna göre $|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2$ toplamı kaçtır?

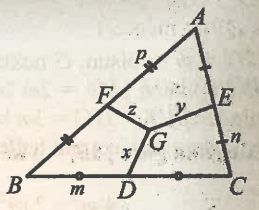
A) 24 B) 36 C) 40 D) 48 E) 72

31.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$|GA|=4$ br
$|GB|=7$ br
$|GC|=8$ br
olduğuna göre
$a^2+b^2+c^2$ toplamı kaçtır?



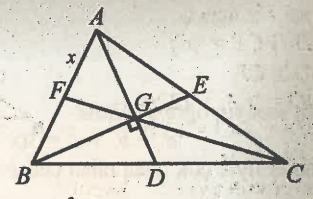
A) 375 B) 378 C) 381 D) 384 E) 387

32.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$|BD|=|DC|=m$ br
$|CE|=|EA|=n$ br
$|AF|=|FB|=p$ br
$|GD|=x$ br
$|GE|=y$ br
$|GF|=z$ br
olduğuna göre $\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}$ **oranı kaçtır?**



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) 9

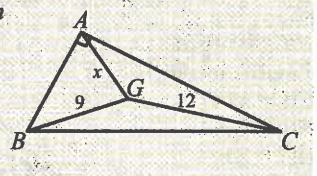
33.
ABC bir üçgen
$AD\cap BE\cap CF=\{G\}$
G ağırlık merkezi
$AD\perp BE$
$|AF|=x$ br



$|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2=162$ br^2 olduğuna göre x kaçtır?

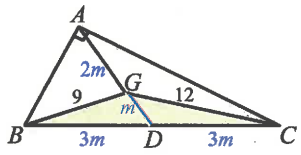
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
CA ⊥ AB
G ağırlık merkezi
|GB| = 9 br
|GC| = 12 br
|GA| = x br
olduğuna göre x kaçtır?



A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

Çözüm: Dik üçgende ağırlık merkezi görünce aklımıza muhteşem üçlü gelmeliydi, bu sebeple AG'yi uzatıp BC'yi kesmesini sağlayacağız. Kestiği noktaya D diyelim.



$|GD| = m$ br olsun. G noktası, kenarortayı 2 : 1 oranında böldüğünden $|AG| = 2m$ br olur. Muhteşem üçlü teoreminden $|BD| = |DC| = 3m$ br olur. Gerisini GBC üçgeninde kenarortay teoremi halledecek:

$$4 \cdot m^2 = 2 \cdot (9^2 + 12^2) - (6m)^2$$

eşitliğinden $m = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ bulunur. O halde

$$|AG| = 2m = 3\sqrt{5}$$

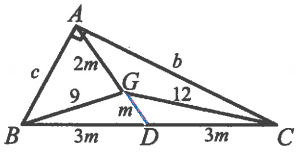
olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Bu soruyu, öğrendiğimiz

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

teoremiyle çok daha rahat çözebilirdik.

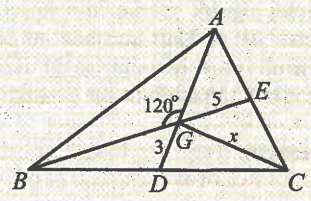


$b^2 + c^2 = a^2$ ve $a = 6m$ olduğuna göre

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$(6m)^2 + (6m)^2 = 3(4m^2 + 9^2 + 12^2)$$

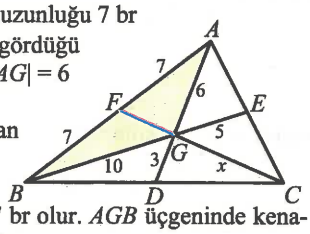
eşitliğinden $|AG| = 2m = 3\sqrt{5}$ bulunur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
AD ∩ BE = {G}
G ağırlık merkezi
|GD| = 3 br
|GE| = 5 br
m(AGB) = 120°
olduğuna göre
|GC| = x kaç br dir?



A) 6 B) 7 C) 8 D) $2\sqrt{19}$ E) $2\sqrt{38}$

Çözüm: 3-5-7 üçgeninde uzunluğu 7 br olan kenar 120°lik açının gördüğü kenar oluyordu. O halde $|AG| = 6$ br ve $|BG| = 10$ br olup $m(AGB) = 120°$ olduğundan $|AB| = 14$ br dir. CG'nin AB'yi kestiği noktaya F diyelim. $|AF| = |FB| = 7$ br olur. AGB üçgeninde kenarortay teoremini uygulayalım.



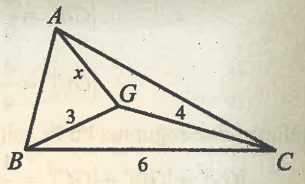
$$2 \cdot |FG|^2 = 6^2 + 10^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 14^2$$

eşitliğinden $|FG| = \sqrt{19}$ br bulunur ki, buradan

$|CG| = 2|FG| = 2\sqrt{19}$ br olarak bulunur.

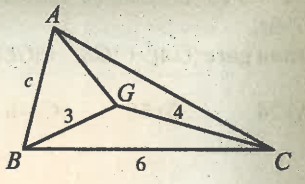
Doğru cevap: E.

34.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
|GB| = 3 br
|GC| = 4 br
|BC| = 6 br
|AG| = x br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{14}$ E) 4

35.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
|GB| = 3 br
|GC| = 4 br
|BC| = 6 br
|AB| = c br
olduğuna göre c kaçtır?

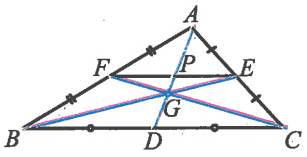


A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 5 **E)** $\sqrt{30}$

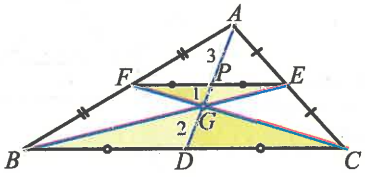
AĞIRLIK MERKEZİ İLE İLGİLİ BENZERLİK TEOREMLERİ

Konunun bu safhasında, kenarortay ayaklarının yani orta noktaların birleştirilmesiyle veya kenarortaylara paralel olarak çizilmiş veya çizilecek doğruların, üçgenin kenarlarını kesmesiyle meydana gelen orantılı doğru parçalarını çalışacağız. Bu orantılı doğru parçaları çoğu zaman kelebek oluşturacak, çoğu zaman Tales teoremi uygulattıracak, çoğu zaman da bazı üçgenleri bazılarına benzer yapacak ve bu benzerlikler ilginç sonuçlar doğuracak. Merakla bekliyoruz ☺

Teorem. *ABC bir üçgen*
AD ∩ BE ∩ CF = {G}
G ağırlık merkezi
AD ∩ FE = {P}
olsun.
Böyle bir durumda
|AP| : |PG| : |GD| = 3 : 1 : 2 olur.



Kanıt: *F* ve *E* orta noktalar olduğundan [*FE*] orta tabandır. O halde *FE* // *BC*'dir.

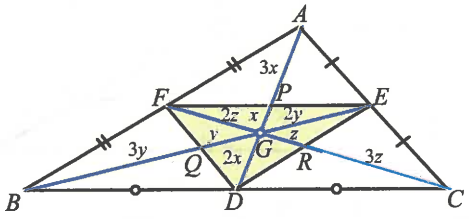


FEG ile *CBG* üçgenleri benzer olduğundan (kelebek) |*PG*| : |*GD*| = 1 : 2 olmalıdır. Aynı zamanda |*AF*| = |*FB*| olduğundan |*AP*| = |*PD*| olmalıdır. O halde

|*AP*| : |*PG*| : |*GD*| = 3 : 1 : 2

kanıtlandı demektir. Bu teorem şu güzel sonucu doğurur:

Sonuç: *Bir üçgenin ağırlık merkezi o üçgenin orta üçgeninin de ağırlık merkezidir.*



Üstteki şekilden takip ediniz:

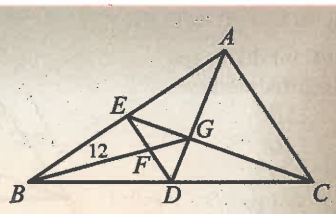
|*AP*| : |*PG*| : |*GD*| = 3 : 1 : 2
|*BQ*| : |*QG*| : |*GE*| = 3 : 1 : 2
|*CR*| : |*RG*| : |*GF*| = 3 : 1 : 2

olduğunu son teoremden biliyoruz. Dikkat edilecek olursa *DEF* üçgeninde

|*DG*| : |*GP*| = 2 : 1
|*EG*| : |*GQ*| = 2 : 1
|*FG*| : |*GR*| = 2 : 1

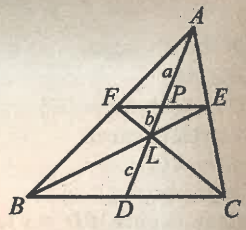
bulundu. Bu da *G*'nin *DEF* üçgeninin ağırlık merkezi olmasına yeter de artar bile!

36.
ABC bir üçgen
AD ∩ *CE* = {*G*}
G ağırlık merkezi
BG ∩ *DE* = {*F*}
|*BF*| = 12 br
olduğuna göre
|*FG*| kaç br dir?



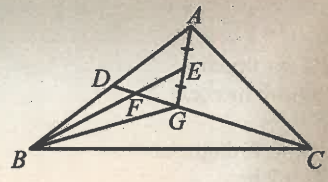
A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

37.
ABC bir üçgen
AD ∩ *BE* ∩ *CF* = {*L*}
L ağırlık merkezi
AD ∩ *FE* = {*P*}
FE // *BC*
|*AP*| = *a* br
|*PL*| = *b* br
|*LD*| = *c* br
olduğuna göre *a*, *b*, *c* arasında geçerli bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?



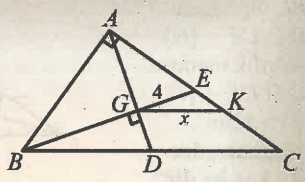
A) 5 : 3 : 4 B) 4 : 1 : 2 C) 3 : 1 : 2
D) 5 : 2 : 3 E) 6 : 2 : 3

38.
ABC bir üçgen.
G ağırlık merkezi
CD ∩ *BE* = {*F*}
|*AE*| = |*EG*|
olduğuna göre
|*DF*| : |*FG*| : |*GC*|
kaçtır?



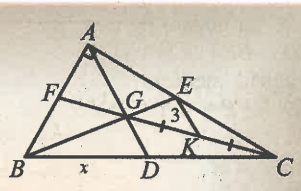
A) 1 : 2 : 3 **B) 1 : 2 : 6** C) 2 : 3 : 6
D) 2 : 4 : 9 E) 1 : 2 : 4

39.
ABC bir dik üçgen
G ağırlık merkezi
$CA \perp AB$
$AD \perp BE$
$GK \,//\, BC$
$|GE| = 4$ br
$|GK| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



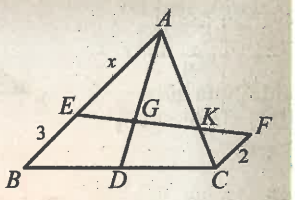
A) $2\sqrt{5}$ B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) $6\sqrt{2}$

40.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \cap BE \cap CF = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$|GK| = |KC|$
$|EK| = 3$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?



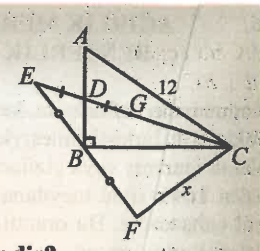
A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

41.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$CF \,//\, BA$
E, G, K, F doğrusal
$|CF| = 2$ br
$|BE| = 3$ br
$|EA| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



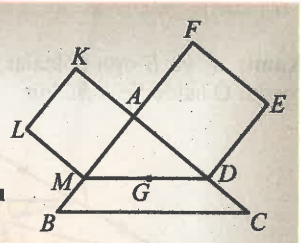
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

42.
ABC ve CEF birer üçgen
$AB \perp BC$
$|GD| = |DE|$
$|EB| = |BF|$
$|AC| = 12$ br
G noktası, ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olduğuna göre $|CF| = x$ kaç br dir?



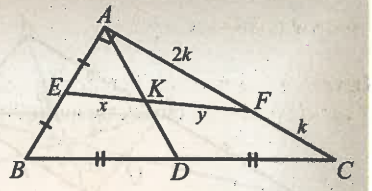
A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) 7 D) $\frac{15}{2}$ E) 8

43.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$ADEF$ ve $AKLM$ birer kare
$BF \cap CK = \{A\}$
$MD \,//\, BC$
Karelerin alanları toplamı 256 br^2 olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



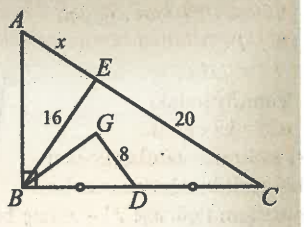
A) 48 B) 36 C) 32 D) 24 E) 16

44.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|AE| = |EB|$
$|BD| = |DC|$
$|AF| = 2 \cdot |FC|$
$AD \cap EF = \{K\}$
olduğuna göre $\frac{|EK|}{|KF|} = \frac{x}{y}$ oranı kaçtır?



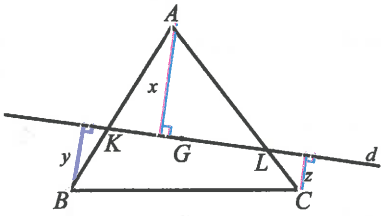
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

45.
ABC bir üçgen
$AB \perp BC$
G ağırlık merkezi
$|BD| = |DC|$
$|GD| = 8$ br
$|BE| = 16$ br
$|EC| = 20$ br
$|AE| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



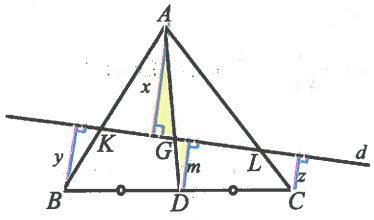
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Teorem. *Üçgenin ağırlık merkezinden geçen bir doğruya, üçgenin köşelerinden dikmeler indirilsin. Doğrunun zıt tarafında kalan dikmelerin boyları toplamları birbirlerine eşittir.*



Yani, yukardaki şekle göre $x = y + z$.

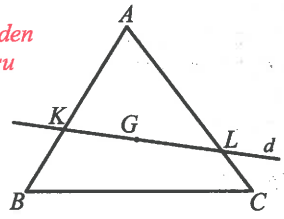
Kanıt: A köşesine ait kenarortay $[BC]$'yi D'de kessin. D'den d doğrusuna bir dikme indirelim.



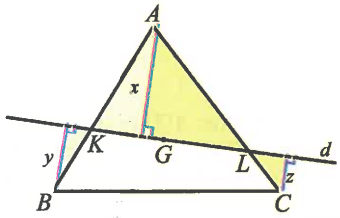
$|BD| = |DC|$ olduğundan indirdiğimiz bu dikme yamuktaki orta tabandır ve uzunluğu $= m = (y + z)/2$'dir. Diğer yandan oluşan kelebekteki benzerlik oranı 1/2 olduğundan $x = 2m$'dir. O halde $x = y + z$ kanıtlanmış olur.

Teorem. *Bir ABC üçgeni ve bu üçgenin ağırlık merkezinden geçen herhangi bir d doğrusu verilsin. D doğrusu [AB]'yi K'de, [AC]'yi L'de kessin.*

Öyleyse $\frac{|BK|}{|KA|} + \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$



Kanıt: ABC üçgeninin köşelerinden d doğrusuna indirilen dikmelerin boyları sırasıyla x br, y br ve z br olsun.



Soldaki küçük kelebekten

$$\frac{|BK|}{|KA|} = \frac{y}{x},$$

sağdaki büyük kelebekten

$$\frac{|CL|}{|LA|} = \frac{z}{x}$$

olduğunu, bir önceki teoremden de $y + z = x$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin her iki yanını x'e bölersek;

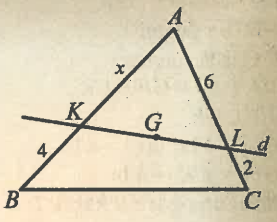
$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 1$$

olacağından

$$\frac{|BK|}{|KA|} + \frac{|CL|}{|LA|} = 1$$

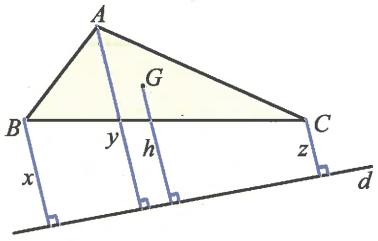
eşitliği kanıtlamış demektir.

46.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$\{K, G, L\} \in d$
$|KB| = 4$ br
$|CL| = 2$ br
$|LA| = 6$ br
$|AK| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



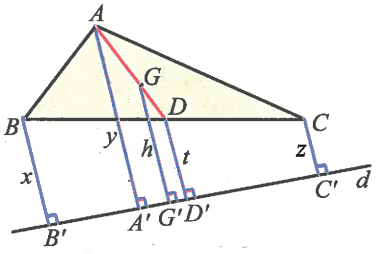
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Teorem. *Bir üçgenin köşelerinden herhangi bir doğruya dikmeler indirilsin. Bu dikmelerin boylarının toplamı üçgenin ağırlık merkezinden aynı doğruya indirilen dikmenin boyunun 3 katıdır.*



Yani, üstteki şekle göre $x + y + z = 3h$ olur diyor.

Kanıt: A köşesinden çıkan AG kenarortayı, $[BC]$'yi D'de kessin. A, B, C, D ve G'den d doğrusuna indirilen dikme ayakları sırasıyla A', B', C', D' ve G' olsun. D'den indirilen dikmenin boyu t br olsun.



$|BD| = |DC|$ olduğundan $BB'C'C$ dik yamuğunda $[DD']$ orta taban olur. Bundan dolayı

$$x - t = t - z$$

olur. Diğer yandan $AA'D'D$ dik yamuğunda $|AG| = 2|GD|$ olduğundan

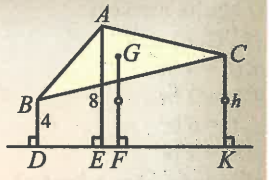
$$y - h = 2(h - t)$$

olur. Bu iki eşitlikten t'ler çekilip eşitlenirse;

$$x + y + z = 3h$$

eşitliği gösterilmiş olur.

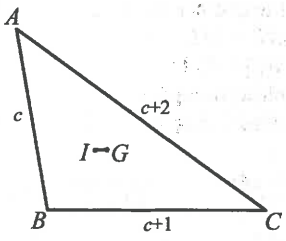
47.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$BD \parallel AE \parallel GF \parallel CK$
$GF \perp DK$
$|BD| = 4$ br, $|AE| = 8$ br
$|GF| = |CK| = h$ br
olduğuna göre h kaçtır?



A) 4,5 B) 5 C) 5,5 **D) 6** E) 6,5

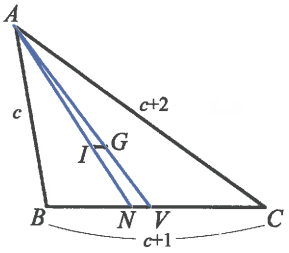
Teorem. *Kenar uzunlukları ardışık olan üçgenlerde iç çember merkezi ile ağırlık merkezini birleştiren doğru parçası ortanca kenara paralel olup, boyu 1/3'tür.*

Yani, 'yandaki ABC üçgeninde I iççember merkezi, G ağırlık merkezi ise hem $IG \parallel BC$, hem de $|IG| = 1/3$ br olur.' diyor...



Kanıt: $|AB| = c$ br, $|BC| = c + 1$ br, $|AC| = c + 2$ br olsun. A köşesine ait iç açıortay ile kenarortay BC kenarını sırasıyla N ve V noktalarında kessin.

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{|AB|+|AC|}{|BC|} = \frac{c+(c+2)}{c+1} = 2 = \frac{|AG|}{|GV|}$$

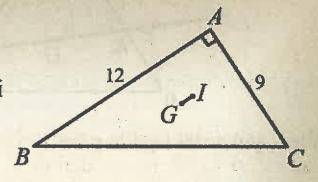


olduğundan Tales teoreminin karşıtından dolayı $IG \parallel NV$ olur. Diğer yandan iç açıortay teoreminden dolayı $|NV| = 1/2$'dir.

$$\frac{|AI|}{|AN|} = \frac{|IG|}{|NV|}$$

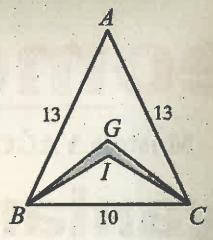
olduğundan $|IG| = 1/3$ olduğu da kanıtlanmış olur.

48.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
I iç teğet çember merkezi
G ağırlık merkezi
$|CA| = 9$ br
$|AB| = 12$ br
olduğuna göre $|GI|$ kaç br dir?



A) 1/3 B) 2/3 C) 1 D) 4/3 E) 5/3

49.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
I iç çember merkezi
$|AB| = |AC| = 13$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre
$|GBIC|$ **kaç br^2 dir?**



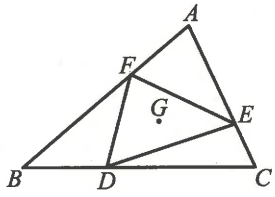
A) $\frac{5}{3}$ B) 2 C) $\frac{8}{3}$ D) 3 E) $\frac{10}{3}$

Teorem. *Bir ABC üçgeninin [BC], [CA], [AB] kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları alınıyor.*
Eğer $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$ *ise ABC üçgeni ile DEF üçgeninin ağırlık merkezleri çakışıktır.*

Kanıt: Analitik geometri kullanacağız.
$A(a, b)$, $B(c, d)$, $C(e, f)$, $F(x, y)$, $D(m, n)$, $E(z, t)$ ve $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = k$ olsun.

$$\frac{a-x}{x-c} \cdot \frac{c-m}{m-d} \cdot \frac{e-z}{z-a} = k$$

demektir.



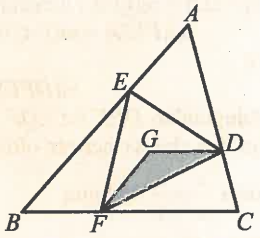
$$a - x = xk - ck$$
$$c - m = mk - dk$$
$$e - z = zk - ak$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$a + c + e = x + z + m$$

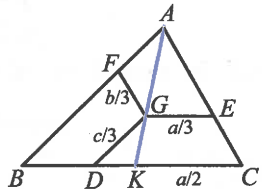
bulunur ki bu da iki üçgenin köşelerinin koordinatlarının apsisleri toplamı eşit demektir. Aynı işlemler ordinatlar için de yapılırsa ordinatların da eşit olduğu görülür. (Apsisleri toplamı/3, ordinatlar toplamı/3) bize ağırlık merkezinin koordinatlarını vereceğinden ağırlık merkezleri aynı yeri gösterir.

50.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$|AB| = 3 \cdot |AE|$
$|BC| = 3 \cdot |BF|$
$|CA| = 3 \cdot |CD|$
olduğuna göre
$\frac{|ABC|}{|GFD|}$ oranı kaçtır?



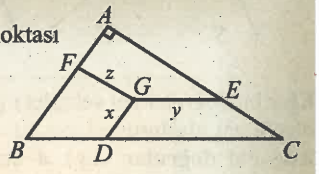
Teorem. *Bir üçgenin ağırlık merkezinden üçgenin kenarlarına paralel olacak şekilde kenarları kesene kadar doğru parçaları çizilirse, bu uzunlukların toplamı üçgenin çevresinin üçte biri kadardır.*

Kanıt: AG doğrusu BC'yi K'de kessin.



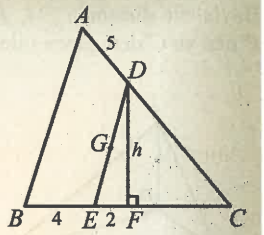
$|KC| = a/2$ br olur. $GE \,//\, KC$ olduğundan benzerlik gereği $|GE| = a/3$ br olur. Benzer şekilde $|FG| = b/3$ br ve $|GD| = c/3$ br bulunur. Üçü toplanırsa $(a + b + c)/3$ br bulunur. Aynı zamanda oluşan üç yamuğun alanları da eşittir.

51.
ABC bir üçgen
G kenarortayların kesim noktası
$GD \,//\, AB$
$GE \,//\, BC$
$GF \,//\, CA$
Çevre$(ABC) = 30$ br
olduğuna göre
$|GD| + |GE| + |GF| = x + y + z$ **toplamı kaçtır?**



A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 15 E) 20

52.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$G \in [DE]$
$DE \,//\, AB$
$DF \perp BC$
$|BE| = 4$ br
$|EF| = 2$ br
$|AD| = 5$ br
$|DF| = h$ br
olduğuna göre h **kaçtır?**



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

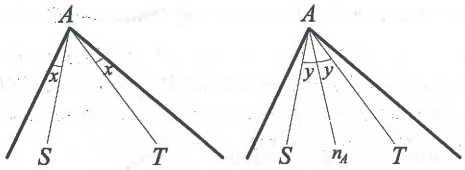
Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Simedyanlar

Baştan uyaralım: Bu konudan ne okulda ne de üniversite sınavında sorumlusunuz. Derdi okul notu veya üniversite sınavı olanlar, bu kısmı hiç okumayabilirler. Küsmem!

İzogonal Doğrular. AS ve AT, bir A açısının köşesinden geçen iki doğru olsun.

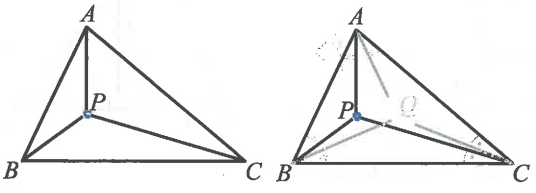


Eğer bu doğrular sol şekildeki gibi açının kollarıyla aynı ölçülü açı oluşturuyorlarsa bu doğrulara A **açısına göre izogonal doğrular** veya A **açısına göre birbirlerinin izogonal eşlenikleri** denir. Karışıklığa yol açmayacak durumlarda 'izogonal eşlenik' veya sadece 'izogonal' dendiği de olur.

Sağ şekilden de görüldüğü üzere; A'nın açıortayı olan n_A çizilirse, AS ve AT doğrularının n_A ile yaptıkları açı ölçüleri de eşittir. Bu yüzden şu gerçeği not düşebiliriz:

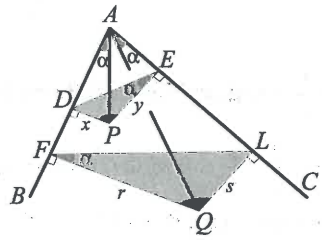
Bir açıya ait izogonal doğrular o açının açıortayına göre simetriktirler.

Şimdi bu A açısının bir ABC üçgenine ait olduğunu düşünelim. Bu üçgenin iç bölgesinde herhangi bir P noktası alalım ve bu noktayı üçgenin köşelerine birleştirelim. Böyle bir durumda PA, PB ve PC'nin sırasıyla A'dan, B'den ve C'den geçen birer izogonal eşlenikleri vardır.



Hiçbir görünür neden olmamasına rağmen, *bu izogonal eşlenikler kesişir*! Kesiştikleri noktaya Q dersek, P ile Q'ye de birbirlerinin **izogonal eşlenikleri** denir. Bu kesişimin hikâyesi kendisinden daha önemli bir teoremin sonucudur. Şöyle ki

Teorem 1. *P ve Q noktalarının aynı bir açıya ait izogonal doğruların üzerinde bulunmalarının gerek ve yeter şartı, bu noktaların açının kollarına olan uzaklıklarının birbirleriyle ters orantılı olmasıdır.*



Kanıt: P ve Q noktalarından AB ve AC kollarına inen dikme ayakları sırasıyla D ve E ile F ve L olsun. $PD = x$, $PE = y$, $QF = r$ ve $QL = s$ diyelim.

[Yeterlilik]: $\frac{x}{y} = \frac{s}{r}$ eşitliğinin verilmiş olduğunu düşünelim. $ADPE$ ve $AFQL$ dörtgenlerinin (karşılıklı açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan) birer kiriş dörtgeni olduğu görülürse

$$\begin{aligned} m(DPE) &= 180^\circ - m(EAD) \\ &= 180^\circ - m(LAF) \\ &= m(FQL) \end{aligned}$$

olur ki DPE ile LQF üçgenlerinin kenar-açı-kenar gereğince benzer olduklarını anlarız. O halde

$$m(PED) = m(QFL) = \alpha$$

dersek, kiriş dörtgenlerini kullanarak

$$m(PAD) = m(QAL) = \alpha$$

olduğunu görürüz ki bu da AP ile AQ doğrularının birbirlerinin izogonal eşlenikleri olduğunu kanıtlar.

[Gereklilik]: Eğer AP ve AQ doğruları izogonalsa $m(PAD) = m(QAL)$ demektir.

$$m(PED) = m(PAD) = m(QAL) = m(QFL)$$

ve

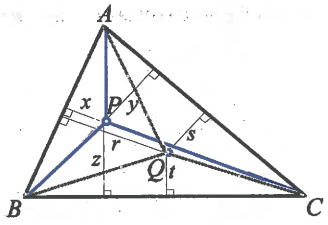
$$m(DPE) = m(FQL)$$

olduğundan DPE ile LQF üçgenlerinin bu sefer açı-açı-açı'dan dolayı benzer olduklarını anlarız. Eşleme kurulursa $\frac{x}{y} = \frac{s}{r}$ bulunur.

Şimdi bir üçgenin, üçgen içinde kesişen üç farklı kesenin izogonallarının da daima kesişeceğini kanıtlayalım.

Teorem 2. *Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktası için PA, PB ve PC doğrularının izogonal eşlenikleri noktadaştır.*

Kanıt: *PA* ve *PB* doğrularının izogonal eşlenikleri üçgen içinde bir *Q* noktasında kesişiyor olsunlar. *PC* ve *QC* doğrularının birbirlerinin izogonalları olduklarını gösterirsek kanıt bitecek. *P* ve *Q*'nün *AB*, *AC*, *BC* kenarlarına olan uzaklıkları sırasıyla *x*, *y*, *z* ve *r*, *s*, *t* olsun.



$\frac{x}{y}=\frac{s}{r}$ ve $\frac{z}{x}=\frac{r}{t}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak $\frac{z}{y}=\frac{s}{t}$ olduğunu buluruz ki Teorem 1'in yeterlilik koşuluna göre bu da aranan eşitliktir.

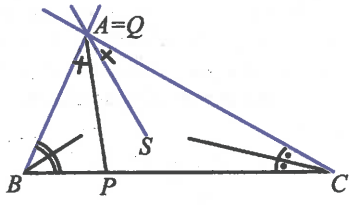
Bu kanıtlarla birlikte şu önemli sonuçlara erişiriz:

i. *Eğer Q, P'nin izogonal eşleniğiyse, P de Q'nün izogonal eşleniğidir.*

Bu zaten aşikar.

ii. *Eğer P üçgenin bir kenarı üzerindeyse Q üçgenin bir köşesidir.*

Ama herhangi bir köşesi değil tabii ki... Sözgelimi $P\in]BC[$ olsun, o halde $Q=A$ olur.

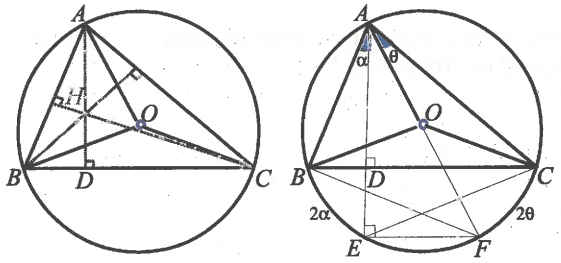


Yukardaki şekilden de görüleceği üzere *AP*'nin izogonali olan *AS* doğrusu *A*'dan geçmektedir. Diğer yandan *BP*'nin izogonali *BA*, *CP*'nin izogonali de *CA* olur. Benzer şekilde $P\in]CA[$ ise $Q=B$ ve $P\in]AB[$ ise $Q=C$ olur. *P* noktası *A*, *B*, *C* köşelerinden biri olduğunda *P*'nin izogonali tanımlanmamıştır.

iii. *Bir ABC üçgeninin düzleminde izogonal eşleniği kendisi olan sadece 4 nokta vardır. Biri üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, diğer üçü de dış teğet çemberlerinin merkezleridir.*

"İç çember merkezi aşikar da dış çember merkezlerine n'oluyor?" diyen varsa açıklayalım: Birbirini dik kesen doğrulardan birinin diğerine göre simetriği yine kendisidir. Aynı köşeye ait dış açıortaylarla iç açıortaylar dik kesiştiklerinden, dış açıortayların iç açıortaya göre simetrikleri yani izogonalleri yine kendileri olacaktır.

iv. *Eğer P noktası O* (üçgenin çevrel çember merkezi) *olursa, Q noktası H* (üçgenin diklik merkezi) *olur.*



Eğer *AO* ile *AH* doğrularının izogonal olduklarını gösterebilirsek (sol şekil), benzer şekilde *BO* ile *BH* ve *CO* ile *CH* de gösterilebileceğinden sonuca ulaşmış oluruz. Sağdaki şekilden takip ediniz:

AH ve *AO*'nun çemberi kestikleri diğer noktalara sırasıyla *E* ve *F* diyelim. $m(BAE)=\alpha$ ve $m(CAF)=\theta$ olsun. $m(BE)=2\alpha$ ve $m(FC)=2\theta$ olur. *AEF* açısı çapı gören çevre açı olduğundan diktir. Bu yüzden *BC* // *EF*'dir. Bu da $2\alpha=2\theta$ olmasını sağlar ki $\alpha=\theta$ olduğundan *AO* ile *AH* izogonaldır!

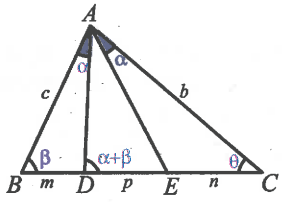
Şimdi izogonal kesenlerin kenarları hangi oranda böldüklerini göstereceğiz. Daha doğrusu bunu bulduran bir teorem verip kanıtlayacağız, daha sonra da teoremin daha başka neler becerdiğini ağzımız açık seyredeceğiz.

Teorem 3. *ABC üçgenine ait AD ve AE kesenleri A açısına göre izogonal ise*

$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Açı ve uzunluk ölçülerini yukarda söylendiği şekilde adlandıralım.



Bu durumda kanıtlanmayı bekleyen eşitlik

$$\frac{m}{p+n}\cdot\frac{m+p}{n}=\frac{c^2}{b^2}$$

eşitliğidir. O halde taban uzunluğu *m*, *m* + *p*, *p* + *n*, *n* olan üçgenlerde sinüs teoremi yazasımız gelmeli.

ABD üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{m}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$,

ABE üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{m+p}{c}=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(\alpha+\theta)}$,

ADC üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{b}{p+n}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(A-\alpha)}$,

AEC üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{b}{n}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha}$.

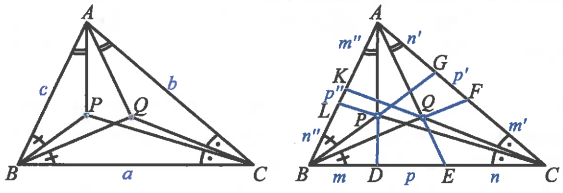
Şimdi bu dört eşitliği taraf tarafa çarpacağız. Sağ yanın 1 çıkacağına dikkat lütfen!

$$\frac{m}{c}\cdot\frac{m+p}{c}\cdot\frac{b}{p+n}\cdot\frac{b}{n}=1$$

$$\frac{m}{p+n}\cdot\frac{m+p}{n}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Kanıtladığımız bu teoremle yazının başında verdiğimiz 2 nolu teorem farklı şekilde kanıtlanabilir. Teoremi tekrar hatırlayalım, ardından kanıtlayalım:

Yeniden Teorem 2. *Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktası için PA, PB ve PC doğrularının izogonal eşlenikleri noktadaştır.*



AP, BP, CP, AQ, BQ, CQ doğru parçalarını uzatarak ABC üçgeninin kenarlarını kesmelerini sağlayalım, ardından uzunluk ölçülerini de şekildeki gibi adlandıralım.

$$\frac{m}{p+n}\cdot\frac{m+p}{n}=\frac{c^2}{b^2}$$

$$\frac{m'}{p'+n'}\cdot\frac{m'+p'}{n'}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{m''}{p''+n''}\cdot\frac{m''+p''}{n''}=\frac{b^2}{a^2}$$

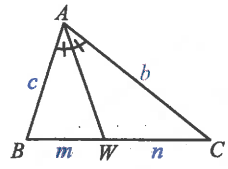
olduğunu biliyoruz. Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa çarpalım. Sağ tarafın 1 çıkacağına dikkat ediniz.

$$\left(\frac{m}{p+n}\cdot\frac{m'+p'}{n'}\cdot\frac{m''+p''}{n''}\right)\cdot\left(\frac{m+p}{n}\cdot\frac{m'}{p'+n'}\cdot\frac{m''}{p''+n''}\right)=1$$

AP, BP, CP doğrularının noktadaş olduğu bilindiğinden soldaki parantez içi Ceva Teoremi gereği 1'e eşittir. Eşitliğin sağlanması için sağ parantez içinin de 1 olması gerekir ki bu da Ceva Teoremi'nin karşıtı gereği AQ, BQ, CQ doğrularının da AP, BP, CP doğrularının izogonallerinin de noktadaş olduğu anlamına gelir.

Şimdi Teorem 3'ün başka bir marifetini göreceğiz. Zaten oldukça iyi bilinen iç ve dış açıortay teoremlerini de Teorem 3 ile kanıtlamak mümkün. Hem de bir çırpıda! Bunun sebebi bir üçgende iç ve dış açıortayların o köşenin belirttiği açıya göre izogonallerinin yine kendileri olmalıdır.

Teorem 4. *Üçgene ait bir iç açıortay, kestiği kenarı komşu kenar uzunluklarının oranında böler.*

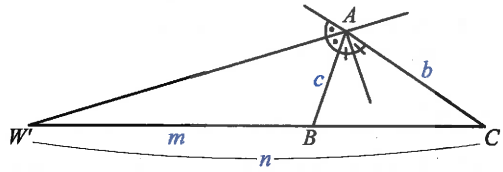


Kanıt: Yukardaki şekilde W noktası, Teorem 3'te belirtilen D ile E'nin çakıştığı nokta olarak düşünülebilir. Yani bir bakıma (hatta tam öyle) $p=0$ olduğu durumdur.

$$\frac{m}{0+n}\cdot\frac{m+0}{n}=\frac{c^2}{b^2}$$

olduğundan $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$ eşitliğine erişilir.

Teorem 5. *Üçgene ait bir dış açıortay kestiği kenarı aynı köşeden çıkan kenar uzunluklarının boyları oranında böler.*

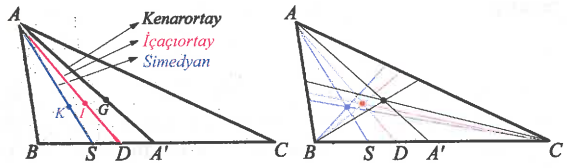


Kanıt: Bir üçgende herhangi bir açıya ait iç açıortayla dış açıortayın dik kesiştiğini bildiğimizden herhangi dış açıortayın izogonal eşleniği yine kendisi olacaktır. Çünkü bir doğrunun kendisini dik kesen bir doğruya göre simetriği yine kendisidir. Neyse, biz çözüme geçelim.
Teorem 3'te belirtilen D noktasının B'ye uzaklığı m ve E noktasının C'ye uzaklığı n idi. Yukardaki şekilde W' noktası D ile E'nin çakışık olduğu noktadır. O halde yine $p=0$ alınabilir.

$$\frac{m}{0+n}\cdot\frac{m+0}{n}=\frac{c^2}{b^2}$$

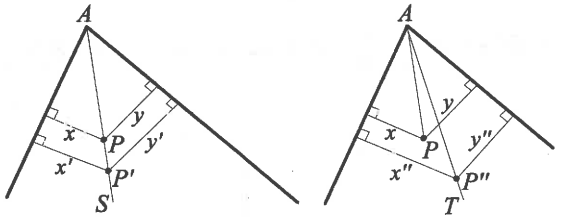
olduğundan $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$ eşitliğine erişilir.

Simedyanlar ve Simedyan noktası *K*. Bir üçgende kenarortayların izogonal eşleniklerine **simedyan** denmektedir. Daha önce, bir üçgende üç kesen tek noktada kesiştiği zaman onların izogonallarının da kesişeceğini kanıtlamıştık. Bir üçgende kenarortaylar daima kesiştiği için onların izogonal eşlenikleri olan simedyanlar da kesişir. Kesiştikleri bu noktaya üçgenin **Simedyan Noktası** denir ve K ile gösterilir. Yani K, G'nin izogonal eşleniğidir.



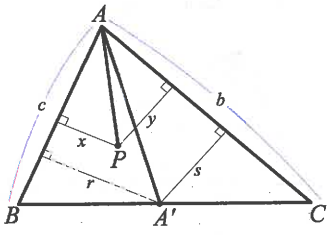
Uyarı. *K*, *G*, *I* noktaları doğrusal değildir. *K*, *G*'nin *I*'ya göre simetriği de değildir. *K*, *G*'nin açıortaya göre simetriği de değildir. Sadece *AS*, *AA'* doğrusunun *AD* doğrusuna göre simetriğidir.

Peki, bir üçgende herhangi bir köşeye ait kesenin simedyan olup olmadığı nasıl anlaşılır? Tabii ki uygunsa simedyanın çıktığı köşeden çıkan kenarortayla izogonal olup olmadığına bakılır. Fakat kimileyin, soruda açı ölçülerine değil de uzunluk ölçülerine bağlı veriler olur. Bu yüzden simedyanların kenar uzunluklarıyla ve diğer uzunluklarla ilişkilerini ortaya dökmek şarttır. Örneğin simedyanın kestiği kenarları hangi oranda kestiği, simedyan noktasının kenarlara olan uzaklığı, simedyan noktasının simedyanı hangi oranda kestiği gibi bilgilere ihtiyaç duyarız. Bu bahsettiklerimizi teker teker bulacağız.



Bir *A* açısı ve onun iç bölgesinde olacak şekilde bir *AS* ışını çizelim. *AS* ışını üzerinde bir *P* ve *P*'den başka bir *P'* noktası alınırsa, bu noktaların açının kollarına olan uzaklıklar oranı sabittir. Bunu temel benzerlik teoremleriyle rahatlıkla kanıtlayabilirsiniz. Şimdi *AS*'den başka bir *AT* ışını çizelim. Bu ışın üzerinde alınacak bir *P''* noktasının *AB* ve *AC* kenarlarına olan uzaklıklarının oranı *AS* üzerindekilerden farklı olacaktır. Demek ki bu oran kesen değiştikçe değişmektedir. O halde simedyanı tanımlamak için bu oran kullanılabilir. Biz de kullandık:

Teorem 6. *AP doğrusunun üçgene ait bir simedyan olmasının gerek ve yeter şartı* $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ *olmasıdır.*

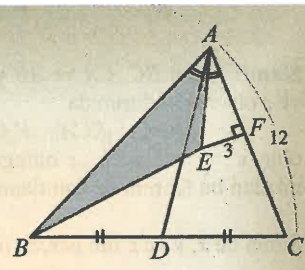


Kanıt: *BC*'nin orta noktası *A'* olsun. Bu noktanın *AB* ve *AC* kenarlarına uzaklıkları da sırasıyla *r* ve *s* olsun.

[Yeterlilik]: *AP*'nin simedyan olduğu verilsin. *P*'nin *AB* ve *AC* kenarlarına uzaklıkları da sırasıyla *x* ve *y* olsun. O halde $\frac{x}{y}=\frac{s}{r}$ olmalıdır. *AA'* bir kenarortay olduğundan alanı ortalar ve bundan dolayı $\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}bs$ eşitliğinden $\frac{s}{r}=\frac{c}{b}$ çıkar. O halde $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ olduğu kanıtlanmış olur.

[Gereklilik]: $\frac{x}{y}=\frac{c}{b}$ eşitliğinin verildiğini düşünelim. Biraz önce $\frac{c}{b}=\frac{s}{r}$ olduğunu göstermiştik. O halde $\frac{x}{y}=\frac{s}{r}$'dir. Bu da *AP* ile *AA'* doğrularını izogonal yapar ki *AA'* bir medyan (kenarortay) olduğundan *AP* bir simedyandır.

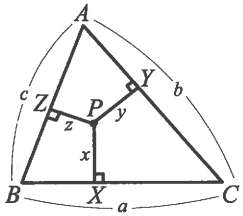
1.
ABC bir üçgen
[AD] kenarortay
$m(BAD)=m(CAE)$
$EF \perp CA$
$|EF|=3$ br
$|CA|=12$ br
$|ABE|=50$ br^2
olduğuna göre *[AB]* kenarının uzunluğu kaç br dir?



A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

Dedik ya, bir üçgende simedyanlar kesişir ve kesiştikleri noktaya simedyan noktası denip, *K* ile gösterilir. Şimdi *K*'yi diğer noktalardan ayıran, yani *K*'nin nevi şahsına münhasır özelliklerini göstereceğiz.

***K*'nin Karakterizasyonu.** *K*'den kenarlara indirilen her dikme için Teorem 6 uygulanırsa $x:y:z=a:b:c$ olduğu bulunur.

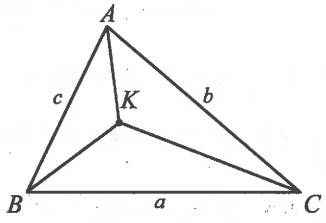


Yani *K* noktası, bir üçgende kenarlara uzaklıkları kenarların boyu orantılı olan tek noktadır. Bu da *K*'yi diğer noktalardan ayırarak, karakterini belli eder.

Bir üçgende a, b, c değerleri ne kadar birbirlerine yakın olursa K noktası o kadar iç teğet çember merkezine yakın olur. Çünkü $a = b = c$ durumunda $x = y = z$ olur ki, bir üçgenin iç bölgesinde üçgenin kenarlarına uzaklıkları eşit olan tek nokta vardır, o da anlı şanlı I noktasıdır.

Sonuç: *Eşkenar üçgende simedyan noktası, iç teğet çember merkeziyle* (dolayısıyla ağırlık merkeziyle) *çakışır.*

Teorem 7. $|KBC| : |KCA| : |KAB| = a^2 : b^2 : c^2$.



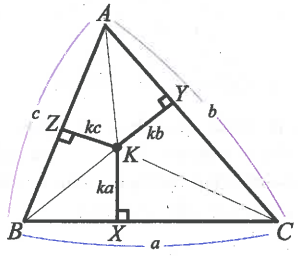
Kanıt: K'nin BC, CA ve AB'ya uzaklıkları sırasıyla x, y ve z olsun. Bu durumda

$$|KBC| : |KCA| : |KAB| = ax : by : cz$$

olur. $x : y : z = a : b : c$ olduğunu daha önce kanıtladığımızdan bu teorem de kanıtlanmış olur.

Şimdi de x, y ve z'nin gerçek uzunluklarını bulacağız.

K'nin Kenarlara Uzaklığı. Simedyan noktasının üçgenin kenarlarına uzaklıklarının kenarlarla orantılı olduğunu daha önce söylemiştik. O halde $|KX| = ka$, $|KY| = kb$, $|KZ| = kc$ olacak şekilde bir k sayısı mevcuttur. Bu k sayısını arıyoruz.



K noktasını üçgenin köşelerine birleştirelim. BKC, CKA, AKB üçgensel bölgelerinin alanları toplamı ABC bölgesinin alanını vermelidir. $|ABC| = \Delta$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}\Delta &= |BKC| + |CKA| + |AKB| \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot ka + \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot kb + \tfrac{1}{2}\cdot c\cdot kc \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot k\end{aligned}$$

olduğundan $k = \dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}$ ve buradan

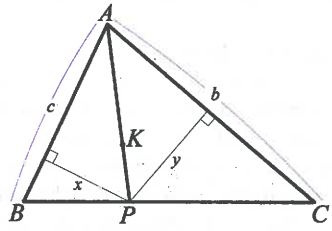
$$x = \frac{2\Delta\cdot a}{a^2+b^2+c^2}$$

bulunur.

Sonuç: *İkizkenar üçgende simedyan noktasının ikiz kenarlara olan uzaklıkları eşittir. Bunun tersi de doğrudur.*

Simedyanı tanımanın bir yolu da; kestiği kenarı hangi oranda kestiğidir. Nasıl ki bir iç açıortay, kestiği kenarı yan kenar uzunluklarının oranında böler, bir simedyan da o oranın karesiyle aynı oranda böler.

Teorem 8. $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{c^2}{b^2}$.



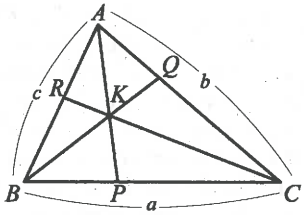
Kanıt 1: Eşitliğin sol yanını alanlar oranı cinsinden yazacağız:

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|ABP|}{|APC|} = \frac{\frac{1}{2}cx}{\frac{1}{2}by} = \frac{c}{b}\cdot\frac{x}{y}$$

Teorem 6'da $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde

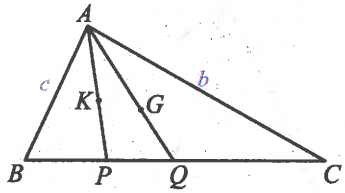
$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{c}{b}\cdot\frac{x}{y} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Kanıt 2: Basit alan oyunlarıyla sonuca varacağız:



$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|ABP|}{|APC|} = \frac{|KBP|}{|KPC|} = \frac{|ABP|-|KBP|}{|APC|-|KPC|} = \frac{|KAB|}{|KCA|} = \frac{c^2}{b^2}$$

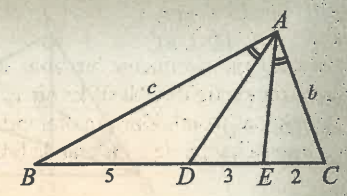
Kanıt 3: Teorem 3'ü kullanacağız:



$|BQ| = |QC|$ olduğundan

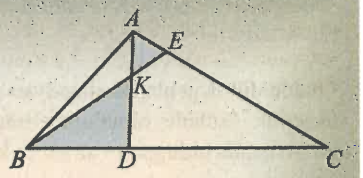
$$\frac{|BP|}{|PC|}\cdot\frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|BP|}{|PC|}\cdot 1 = \frac{c^2}{b^2}.$$

2.
ABC bir üçgen
$m(CAE) = m(BAD)$
$|BD| = 5$ br
$|DE| = 3$ br
$|EC| = 2$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c/b oranı kaçtır?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

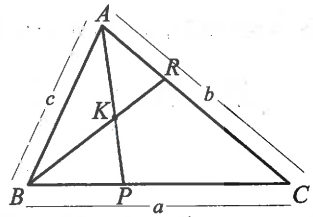
3.
ABC bir üçgen
K simedyan noktası
$|AB| = 2k$ br
$|AC| = 3k$ br
$|BC| = 4k$ br
$|AKE| = 117$ br^2
olduğuna göre $|KBD|$ kaç br^2 dir?



A) 300 **B) 320** C) 340 D) 360 E) 380

Şimdi de simedyanların kesim noktası olan K'nin bir simedyanı hangi oranda böldüğünü bulalım.

Teorem 9. $\dfrac{|AK|}{|KP|} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}$.

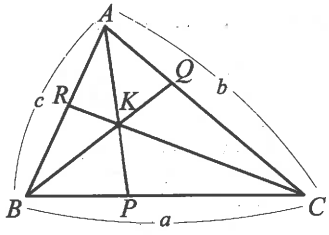


Kanıt 1: Bir önceki teoremde $BP : PC = c^2 : b^2$ olduğunu kanıtlamıştık. Şimdi B'den çıkan simedyanı da çizelim. Aynı nedenden dolayı $CR : RA = a^2 : c^2$ olur. Bir Menelaus Teoremi bizi aradığımıza götürecek:

$$\frac{|BP|}{|BC|}\cdot\frac{|CR|}{|RA|}\cdot\frac{|AK|}{|KP|} = \frac{c^2}{c^2+b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{|AK|}{|KP|} = 1$$

eşitliğinden $\dfrac{|AK|}{|KP|} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}$ olduğu kanıtlanmış olur.

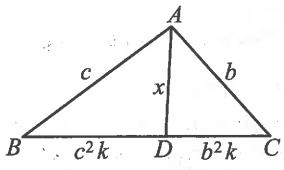
Kanıt 2: Kanıtımız Von Aubel Teoremi'ni kullanacak.

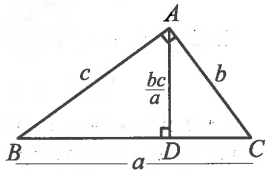


Teorem 5'den

$$\frac{|AK|}{|KP|} = \frac{|AQ|}{|QC|} + \frac{|AR|}{|RB|} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2+b^2}{a^2}.$$

Simedyanın Boyu. Teorem 5 ile birlikte kenar uzunlukları belli bir üçgenin herhangi bir simedyanın boyunu rahatlıkla hesaplayabiliriz. Madem ki simedyan, kestiği kenarı yan kenar uzunluklarının karesiyle orantılı olarak bölüyor, o halde $|CA| = b$ ve $|AB| = c$ olmak üzere bir k pozitif reel sayısı için $|BD| = c^2k$ ve $|DC| = b^2k$ yazabiliriz. Simedyanımız AD'nin boyuna da x diyelim.





ABC üçgeninde bir Stewart teoremi bizi sonuca götürecektir. Yazalım:

$$x^2 = \frac{c^2(b^2k)+b^2(c^2k)}{b^2k+c^2k} - b^2c^2k^2$$

$$= \frac{2b^2c^2}{b^2+c^2} - b^2c^2k^2$$

Diğer yandan $BC = a$ dersek, $c^2k + b^2k = a$ eşitliğinden $k = \dfrac{a}{b^2+c^2}$ bulunur. Bunu da üstteki eşitlikte yerine yazarsak,

$$x^2 = \frac{2b^2c^2}{b^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}$$

buluruz. Maalesef umduğumuz olmadı, sade bir şey çıkmadı ama yazının ilerleyen kısımlarında sizi hayrete düşürecek bir şey bekliyor. İyi ki de yukardaki eşitlik böyle çıkmış diyeceğinize eminim. Yine de buradan çıkaracağımız bazı sonuçlar mevcut:

Eğer üçgen A açısı dik olan bir üçgense $b^2 + c^2 = a^2$ olacağından

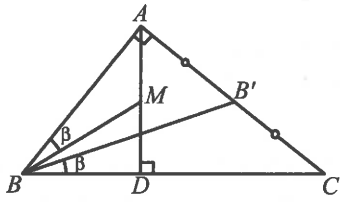
$$x = \frac{bc}{a}$$

buluruz. Bu değerin de dik üçgenlerde hipotenüse inen yüksekliğin boyu olduğunu biliyoruz. O halde:

Dik üçgenlerde dik köşeye ait simedyan, hipotenüse inen yüksekliktir.

O halde dik üçgenlerde simedyan noktası hipotenüse ait yükseklik üstünde olmalıdır. Bunu –hatta yüksekliğin tam ortasında olduğunu– az sonra kanıtlayacağız!

Teorem 10. *Bir dik üçgenin simedyan noktası hipotenüse ait yüksekliğinin orta noktasıdır.*



Yukarda B'den çıkan kenarortayla simedyan çizilmiştir. $|AM| = |MD|$ olduğu gösterilirse kanıt bitecek. Çünkü aynı işlemleri C köşesiyle de yapsak aynı sonuca ulaşırız.

Kanıt 1: $m(ABM) = m(CBB')$ ve $m(MAB) = m(B'CB)$ olduğundan MAB ile $B'CB$ üçgenleri benzerdir. O halde kenarları da orantılı olmalıdır. Bu orantıyı kuralım:

$$\frac{|B'C|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|}$$

$$|B'C| \cdot |BA| = |MA| \cdot |BC|$$

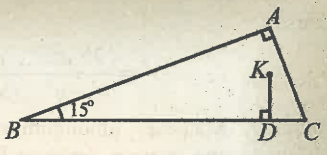
$$\frac{|AC|}{2} \cdot |BA| = |MA| \cdot \frac{|BA| \cdot |AC|}{|AD|}$$

$$|AD| = 2 \cdot |MA|$$

olduğundan $|MA| = |MD|$ kanıtlanmıştır.

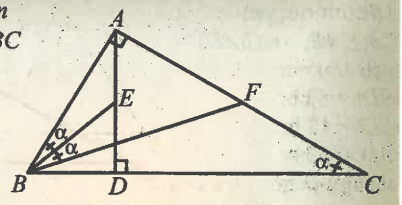
Kanıt 2: ADB ile CAB üçgenlerinin benzer olduğunu görelim. CAB üçgeninde B'den çıkan kenarortay hipotenüsle β ölçülü açı oluşturuyorsa, ADB üçgeninde de bu böyle olmalıdır. $m(ABM) = \beta$ diye BM kenarortaydır, o halde $|MA| = |MD|$.

4.
ABC bir dik üçgen
K simedyan noktası
$CA \perp AB$
$KD \perp BC$
$m(B) = 15°$
olduğuna göre $|BC|$, $|KD|$'nin kaç katıdır?



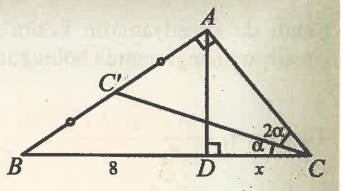
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

5.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$. $AD \perp BC$
$|AE| = |ED|$
$|AF| = |FC|$
$m(ABE) = \alpha$
$m(EBF) = \alpha$
$m(C) = \alpha$
olduğuna göre α kaçtır?



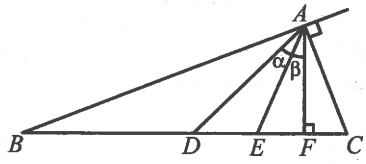
A) 15 B) 18 C) 20 **D) 22,5** E) 25

6.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$ ve $AD \perp BC$
$m(ACC') = 2\alpha$
$m(C'CB) = \alpha$
$|AC'| = |C'B|$
$|BD| = 8$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



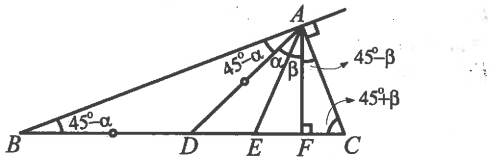
A) $\sqrt{15}-1$ B) $\sqrt{15}$ C) 4 D) $\sqrt{17}$ **E)** $\sqrt{17}-1$

Teorem 11. *Bir dik üçgenin dik köşesine ait iç açıortay, aynı köşenin kenarortayı ile yüksekliğinden oluşan açının da açıortayıdır.*



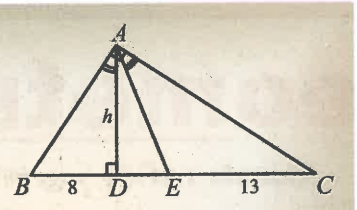
Yani, kısacası teoremin dediği şu: *Üst şekilde* $\alpha = \beta$.

Kanıt: İster daha önceki bilgilerle, aşağıdaki şekildeki gibi açı takibiyle çözün, isterseniz suya sabuna dokunmadan…



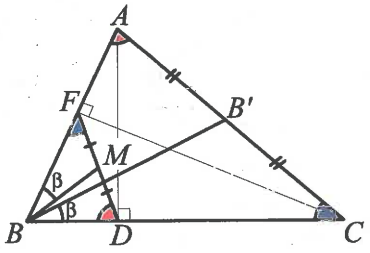
Dik üçgende dik köşeden inen yüksekliğin, dik köşeye ait simedyan olduğunu ve simedyanın da kenarortayın aynı köşeden çıkan iç açıortaya göre simetriği olduğunu tanımdan dolayı bildiğimizden, kanıt tamamlanır.

7.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$, $AD \perp BC$
$m(BAD) = m(EAC)$
$|BD| = 8$ br
$|EC| = 13$ br
$|AD| = h$ br
olduğuna göre h kaçtır?



A) 9 B) 10 C) 11 **D) 12** E) 13

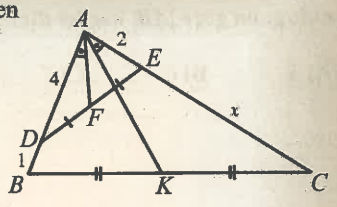
Teorem 12. *Bir üçgenin simedyanları o üçgenin ortik üçgeninin kenarlarını ortalar.*



D ve F noktaları A ve C köşelerinden indirilen dikme ayaklarıysa FD ortik üçgeninin bir kenarı ve $AFDC$ bir kiriş dörtgeni olur. Bu yüzden ABC ile DBF üçgenleri benzerdir.

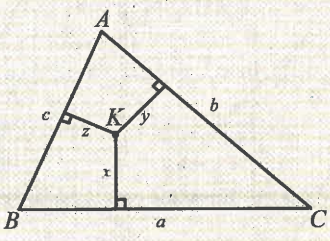
Kanıt: (i)'de kullandığımız metodu kullanacağız. ABC üçgeninde B'den çıkan kenarortay BC ile β ölçülü açı oluşturuyorsa, DBF üçgeninde de B'ye ait kenarortay BF ile β ölçülü açı oluşturmalıdır. $m(MBF) = \beta$ olduğundan DBF üçgeninde BM kenarortaydır.

8.
ABC ve ADE birer üçgen
$|DF| = |FE|$
$|BK| = |KC|$
$m(CAK) = m(FAD)$
$|EA| = 2$ br
$|AD| = 4$ br
$|DB| = 1$ br
olduğuna göre
$|EC| = x$ kaç br dir?



A) 6 B) 7 **C) 8** D) 9 E) 10

Soru. *P noktası bir üçgenin iç bölgesinde olup, üçgenin kenarlarına olan uzaklıkları x, y ve z olan ve $x^2 + y^2 + z^2$ toplamını minimum yapan nokta olsun.*



P noktasının ABC üçgeninin simedyan noktası olan K olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni bilirsiniz.

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

Sol tarafın sağ taraftan büyük veya ona eşit olmasının sebebi, sol tarafın açılımının

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$$
$$= (ax+by+cz)^2 + (bx-ay)^2 + (cy-bz)^2 + (az-cx)^2$$

olmasıdır. Simedyan Noktası'nı ilk fark eden Lemoine de hemen bu yukardaki eşitliği kullanmıştır. P nerede olursa olsun, ABC üçgeni için $a^2 + b^2 + c^2$ toplamı sabittir. Diğer yandan $ax + by + cz$ toplamı da 2Δ olduğundan o da sabittir. Bu durumda $x^2 + y^2 + z^2$ toplamının minimum olması $(bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$ toplamının minimum olmasına bağlıdır. Bu toplam da

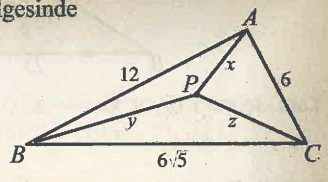
$$bx = ay,\ cy = bz \text{ ve } az = cx$$

eşitliklerinin üçünün birden sağlanması halinde minimum olur. Üçünün birden sağlanması da

$$x : y : z = a : b : c$$

olmasına bağlıdır. Bu özellik de sadece simedyan noktasına ait olduğundan P noktası, K olduğunda $x^2 + y^2 + z^2$ toplamı minimum olur.

9.
P, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir noktadır.
$|CA| = 6$ br
$|AB| = 12$ br
$|BC| = 6\sqrt{5}$ br
olduğuna göre
$x^2 + y^2 + z^2$ toplamı
en az kaç birim olabilir?



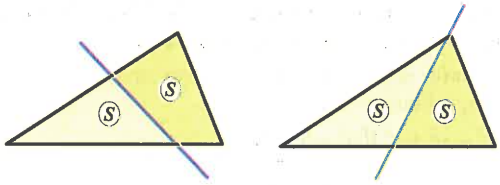
A) 90 **B) 100** C) 105 D) 110 E) 120

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

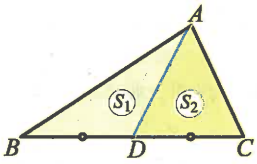
Alanortay

Nasıl ki; üçgenin bir açısını iki eş parçaya ayıran doğruya **açıortay**, bir kenarını iki eş parçaya ayıran doğruya **kenarortay** deniyor; üçgenin alanını iki eşit parçaya bölen doğruya da **alanortay** denir.



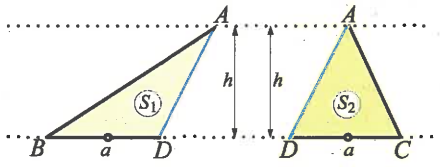
İki tür alanortay vardır: Biri üstte soldaki gibi üçgenin iki kenarını keser ve hiçbir köşeden geçmez, diğeri üstte sağdaki gibi üçgenin bir köşesinden geçer. İşte bu ikincisi, aynı zamanda kenarortaydır. Kenarortayın alanı da ikiye bölmesi, ağırlık merkeziyle ilgili çok güzel alan problemlerinin doğmasına yol açar. Bu başlıkta bu problemlere değineceğiz. Önce kenarortayın neden alanortay olduğunu izah edelim.

Teorem 1. *Kenarortay aynı zamanda alanortaydır.*



Yani, teorem diyor ki; *bir ABC üçgeninde* $|BD| = |DC|$ *ise* $|ABD| = |ADC|$ *yani* $S_1 = S_2$ *olur.*

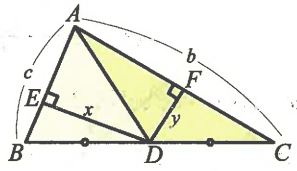
Kanıt: Kenarortayın solunda ve sağında kalan iki üçgeni birbirlerinden bir an için ayıralım.



Bu üçgenlerin hem taban uzunlukları, hem de o tabana inen yüksekliklerinin uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan alanları da birbirlerine eşittir.

Sonuç: *Kenarortay ayağının yan kenarlara uzaklıkları, yan kenarların uzunluklarıyla ters orantılıdır.*

Hemen izah edelim: $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının boyları sırasıyla c br ve b br olan bir ABC üçgeni çizelim. A'ya ait kenarortay ayağına da D diyelim. D'nin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x br ve y br olsun.

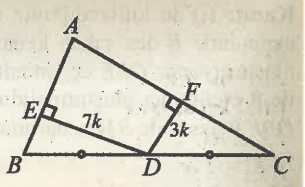


Eğer $[AD]$ kenarortaysa, $|ABD| = |ADC|$ olacağını kanıtlamıştık. O halde $cx = by$ olmalıdır ki, bu da

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

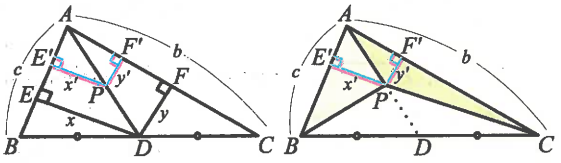
demek olur.

1.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$DE \perp AB$
$DF \perp AC$
$|DE| = 7k$ br
$|DF| = 3k$ br
$|AB| + |AC| = 20$ br
olduğuna göre $|AB|$ kaç br dir?



A) 3 **B)** 6 C) 7 D) 10 E) 14

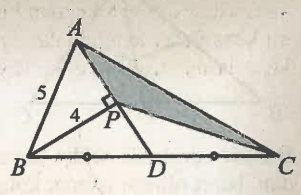
Şimdi $[AD]$ üzerinde bir P noktası alalım. P'nin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x' br ve y' br olsun.



$\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y}$ olduğundan, $cx = by$ olduğu gibi, $cx' = by'$ olur.

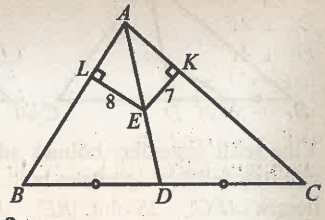
Bunun ne anlama geldiğini biliyorsunuz değil mi? Dü-pedüz, $|ABP| = |APC|$ demektir.

2.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$P \in [AD]$
$BP \perp AD$
$|BP| = 4$ br
$|AB| = 5$ br
olduğuna göre $|APC|$ kaç br^2 dir?



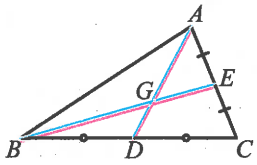
A) 3 **B) 6** C) 9 D) 12 E) 18

3.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$EK \perp AC, EL \perp AB$
$|EK| = 7$ br
$|EL| = 8$ br
$|ABC| = 672$ br^2
olduğuna göre
$|AE| : |ED|$ oranı kaçtır?



A) 7 : 8 B) 8 : 7 **C) 1** D) 49 : 64 E) 64 : 49

Şimdi, üçgenin bir kenarortayını daha çizelim bakalım, n'olacak?

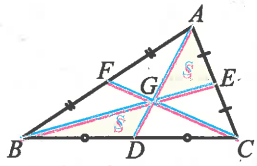


$[AD]$ ve $[BE]$ alanortay olduğundan hem ABD üçgeni hem de ABE üçgeni alan olarak ABC üçgeninin yarısıdır. Bu üçgenlerde ABG bölgesi ortak olduğundan artakalan kısımlarının alanı eşit olmalıdır. Yani sonuç olarak;

$$|AGE| = |GBD|$$

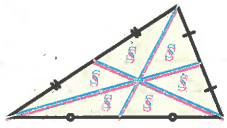
olmalıdır.

Tahmin ettiğiniz üzere, şimdi de üçüncü kenarortayı çizeceğiz. Üçüncü kenarortayın, ilk ikisinin kesiştiği G noktasından geçeceğini biliyoruz zaten.



Yukarda alanlarını eşit bulduğumuz AGE ve GBD üçgenlerinin alanlarına S diyelim. Dikkat edilecek olursa, GBC üçgeninde $[GD]$ kenarortay olduğundan GDC üçgeninin alanı da S olur. Benzer şekilde AGC üçgeninde de $[GE]$ kenarortay olduğundan, AGE üçgeninin alanı S diye GCE üçgeninin alanı da S olur. Sonuçta ADC üçgeninin alanı $3S$ oldu. O halde ABC üçgeninde $[AD]$ kenarortay diye ABD üçgeninin de alanı $3S$ olmalıdır. Şu durumda ABG üçgeninin alanı $2S$'dir. AGB üçgeninde $[GF]$ kenarortay olduğundan bu $2S$'lik alanı AFG ve GFB üçgenlerine eşit olarak dağıtacaktır. Yani AFG ve GFB üçgenlerinin de alanı S olmalıdır.

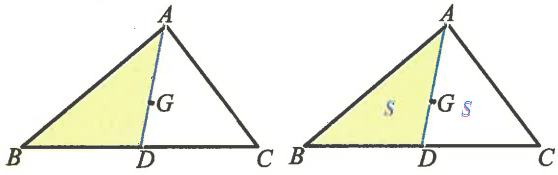
Sizin anlayacağınız, şu teoremi kanıtlamış olduk:



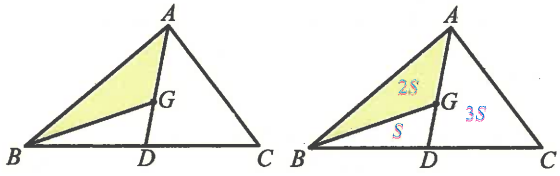
Teorem 2. *Bir üçgenin üç kenarortayının çizilmesi ile üçgenin ayrıldığı 6 parçanın alanları birbirine eşittir.*

Bu teoremi, ağırlık merkezinin kenarortayları 2 : 1 oranında bölmesini kullanarak da kanıtlayabilirdik. İşin ilginç yanı, bu metotla neden ağırlık merkezinin kenarortayları 2 : 1 oranında böldüğünü de kanıtlayabiliriz.

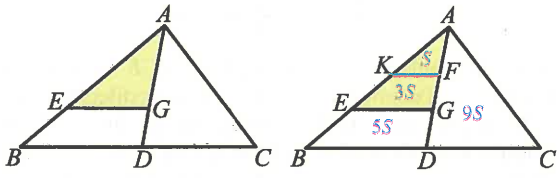
Kenarortayın alanortay görevi yapması genellikle, ağırlık merkezinin kenarortayları 2 : 1 böldüğü bilgisiyle birlikte sorulur. Bu tarz sorular, üçgende eşit aralıklarla çizilmiş paralel doğruların oluşturdukları alanların tek sayılar halinde ilerlemesi bilgisiyle çok rahat çözülür. Hani 1-3-5-7-... kuralı vardı ya, ondan bahsediyorum. Birkaç örnek verelim de ne demek istediğimizi daha iyi anlayın.



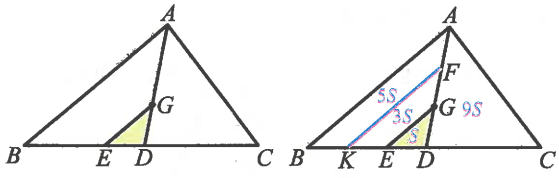
Bunun üzerine yeterince konuştuk zaten, taralı alan tüm alanın yarısıdır.



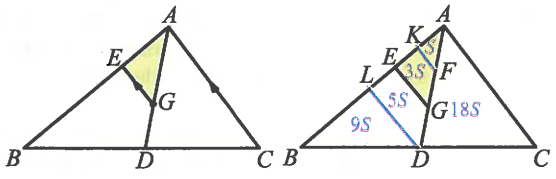
$|AG| = 2|GD|$ olduğundan $|GBD| = S$ denirse, $|ABG| = 2S$ olur. $|ABD| = |ADC|$ olduğundan, taralı talan tüm alanın 1/3'üdür.



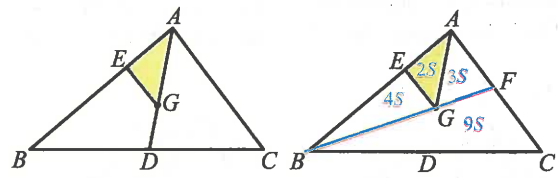
Bu soruda hemen $[AG]$'nin orta noktasından BC'ye paralel çiziyoruz. 1-3-5-7-... kuralından alanlar yerleştirilirse taralı alanın tüm alanın 2/9'u olduğu görülür.



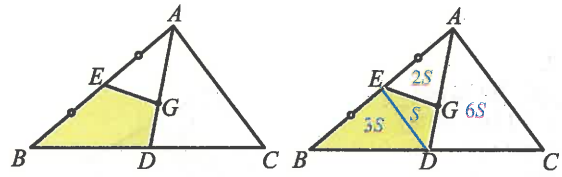
Bu sefer $[AG]$'nin orta noktasından AB'ye paralel çiziyoruz. 1-3-5-7-... kuralı gereğince alanlar yazılırsa, taralı alanın toplam alanın 1/18'i olduğu anlaşılır.



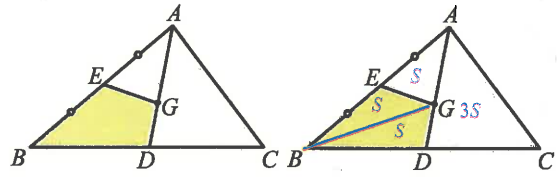
Bu soruda hem $[AG]$'nin ortasından hem de D'den GE'ye paralel çizeceğiz. $GE \,//\, CA$ olduğundan, çizdiğimiz $[DL]$ de CA'ya paralel olur. $[DL]$'nin ABC üçgeninin bir orta tabanı olduğunu görürseniz, çözüm biter.



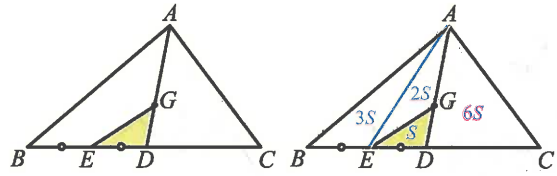
Bu soruyu şöyle de çözebilirdik: $[BF]$ kenarortayı çizilirse, Tales Teoremi gereği $|BE| = 2|EA|$ olduğu anlaşılır. O halde $|AEG| = 2S$ dersek, $|EBG| = 4S$ olur. $|BG| = 2|GF|$ olduğundan $|AGF| = 3S$ olmalıdır. Zaten $|BFC| = |ABF|$ olduğundan, tüm alan taralı alanın 9 katı çıkar.



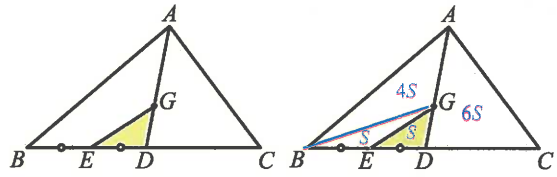
Bu tarz sorularda şeklin tamamen üçgen veya yamuklardan ibaret olması işimizi kolaylaştırır. Bu sebeple hemen $[DE]$'yi çizelim. $|EDG| = S$ dedikten sonra $|AG| = 2|GD|$ eşitliğini kullanırsanız gerisi çorap söküğü gibi gelir.



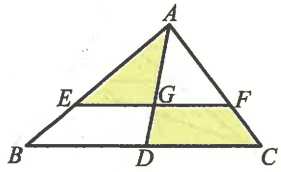
Bu soruda, şekli üçgenlere parçalamak adına, $[BG]$'yi de çizebilirdiniz. $|BGD| = S$ denirse $|ABG| = 2S$, $|ADC| = 3S$ olacaktır. Gerisi toplayıp bölmek...

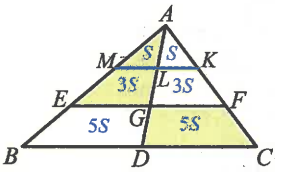


Yine şekli üçgenlere bölmek adına $[AE]$'yi çizelim. Gözümüze en küçük görünen bölge olan EGD'nin alanına S dersek $|AEG| = 2S$ olur. $|BE| = |BD|$ olduğundan ABE'nin alanı, AEB'nin alanına eşit olacaktır. Gerisi kolay.

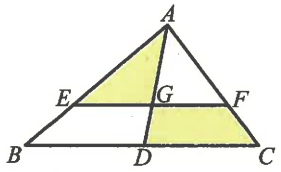


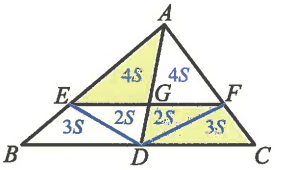
$[AE]$ yerine, $[BG]$ de tercih edilebilir. $[BG]$ çizilirse BGD üçgeninde $[GE]$ alanortay olacaktır. $|AG| = 2|GD|$ olmasından dolayı diğer alanlar da rahatlıkla bulunabilir.



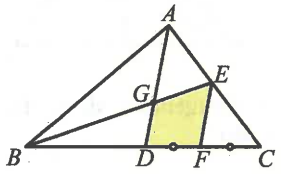


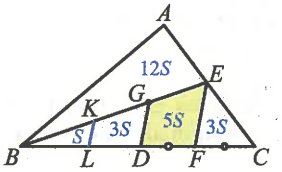
Bu soruda taralı alanların toplamının tüm alanın kaçta kaçı olduğu sorulmakta... $[AE]$'nin orta noktasından BC'ye bir paralel çizersek gerisini bizim yerimize 1-3-5-7-... kuralı halleder. $[AD]$ alanortay olduğundan soldaki alanların sağdakilerle simetrik olduğuna dikkat ediniz.



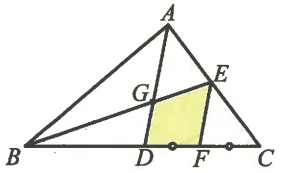


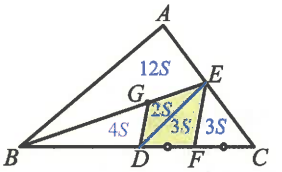
Ben 1-3-5-7-... kuralını bir türlü göremiyorum diyenler üzülmesin, çok fazla çözüm yolu var. $[DE]$ ve $[DF]$ çizilerek şekil üçgen parsellere ayrılırsa, $|AG| = 2|GD|$ olmasından dolayı alanlar rahatlıkla bulunabilir.



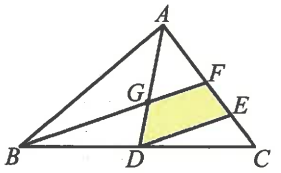


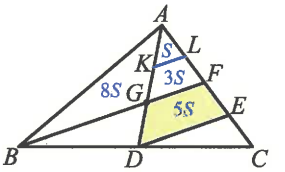
$[BD]$'nin orta noktasından GD'ye bir paralel çizelim. $[LK]$, $[DG]$ ve $[FE]$'nin eşit aralıklar çizilmiş paraleller olduğunu görürseniz yeter. 1-3-5-7-... kuralından EBF üçgenindeki alanlar yazılırsa, $|BF| = 3|FC|$ eşitliğini kullanarak $|EFC| = 3S$ bulunur. Bu soru da böylelikle biter!





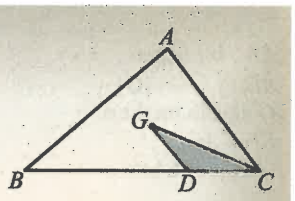
1-3-5-7-... kuralını unutan çocuğu biz unutmayalım, ona bir çözüm daha gösterelim. $[DE]$'yi çizip $|GDE| = 2S$ denirse $|GBD| = 4S$ olur. $|BD| = |DC|$ diye $|EBD| = |EDC|$ olmalıdır. Bu yüzden $|EDF| = |EFC| = 3S$ olur. O halde taralı alan, toplam alanın 5/24'üdür.





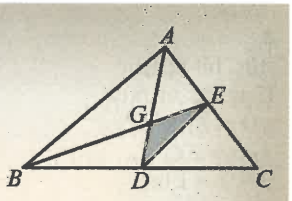
$[AG]$'nin ortasından $[KL]$ orta tabanı çizilirse S-$3S$-$5S$ hemen yazılabilir. $|BG| = 2\cdot|GF|$ diye $|ABG| = 8S$ olur. O halde $|ABC| = 24S$ olduğundan taralı alan 5/24'üdür.

4.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GD \,//\, AC$
$|GDC| = 3$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



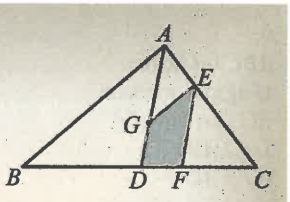
A) 18 B) 21 C) 27 D) 36 E) 48

5.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$|EGD| = 9$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 108 B) 99 C) 90 D) 81 E) 72

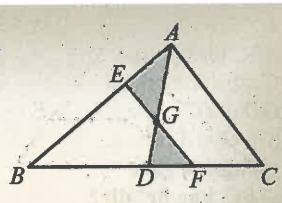
6.
ABC bir üçgen
A, G, D doğrudaş
G ağırlık merkezi
$GE \,//\, BA$
$EF \,//\, AD$



olduğuna göre taralı $GDFE$ dörtgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının kaçta kaçıdır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{11}{18}$ C) $\frac{5}{27}$ D) $\frac{11}{54}$ E) $\frac{8}{81}$

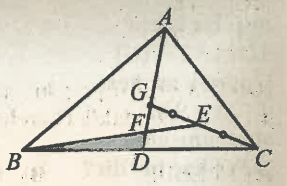
7.
ABC bir üçgen
$AD \cap EF = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$EF \,//\, AC$
$|ABC| = 96$ br^2



olduğuna göre taralı AEG ve GDF üçgenlerinin alanları toplamı kaç br^2 dir?

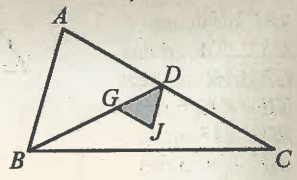
A) 12 **B) 16** C) 18 D) 20 E) 24

8.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$AD \cap BE = \{F\}$
$|GE| = |EC|$
$|FBD| = 1$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 12 B) 15 **C) 18** D) 21 E) 24

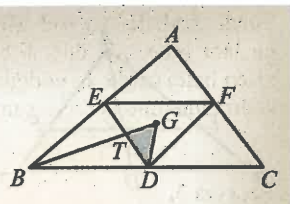
9.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$BG \cap AC = \{D\}$
$DJ \,//\, AB$
$GJ \,//\, AC$



olduğuna göre taralı DGJ üçgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının kaçta kaçıdır?

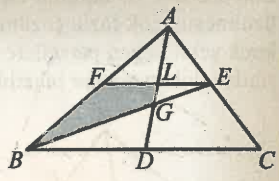
A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{9}$

10.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
D, E, F orta noktalar
$BG \cap DE = \{T\}$
$|GTD| = 3$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 42 B) 48 C) 56 D) 64 **E) 72**

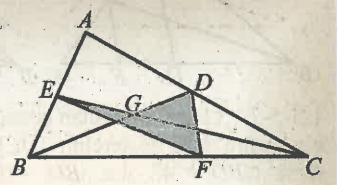
11.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$EF \cap AD = \{L\}$
$FE \,//\, BG$



olduğuna göre taralı $FBGL$ dörtgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının kaçta kaçıdır?

A) $\frac{5}{27}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{7}{18}$ **D)** $\frac{5}{24}$ E) $\frac{7}{24}$

12.
ABC bir üçgen
$BD \cap CE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$F \in [BC]$
$|EFDG| = 6$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?

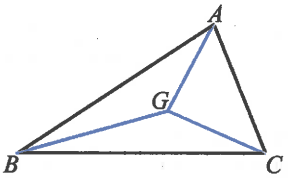


A) 18 B) 24 C) 30 **D) 36** E) 72

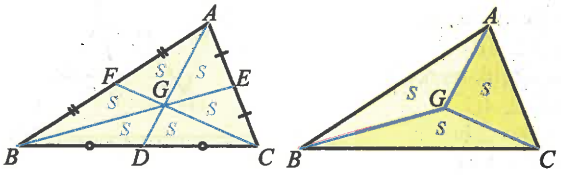
Şimdi, fevkalade güzel işler halleden ve çok güzel sonuçlara gebe, çok önemli bir teorem vereceğiz. Aslında zaten halihazırda da bildiğiniz bir teorem. Sadece nelere kadir olduğunu bilmiyorsunuz, o kadar☺

Teorem 3. *Bir üçgenin ağırlık merkezini üçgenin köşelerine birleştiren doğrular, üçgeni eşit alanlı 3 parçaya ayırır.*

Yani, teorem diyor ki;
Yandaki ABC üçgeninde G ağırlık merkeziyse $|GAB| = |GBC| = |GCA|$.

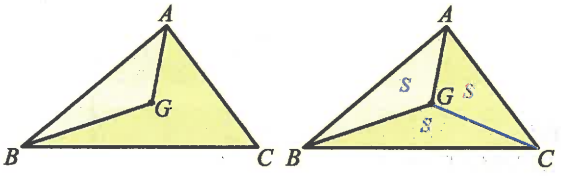


Kanıt: Bir ABC üçgeninin AD, BE, CF kenarortaylarını çizdiğimizde oluşan 6 küçük üçgenciğin eş alanlı olduklarını kanıtlamıştık.

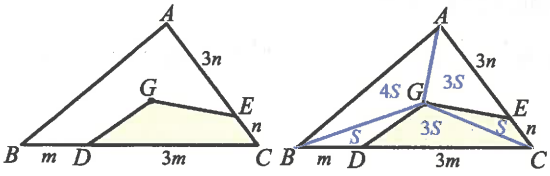


Bu üç kenarortayın kısa parçalarını silersek, (üst sol şekildeki $[GD]$, $[GE]$, $[GF]$ silinirse) meydana çıkan GAB, GBC, GCA üçgenlerinin eşit alanlı oldukları görülür.

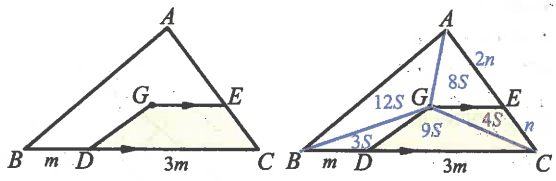
Şimdi bu teoremle alakalı birkaç örnek çözeceğiz.



$GBCA$ dörtgeninin alanının GAB üçgeninin alanının kaç katı olduğu sorulduğunu farz edelim. $[CG]$ çizilirse GAB, GBC, GCA üçgenleri eşit alanlı olacağından cevabımız 2 olmalıdır.

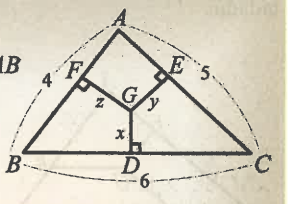


Bu sefer taralı bölgenin alanının, ABC üçgeninin alanının kaçta kaçı olduğu sorulmakta... Derhal $[GA]$ ve $[GB]$ çizilecek. GAB, GBC, GCA üçgenlerinin her birinin alanına $4S$ denir ve uygun şekilde paylaştırılırsa, cevabın 1/3 olduğu görülür.



A'dan inen kenarortay (akıldan) çizilirse Tales teoremi gereği $|AE| = 2|EC|$ olmalıdır. $[GA]$ ve $[GB]$ çizilirse, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarları sırasıyla 4 parça ve 3 parçadan oluştuğundan GAB, GBC, GCA üçgenlerinin her birinin alanına bu parça sayılarının OKEK'i olan $12S$ denirse, gerisi çorap söküğü gibi gelir.

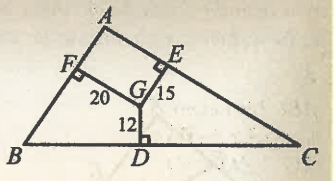
13.
ABC bir üçgen
$GD \perp BC$, $GE \perp CA$, $GF \perp AB$
G ağırlık merkezi
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 6$ br
$|CA| = 5$ br



$|GD| = x$ br, $|GE| = y$ br ve $|GF| = z$ br olduğuna göre $x : y : z$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15:12:10 **B)** 10:12:15 C) 12:10:15 D) 4:5:6 E) 6:5:4

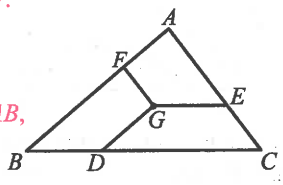
14.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GD \perp BC$
$GE \perp CA$
$GF \perp AB$
$|GD| = 12$ birim
$|GE| = 15$ birim
$|GF| = 20$ birim
olduğuna göre $|BC|$ kaç birimdir?



A) 45 B) 60 C) 64 D) 72 **E)** 75

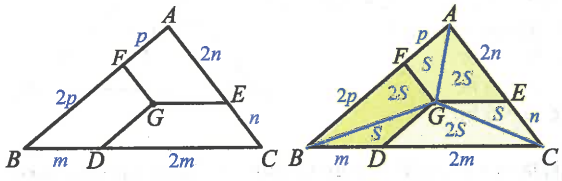
Sonuç 4: *Bir üçgenin ağırlık merkezinden, üçgenin üç kenarına da pozitif yönde paralel doğrular çizilirse, oluşan yamuklar eşit alanlı olur.*

Yani, teorem diyor ki,
Yandaki ABC üçgeninde
G ağırlık merkezi ve GD // AB,
GE // BC, GF // CA ise



$|GFBD| = |GDCE| = |GEAF|$.

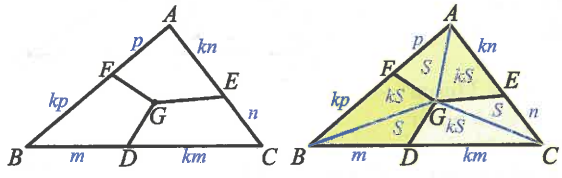
Bunun ardında yatan temel sebep, ağırlık merkezinden herhangi bir kenara paralel olarak çizilen doğrunun kestiği kenarları hep aynı oranda (2 : 1) kesmesidir. Üç kenarortayı da çizer, Tales teoremi düşünürseniz sebebi ortadadır.



Daha sonra G noktası köşelere birleştirilir ve GAB, GBC, GCA üçgenlerinin alanlarına $3S$ denirse, tabanlar oranından tüm üçgenlerin alanları rahatlıkla bulunur. Sağdaki şekilden de görüyor ki yamukların hepsinin alanı $3S$ olduğundan, alanları birbirlerine eşittir.

Yamuklarının alanlarının birbirlerine eşit çıkmasının, dediğimiz gibi, paralel çizilmesiyle alakası yoktur. Çizilen paralellerin üçgenin üç kenarını da aynı oranda bölmesidir temel neden. O halde şu yorum da yapılabilir:

Bir üçgenin üç kenarı üzerinde, bulundukları kenarları aynı oranda bölen birer nokta alınırsa, bu noktaların G ile birleştirilmesiyle oluşan üç dörtgen de eşit alanlıdır.

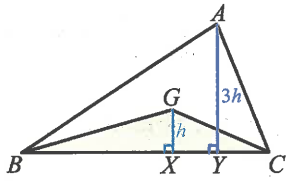


$[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ üzerinde alınan noktalar sırasıyla D, E ve F olsun. Bu noktaların, üzerinde bulundukları kenarları $1 : k$ oranında böldüğünü farz edelim. G noktasını köşelere birleştirip üçgenlerin alanlarını tabanları oranında paylaştırırsak, $GFBD$, $GDCE$ ve $GEAF$ dörtgenlerinin her birinin alanının $(1 + k)S$ olup alan olarak birbirlerine eşit oldukları anlaşılır.

Gördüğümüz bu son teoremin çok hoş bir sonucu var:

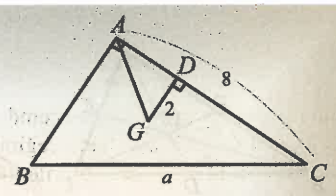
Sonuç 5: *Bir üçgende ağırlık merkezinin herhangi bir kenara olan uzaklığı, o kenara inen yüksekliğin boyunun üçte biridir.*

Hemen izah edelim:



Örneğin, G'nin $[BC]$'ye uzaklığını ele alalım. GBC üçgeninin alanının ABC üçgeninin alanının üçte biri olduğunu öğrenmiştik. Dikkat ederseniz, bu iki üçgenin $[BC]$ tabanları ortak. O halde alanları oranını 1 : 3 yapan şey, yükseklikleri oranının 1 : 3 olmasıdır. Yani, üstteki şekle göre $|GX| = h$ br dersek, $|AY| = 3h$ br olur.

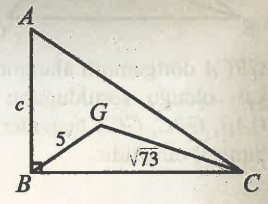
15.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$GD \perp AC$
$|GD| = 2$ br
$|AC| = 8$ br



olduğuna göre $|BC| = a$ kaç br dir?

A) 9 **B)** 10 C) 12 D) 15 E) 17

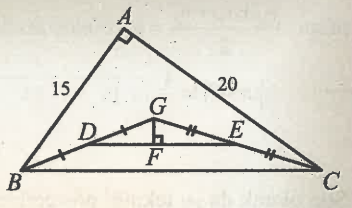
16.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
G ağırlık merkezi
$|GB| = 5$ br
$|GC| = \sqrt{73}$ br
$|AB| = c$ br



olduğuna göre c kaçtır?

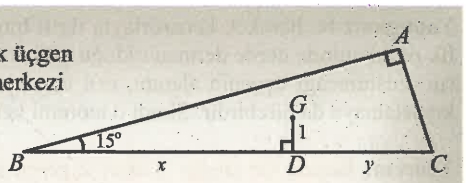
A) 9 B) 10 C) 11 **D)** 12 E) 13

17.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$|BD| = |DG|$
$|GE| = |EC|$
$GF \perp DE$
$|AB| = 15$ br
$|AC| = 20$ br
olduğuna göre $|GF|$ kaç birimdir?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

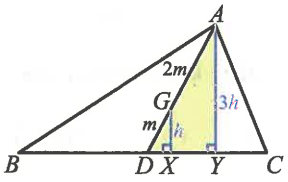
19.
ABC bir dik üçgen
G ağırlık merkezi
$m(B) = 15°$
$CA \perp AB$
$GD \perp BC$
$|GD| = 1$ br
olup $|BD| = x$ br ve $|DC| = y$ br olduğuna göre xy çarpımı kaçtır?



A) 32 B) 33 C) 34 D) 35 E) 36

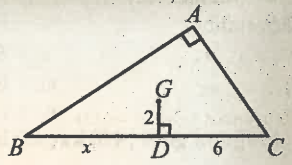
Şimdi, son öğrendiğimiz teoremden çıkan sonucu başka türlü kanıtlayacağız. Göstereceğimiz bu metot bize, ağırlık merkezinden kenara indirilen dikmenin kenarı hangi oranda böldüğü üzerine sorulan soruların çözümünde yarar sağlayacak.

G'den geçmesi gereken [*AD*] kenarortayını çizelim.



GDX ile *ADY* üçgenlerinin benzerliği aşikar. $|DG| = m$ br olsun dersek $|GA| = 2m$ br, dolayısıyla $|DA| = 3m$ br olur. Bu da benzerlik oranının 1 : 3 olduğunu anlatır ki; $|GX| = h$ br ise $|AY| = 3h$ br olduğu kanıtlanmış olur.

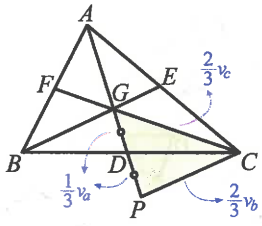
18.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
G ağırlık merkezi
$GD \perp BC$
$|GD| = 2$ br
$|DC| = 6$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ kaç br dir?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Kenarortaylardan Üçgen Olur Mu? Daha önce bir üçgenin üç yüksekliğinin ve üç iç açıortayının her zaman üçgen belirtecek uzunluklarda olmadıklarını kanıtlamıştık. Hatta belirtmeleri için sağlaması gereken koşulları da vermiştik. Şimdi kenarortayların bir üçgen belirtip belirtmediğine geldiğine sıra... Fazla merakta bırakmayalım: *Bir üçgenin kenarortayları daima üçgen oluşturabilecek niteliktedir.*

Sebebini merak edenler için, hemen [*AD*], [*BE*], [*CF*] kenarortayları çizilmiş bir *ABC* üçgeni çizelim. [*AD*] kenarortayını *D* yönünde $|GD|$ kadar uzatalım.



Üst şekildeki *GPC* üçgeninin kenar uzunluklarına odaklanıyoruz.

$$|GP| = \frac{2}{3}v_a$$

$$|PC| = \frac{2}{3}v_b$$

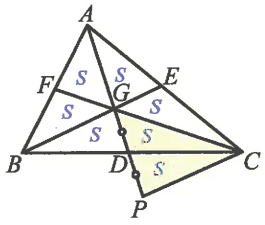
$$|CG| = \frac{2}{3}v_c$$

olduğunu görüyoruz. v_a, v_b, v_c değerlerinin 2/3 katları üçgen oluşturuyorsa, kendileri de elbet oluşturacaktır.

Yaptığımız bu hareket, kenarortayla ilgili birçok eşitsizlik probleminde derde derman olduğu gibi, kenarortayların oluşturacağı üçgenin alanını, asıl üçgeninin alanıyla kıyaslamaya da birebirdir. Şimdi o teoremi verelim:

Teorem. *Kenarortaylardan oluşan üçgenin alanı, orijinal üçgenin 3/4'üdür.*

Kanıt: Bir üçgenin üç kenarortayı çizildiğinde oluşan 6 üçgenciğin eşit alanlı olduğunu kanıtlamıştık. Her birinin alanına S diyelim.

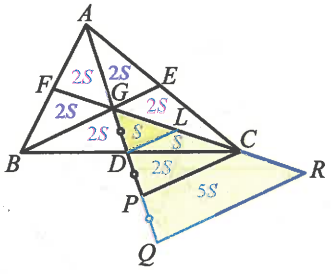


Üst şekilden de görülüyor ki, taralı alan ABC üçgeninin alanının üçte biridir. Kenar uzunlukları v_a, v_b, v_c olan üçgen, kenar uzunlukları $2v_a/3$, $2v_b/3$, $2v_c/3$ olan üçgenin benzerlik olarak 3/2 katı olacağından alan olarak 9/4 katı yani $9S/2$ alana sahip olmalıdır. Bu da alanının $|ABC|$'nin 3/4'ü olduğu anlamına gelir.

Şu kanıtı daha çok beğeneceğinize eminim:

GPC üçgeninin $[GP]$ ve $[GC]$ kenarlarını sırasıyla P ve C yönünde kenarların yarısı kadar uzatırsak, oluşacak GQR üçgeninin kenar uzunlukları, ABC üçgeninin kenarortay uzunlukları kadar olur

.



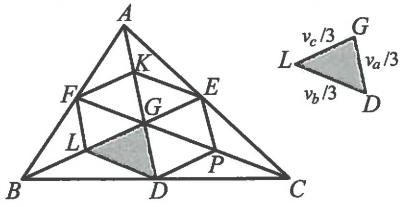
D noktasını $[CG]$'nin orta noktası olan L noktasına birleştirelim. GDL üçgeninin kenar uzunluklarının, ABC üçgeninin kenarortay uzunluklarının üçte biri olduğu aşikardır. O üçgenin alanına S dersek, ABC üçgeninin alanı $12S$ çıkmakta, kenarortaylardan oluşan GQR üçgeninin alanıysa $9S$ çıkmaktadır. Bu da oranın 3/4 olduğunu kanıtlar.

Kenarortaylardan oluşan üçgenin üç kenar uzunluğu da belli diye alanı Heron formülünden rahatça bulunabilir. Diğer yandan ABC üçgeninin alanı da bu üçgenin alanının 4/3 katı olduğundan, dileyen, bu teoremi şöyle formülleştirebilir:

Kenarortay uzunlukları v_a, v_b, v_c olan bir ABC üçgeninin alanı; $\frac{v_a+v_b+v_c}{2}=u_v$ olmak üzere

$$|ABC|=\frac{4}{3}\sqrt{u_v(u_v-v_a)(u_v-v_b)(u_v-v_c)}\,.$$

Son olarak da şu tekniği gösterelim: Kenarortay ayakları olan D, E, F noktalarını, $[GA]$, $[GB]$, $[GC]$ doğru parçalarının orta noktalarına birleştirirsek, ABC üçgeni eşit alanlı 12 üçgene ayrılmış olur.



GLD üçgenine dikkat ederseniz, kenar uzunlukları ABC üçgeninin kenarortay uzunluklarının üçte biridir. Bu üçgenin 3 katı ABC üçgeninin 12 parçasının 9'u edeceğinden, aranılan oranın 3/4 olduğu anlaşılır.

20.
ABC, kenarortay uzunlukları v_a, v_b ve v_c birim olan bir üçgendir.

$v_a = 5$ br
$v_b = 6$ br
$v_c = 7$ br

olduğuna göre $|ABC|$ kaç birimkaredir?

A) 6 B) $6\sqrt{6}$ C) 8 **D)** $8\sqrt{6}$ E) $9\sqrt{6}$

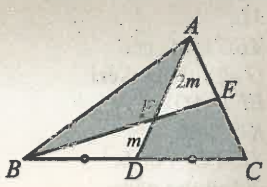
21.
ABC, kenarortay uzunlukları v_a, v_b ve v_c birim olan bir üçgendir.

$v_a = 9$ br
$v_b = 12$ br
$v_c = 15$ br

olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

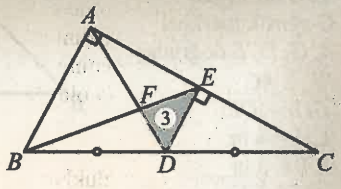
22.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$|BD| = |DC|$
$|AF| = 2m$ br
$|FD| = m$ br



olduğuna göre taralı alanlar toplamı, ABC üçgeninin alanının kaçta kaçıdır?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

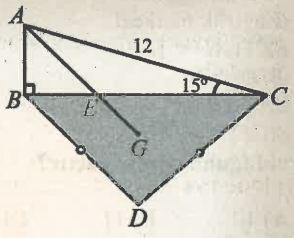
23.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC|$
$AD \cap BE = \{F\}$
$DE \perp AC$
$|DEF| = 3$ br^2



olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?

A) 24 B) 30 **C)** 36 D) 40 E) 48

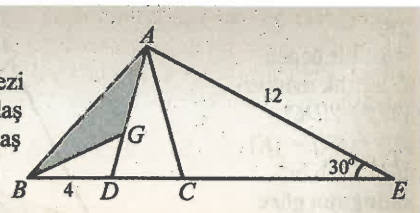
24.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|AC| = 12$ br
$AG \cap BC = \{E\}$
$|AE| = 2 \cdot |EG|$
$m(BCA) = 15°$



***G* noktası *BDC* üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olduğuna göre $|BDC|$ kaç br^2 dir?**

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 **E)** 27

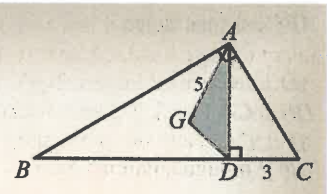
25.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
A, G, D doğrudaş
D, C, E doğrudaş
$m(E) = 30°$
$|BD| = 4$ br
$|AE| = 12$ br



olduğuna göre $|ABG|$ kaç br^2 dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

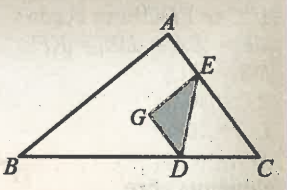
26.
ABC bir dik üçgen
G ağırlık merkezi
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AG| = 5$ br
$|DC| = 3$ br



olduğuna göre $|AGD|$ kaç br^2'dir?

A) 30 B) 42 **C)** 45 D) 48 E) 51

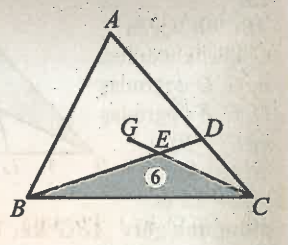
27.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GE \,//\, AB$
$GD \,//\, AC$
$|ABC| = 72$ br^2



olduğuna göre taralı *GDE* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

A) 6 **B)** 8 C) 9 D) 10 E) 12

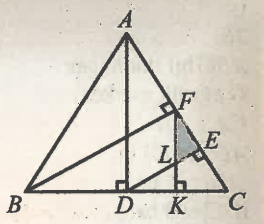
28.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$|AD| = 2|DC|$
$BD \cap CG = \{E\}$
$|EBC| = 6$ br^2
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

29.
ABC eşkenar üçgen

$AD \perp BC$
$DE \perp CA$
$BF \perp CA$
$FK \perp BC$

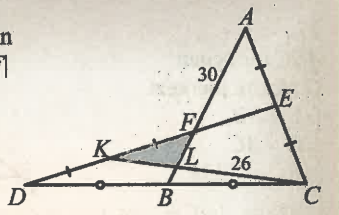


olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı, EFL üçgensel bölgesinin alanının kaç katıdır?

A) 36 B) 32 C) 28 D) 24 E) 12

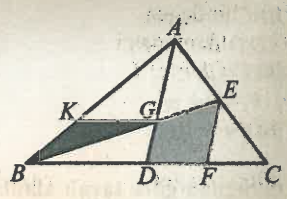
30.
ABC ve EDC birer üçgen
$|CE| = |EA| = |DK| = |KF|$
$|DB| = |BC|$
$|AF| = 30$ br
$|LC| = 26$ br

olduğuna göre
$|FKL|$ kaç br^2 dir?



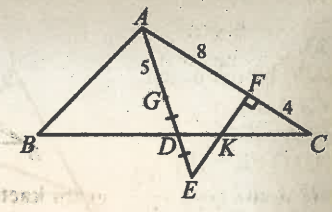
A) 60 B) 64 C) 72 D) 78 E) 120

31.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$EF \,//\, AD$
$KG \,//\, BC$
$|GDFE| = 60$ br^2
olduğuna göre
$|KBG|$ kaç br^2 dir?



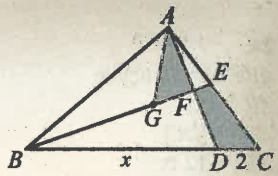
A) 48 B) 42 C) 36 **D) 32** E) 30

32.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
A, G, D, E doğrudaş
$EF \perp AC$
$|GD| = |DE|$
$|CF| = 4$ br
$|FA| = 8$ br
$|AG| = 5$ br
olduğuna göre $|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 36 B) 42 C) 48 **D) 54** E) 60

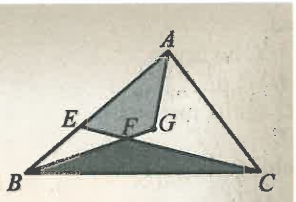
33.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$BE \cap AD = \{F\}$
$|BD| = x$ br
$|DC| = 2$ br
$|AGF| = |FDCE|$
olduğuna göre x kaçtır?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

34.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$BG \cap CE = \{F\}$

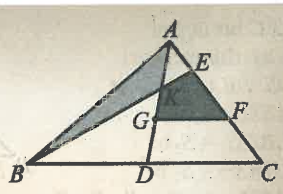
$|AEFG| = |FBC|$



olduğuna göre $\frac{|AE|}{|EB|}$ **oranı kaçtır?**

A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

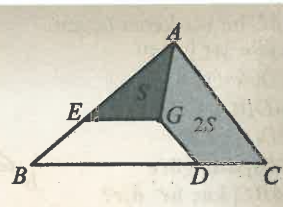
35.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GF \parallel BC$
$BE \cap AD = \{K\}$
$|ABK| = |KGFE|$



olduğuna göre $\frac{|AE|}{|EF|}$ **oranı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

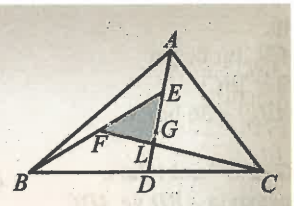
36.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GE \parallel BC$
$GD \parallel AC$
$|AGDC| = 2 \cdot |AEG|$



olduğuna göre $\frac{|AE|}{|EB|}$ **oranı kaçtır?**

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 2

37.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
A, E, G, D doğrudaş
$|AE| = |EG|$
$|BF| = |FE|$
$AD \cap CF = \{L\}$

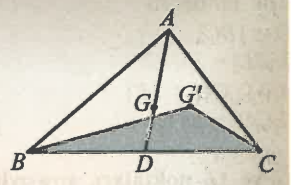


olduğuna göre taralı EFL üçgensel bölgesinin alanı ABC üçgensel bölgesinin alanının kaçta kaçıdır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{4}{11}$ **D)** $\frac{2}{13}$ E) $\frac{4}{13}$

38.
ABC bir üçgen
G ağırlık merkezi
$AG \cap BC = \{D\}$

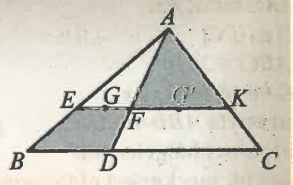
$|ABC| = 24$ br^2



G', ADC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olduğuna göre $|G'BC|$ kaç br^2 dir?

A) 6 **B) 8** C) 10 D) 12 E) 15

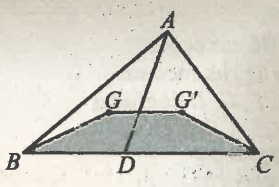
39.
ABC bir üçgen
$|BC| = 3 \cdot |BD|$
$GG' \cap AB = \{E\}$
$GG' \cap AC = \{K\}$
$AD \cap EK = \{F\}$



ABD ve ADC üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezleri sırasıyla G ve G' olduğuna göre taralı bölgelerin alanları oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{4}{7}$ **B)** $\frac{5}{8}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{5}{6}$

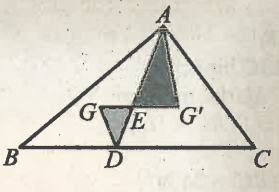
40.
$|ABC|$ bir üçgen
$D \in]BC[$
$|ABC| = 36$ br^2



G ve G' noktaları, sırasıyla ABD ve ADC üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezleri olduğuna göre $|GBCG'|$ kaç br^2 dir?

A) 12 B) 14 C) 15 **D) 16** E) 18

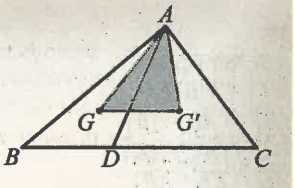
41.
$|ABC|$ bir üçgen
$D \in [BC]$
$5 \cdot |BD| = 3 \cdot |DC|$
$AD \cap GG' = \{E\}$
$|EGD| = 15$ br^2



G ve G' noktaları, sırasıyla ABD ve ADC üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezleri olduğuna göre $|AEG'|$ kaç br^2 dir?

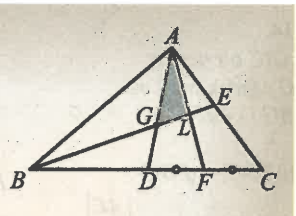
A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

42.
$|ABC|$ bir üçgen
$D \in]BC[$
$|ABC| = 36$ br^2
G ve G' noktaları, sırasıyla ABD ve ADC üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezleri olduğuna göre $|AGG'|$ kaç br^2 dir?



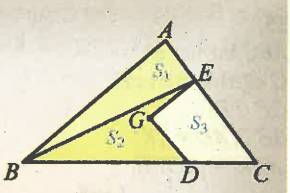
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

43.
$|ABC|$ bir üçgen
$AD \cap BE = \{G\}$
G ağırlık merkezi
$|DF| = |FC|$
olduğuna göre
$\frac{|AGL|}{|ABC|}$ **oranı kaçtır?**



A) $\frac{1}{13}$ **B)** $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{17}$

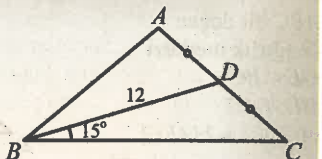
44.
$|ABC|$ bir üçgen
G ağırlık merkezi
$GE \,//\, BA$, $GD \,//\, AC$
$|ABE| = S_1$ br^2
$|EBDG| = S_2$ br^2
$|GDCE| = S_3$ br^2



olduğuna göre S_1, S_2, S_3 arasındaki sıralama hangi şıkta doğru verilmiştir?

A) $S_1 = S_2 = S_3$ B) $S_1 = S_2 < S_3$ C) $S_1 < S_2 = S_3$
D) $S_1 < S_2 < S_3$ E) $S_1 < S_3 = S_2$

45.
$|ABC|$ bir ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$
$|AD| = |DC|$
$m(DBC) = 15°$
$|BD| = 12$ br
olduğuna göre
$|ABC|$ kaç br^2 dir?



A) 24 B) 36 C) 42 **D) 48** E) 54

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üçgen Eşitsizliği

Üçgenin tanımını hatırlayarak derse başlayalım:

A, *B*, *C* doğrusal olmayan üç nokta olduğunda, [*AB*], [*AC*] ve [*BC*]'nin birleşimine ***ABC* üçgeni** denirdi.

Bir an için üçgeni oluşturan doğru parçalarını birer kibrit çöpü gibi düşünün. Üçgenin oluşması için, kibrit çöplerinin sadece uçlarının birbirine değmesi gerektiğini anlıyoruz. Sadece ''uçları'' birbirine değecek. Peki –boyları ne olursa olsun– her üç kibrit çöpüyle bunu yapmak mümkün müdür?

Tabii ki hayır!



Örneğin, yukarda soldaki üç kibrit çöpüyle bunu yapmak mümkündür ama sağdaki üç kibrit çöpüyle üçgen yapılamaz. En alttaki kibrit çöpü bu iş için fazla uzun!

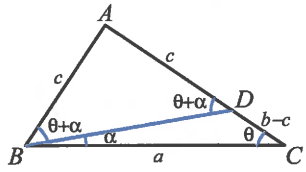
İşte bu derste, üç doğru parçasının üçgen oluşturma şartını araştıracağız. Eğer oluşturamıyorlarsa hangisinde ne kadar bir değişiklik gerekir? O değişiklik yapıldı diyelim, herhangi ikisinin boyunu sabit tutarak aralarını açtığımızda üçüncü kibrit hala iş görür mü, yoksa ondan daha uzun veya daha kısa bir kibrite mi ihtiyaç duyarız? Uzunsa ne kadar uzun, kısaysa ne kadar kısa?

İşte bu gibi sorulara cevaplar arayacağız. Hatta daha da kurcalayacağız. Önce çok önemli bir teoremle başlıyoruz. Bunu iyi anlayın, ilerde çokça karşılaşacaksınız.

Teorem. *Bir üçgende en uzun kenarın karşısında en büyük ölçülü açı, ortanca kenarın karşısında ortanca ölçülü açı, en kısa kenarın karşısında en küçük ölçülü açı vardır.*

Yani; $a > b > c$ *ise* $m(A) > m(B) > m(C)$'dir.

Kanıt: $a > b > c$ olacak şekilde bir *ABC* üçgeni çizelim. $m(C) = \theta$ olsun. İlk etapta $m(B) > m(C)$ yani $m(B) > \theta$ olduğunu göstereceğiz.



[*AC*] kenarı üzerinde $|AB| = |AD|$ olacak şekilde bir *D* noktası alalım. Ya böyle bir nokta yoksa diye bir soru aklınıza geldiyse, söyleyeyim, $|AC| > |AB|$ olduğundan bunu her zaman yapabiliriz. Şimdi $m(CBD) = \alpha$ diyelim.

$$m(BDA) = m(ABD) = \theta + \alpha$$

olur. Oluşan şekle göre $m(B) = \theta + 2\alpha$ ve $m(C) = \theta$ olur. $\alpha > 0$ olduğundan $m(B) > m(C)$ diyebiliriz.

Benzer şekilde [*CB*] üzerinde $|CE| = |CA|$ olacak şekilde bir *E* noktası alıp $m(A) > m(B)$ olduğu da kanıtlanabilir. O halde kanıt bitti.

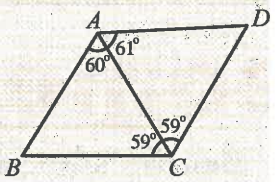
Sonuç: Bir üçgenin iç açı ölçüleri toplamı 180° olduğundan, eğer açılarından biri geniş açıysa, o açı kesinlikle en büyük açıdır. O halde, üçgen geniş açılı ise geniş açının karşısındaki kenar kesinlikle en uzun kenardır. Bu sebepten dolayı bir dik üçgende en uzun kenar daima hipotenüstür.

1.
Bir üçgende iki açı arasında büyüklük bakımından nasıl bir bağıntı varsa karşılarındaki kenarların uzunlukları arasında da aynı bağıntı vardır.
Yukardaki teoremin hipotez ve hükmü aşağıdakilerden hangisidir?

A) Hipotez: $m(B) + m(C) > 90°$, Hüküm: $m(A) < 90°$
B) Hipotez: $m(B) + m(C) > m(A)$, Hüküm: $b + c > a$
C) Hipotez: $m(A) > m(B)$, Hüküm: $a < b$
D) Hipotez: $a > b$, Hüküm: $m(A) > m(B)$
E) Hipotez: $m(B) > m(C)$, Hüküm: $b > c$

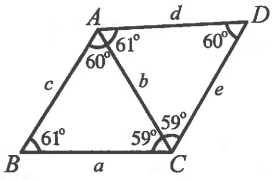
1975 ÜSS

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
[AC] köşegen
$m(BCA) = 59°$
$m(ACD) = 59°$
$m(CAB) = 60°$
$m(CAD) = 61°$
olduğuna göre aşağıdaki kenarlardan hangisi en uzundur?



A) $[AB]$ B) $[BC]$ C) $[CA]$ D) $[AD]$ E) $[CD]$

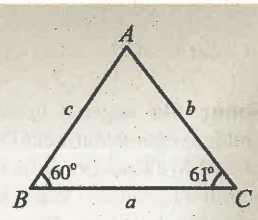
Çözüm: $|BC| = a$ br, $|CA| = b$ br, $|AB| = c$ br, $|AD| = d$ br ve $|CD| = e$ br olsun.



ABC üçgeninde açı ölçülerine göre
$$c < a < b,$$
ACD üçgenindeki açı ölçülerine göre de
$$d < b < e$$
olmalıdır. İki eşitsizlik birlikte düşünülürse, en büyüğün e olduğu görülür. Dolayısıyla en uzun kenar $[CD]$'dir.

Doğru cevap: E.

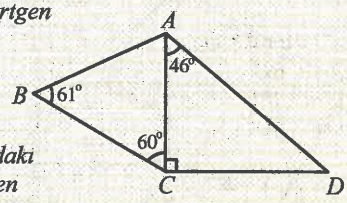
2.
ABC bir üçgen
$m(B) = 60°$
$m(C) = 61°$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br



olduğuna göre $a + b$, $b + c$ ve $c + a$ değerlerinin küçükten büyüğe sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

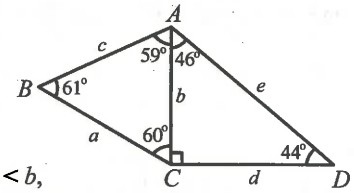
A) $b + c < a + b < c + a$ B) $a + b < c + a < b + c$
C) $b + c < c + a < a + b$ D) $a + b < b + c < c + a$
E) $c + a < a + b < b + c$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$AC \perp CD$
$m(ABC) = 61°$
$m(BCA) = 60°$
$m(DAC) = 46°$
olduğuna göre aşağıdaki kenarlardan hangisi en kısadır?



A) $[AB]$ B) $[BC]$ C) $[CA]$ D) $[CD]$ E) $[AD]$

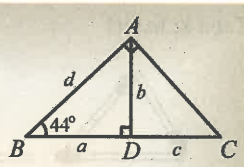
Çözüm: $|BC| = a$ br, $|CA| = b$ br, $|AB| = c$ br, $|CD| = d$ br ve $|DA| = e$ br olsun.
ABC üçgeninde açı ölçülerine göre $a < c < b$,



ACD üçgenindeki açı ölçülerine göre de $b < d < e$ olmalıdır. İki eşitsizlik birlikte düşünülürse en küçüğün a olduğu görülür. Dolayısıyla en kısa kenar $[BC]$'dir.

Doğru cevap: B.

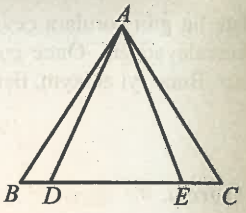
3.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$m(CBA) = 44°$



Şekilde verilmiş a, b, c ve d değerlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdaki şıkların hangisinde verilmiştir?

A) $b < a < c < d$ B) $c < b < a < d$ C) $b < c < a < d$
D) $c < d < a < b$ E) $c < a < b < d$

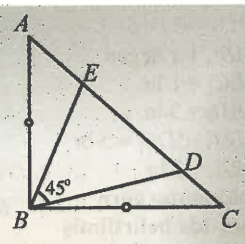
4.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in]BC[$
$E \in]DC[$
$|BE| < |DC|$
olduğuna göre *ADE* üçgeni için yazılmış aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?



A) $|AD| < |DE| < |EA|$ B) $|EA| < |DE| < |AD|$
C) $|EA| < |AD| < |DE|$ D) $|DE| < |AD| < |EA|$
E) $|DE| < |EA| < |AD|$

5.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = |BC|$
$|AE| > |DC|$

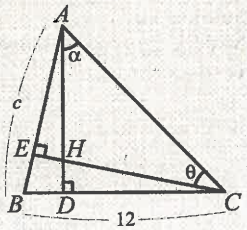
$m(EBD) = 45°$



olduğuna göre *EBD* üçgeni için yazılmış aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?

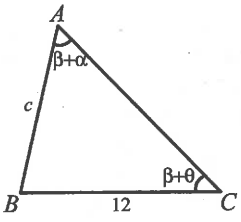
A) $|DE| < |EB| < |BD|$ B) $|DE| < |BD| < |EB|$
C) $|EB| < |DE| < |BD|$ D) $|EB| < |BD| < |DE|$
E) $|BD| < |DE| < |EB|$

Örnek *ABC bir üçgen*
$AD \perp BC$
$CE \perp AB$
$|BC| = 12$ br
$|AB| = c$ br
$m(DAC) = \alpha$
$m(ACE) = \theta$
$\alpha > \theta$
olduğuna göre c tam sayı olarak en çok kaç olabilir?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: HAE ve HCD açılarının eşliğine dikkat ediniz. Bu açıların ölçüsüne β diyelim.

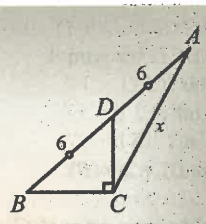


O zaman $\alpha > \theta$ olması, aynı zamanda $\beta + \alpha > \beta + \theta$ olmasını gerektireceğinden, bize $m(CAB) > m(BCA)$ olduğunu anlatır. O halde bu duruma göre $12 > x$ olmalıdır ki buradan cevap 11 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

6.
ABC bir üçgen
$BC \perp CD$

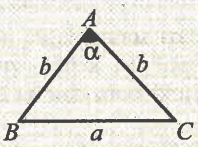
$|AD| = |DB| = 6$ br
$|CA| = x$ br



olduğuna göre *x*'in alabileceği en küçük tam sayı değeriyle en büyük tam sayı değerinin toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Örnek. *CAB bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC| = b$ br
$|BC| = a$ br
Çevre$(ABC) = 30$ *br*
$m(A) > m(B)$
olduğuna göre b'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

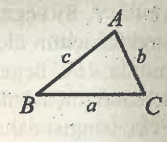


A) 9 B) 10 C) 11 D) 14 E) 15

Çözüm: $m(A) > m(B)$ ise $a > b$ olacağını baştan not edelim. Diğer yandan $2b + a = 30$ verildiğinden $a = 30 - 2b$ olur. O halde not ettiğimiz eşitsizlik $30 - 2b > b$ halini alır. Bu eşitsizlik çözülürse $b < 10$ bulunur. Sonuçta b'nin en büyük tam sayı değeri 9'dur.

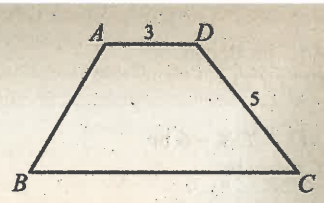
Doğru cevap: A.

7.
ABC bir üçgen
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$2a + b + c = 24$
$2a + 2c = 29$
olduğuna göre *a* kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

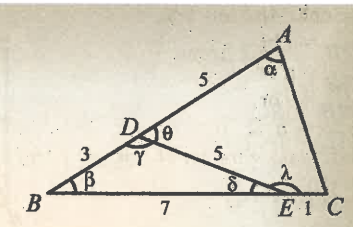
8.
ABCD bir yamuk
AD // *BC*
$|AD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
$m(D) > 2 \cdot m(B)$



olduğuna göre $|BC|$'nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 8 **B) 9** C) 10 D) 11 E) 12

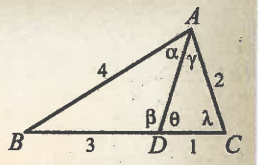
9.
ABC bir üçgen
$|EC| = 1$ br
$|BD| = 3$ br
$|DA| = |DE| = 5$ br
$|BE| = 7$ br
olduğuna göre
şekilde belirtilmiş



α, β, θ, γ, λ, δ açı ölçülerinden en küçüğüyle en büyüğünden oluşan ikili aşağıdakilerden hangisidir?

A) (β, α) B) (θ, γ) C) (δ, γ) **D)** (δ, λ) E) (θ, λ)

10.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$|AB| = 4$ br
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 1$ br
$|CA| = 2$ br

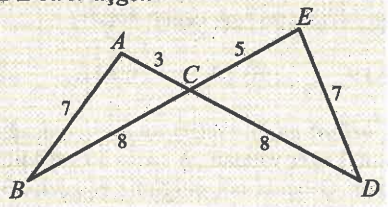


olduğuna göre şekilde belirtilmiş α, β, θ, γ, λ açı ölçülerinden hangisi diğerlerinden daha küçüktür?

A) α B) β C) θ **D)** γ E) λ

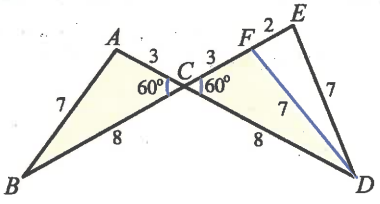
Bazı sorularda da açı ölçülerinden kenar uzunluklarına değil de, kenar uzunluklarından açı ölçülerine gidilir. Şimdi buna dair bir örnek verelim:

Örnek. *ABC ve CDE birer üçgen*
$AD \cap BE = \{C\}$
$|AC| = 3$ br
$|CE| = 5$ br
$|AB| = |DE| = 7$ br
$|BC| = |CD| = 8$ br
olduğuna göre
aşağıdaki
ölçülerden hangisi en büyüktür?



A) $m(A)$ B) $m(B)$ C) $m(BCA)$ D) $m(D)$ E) $m(E)$

Çözüm: Daha önce ''özel üçgenler'' dersinden (3, 7, 8) ve (5, 7, 8) üçgenlerinde, boyu 7 br olan kenarın karşısındaki açının ölçüsünün 60° olduğunu biliyoruz. Şu durumda *ABC* üçgeninde *A* açısının, *CDE* üçgeninde de *E* açısının ölçüsünün 60°'den büyük olduğunu biliyoruz. Peki, hangisi daha büyük?



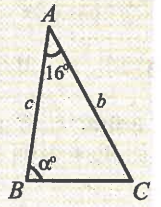
$[CE]$ üzerinde $|CF| = 3$ br olacak şekilde bir *F* noktası alırsak *ABC* ile *FDC* üçgenleri eş olurlar.

$$m(A) = m(DFC) > m(DEC)$$

olduğundan şıklar arasında en büyük ölçü $m(A)$'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(CAB) = 16°$
$m(ABC) = \alpha°$
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$b > c$
olduğuna göre α tam sayı olarak en az kaç olabilir?



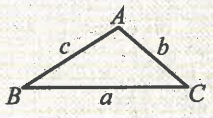
A) 73 B) 74 C) 83 D) 84 E) 85

Çözüm: Aslında mantığı aynı olan iki çözüm vereceğiz.
Birinci yol. $m(A) = 16°$ bilgisinden $m(B) + m(C) = 164°$ buluruz. $b > c$ verildiğinden $m(B) > m(C)$ olması gerekir. $m(C) = 164° - m(B)$ diye $m(B) > 164° - m(B)$ yani $2 \cdot m(B) > 164°$ olur. O halde $m(B) = \alpha° > 82°$ olduğundan α en az 83 olur.

İkinci yol. Üçgen ikizkenar olsaydı, yani $b = c$ olsaydı, $\alpha = 82$ olurdu. $b > c$ olduğundan $m(B) > m(C)$ olur, o halde en küçük tam sayı $\alpha = 83$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BA| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$a > c > b$
olduğuna göre $m(B)$ *tam sayı olarak en çok kaç derece olabilir?*



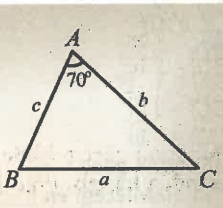
A) 29 B) 30 C) 44 D) 59 E) 60

Çözüm: b değeri üç uzunluk arasında en küçüğü olduğundan onun karşısındaki B açısının ölçüsü de en küçük olmalıdır.

Sayılar dersinden hatırlarsanız en küçük ifadenin en büyük değeri sorulduğunda ifadeleri bir an için birbirlerine eşitmiş gibi düşünmekte fayda vardı. O halde üçgen eşkenar olsaydı, her bir açının ölçüsü 60° olurdu, o halde en büyük değeri tam sayı olarak 59'dur.

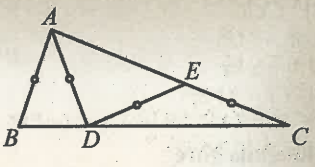
Doğru cevap: D.

11.
ABC bir üçgen
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$c < b < a$
$m(A) = 70°$
olduğuna göre $m(B) - m(C)$ farkı derece cinsinden kaç değişik tam sayı değeri alabilir?



A) 28 **B) 29** C) 30 D) 31 E) 32

12.
ABC bir üçgen
$D \in [BC]$
$E \in [CA]$
$|BC| > |AC|$
$|BA| = |AD| = |DE| = |EC|$

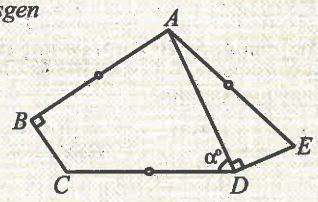


olduğuna göre $m(CAB)$ değerinin derece cinsinden alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 80 B) 79 **C) 78** D) 77 E) 76

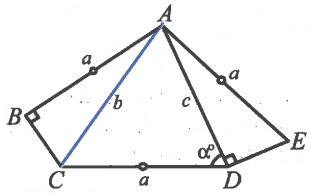
En Uzun Hipotenüs, Başka Uzun Yok! Bir dik üçgenin iç açılarından en büyüğü 90° diye, dik açının gördüğü kenar üçgenin en uzun kenarıdır. Yani bir dik üçgende en uzun kenar hipotenüstür. Şimdiki örneklerimiz buna dair...

Örnek. *ABCDE bir beşgen*
$AB \perp BC$
$AD \perp DE$
$|AB| = |CD| = |AE|$
$m(ADC) = \alpha°$
olduğuna göre α*'nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?*



A) 59 B) 60 **C) 61** D) 89 E) 91

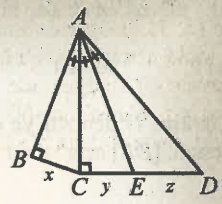
Çözüm: Önce $[AC]$'yi çizelim. $|AB| = |CD| = |EA| = a$ br, $|AC| = b$ br ve $|AD| = c$ br olsun.



ABC bir dik üçgen olduğundan hipotenüs en uzun kenar olması gerekir. Bu yüzden $a < b$ yazabiliriz. Diğer yandan aynı sebeple *ADE* dik üçgeninde de $c < a$ yazabiliriz. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse $c < a < b$ elde edilir. Bu da *ACD* üçgeninde en uzun kenarın $|AC|$ yani en büyük ölçülü açının *ADC* açısı olduğunu anlatır. Şu durumda soru kalıbı en büyük ölçünün en küçük değeri olduğundan bir an için eşkenarmış gibi düşüneceğiz. Öyle olsaydı her ölçü 60° olacaktı, dolayısıyla en büyük ölçünün en küçük değeri tam sayı olarak 61'dir.

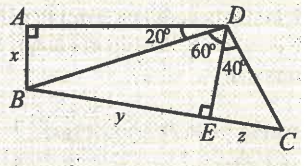
Doğru cevap: C.

13.
ABCD bir dörtgen
$AB \perp BC$, $AC \perp CD$
$m(DAE) = m(EAC)$
$m(EAC) = m(CAB)$
$|BC| = x$ br
$|CD| = y$ br
$|ED| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında geçerli olan sıralama aşağıdakilerden hangisidir?



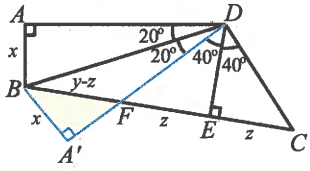
A) $x < y < z$ B) $y < x < z$ C) $x < z < y$
D) $x = y < z$ E) $x = y = z$

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$DA \perp AB$, $DE \perp BC$
$m(ADB) = 20^\circ$
$m(BDE) = 60^\circ$
$m(EDC) = 40^\circ$
$|AB| = x$ br
$|BE| = y$ br
$|EC| = z$ br
olduğuna göre x, y, z arasında aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi geçerlidir?



A) $y > x + z$ B) $z > x + y$ C) $x > y + z$
D) $y > 2x + z$ E) $y > x + 2z$

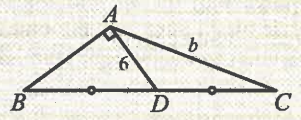
Çözüm: DAB üçgeninin DB'ye göre simetriği olan $DA'B$ üçgenini çizelim.



$|AB| = x$ br olduğundan $|BA'| = x$ br olur. Diğer yandan CDF üçgeni de $[DE]$ hem iç açıortay hem de yükseklik konumuna geldiğinden ikizkenar olur. $|FE| = |EC| = z$ br olduğundan $|BF| = y - z$ br olur. $BA'F$ üçgeninde hipotenüs en uzun kenar olduğundan $y - z > x$, bunu da düzenlersek $y > x + z$ olur.

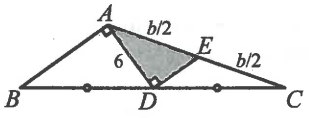
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$[AD]$ *kenarortay*
$BA \perp AD$
$|AD| = 6$ br
olduğuna göre $|AC|$ *tam sayı olarak en az kaç* br *olabilir?*



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: D'den AB'ye çizilen paralel doğru, AC'yi E'de kessin. $[DE]$ orta taban olur.



Bir dik üçgende hipotenüs en uzun kenar olduğundan ADE dik üçgeninde $|AE| > 6$ olmalıdır. O halde

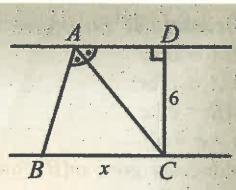
$$|AC| = 2 \cdot |AE| > 12$$

olur ki buradan cevabımız 13 br olmalıdır.

Doğru cevap: E.

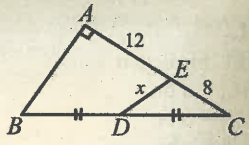
Bu soruyu, C'den AB'ye dik indirerek de, $[AD]$'yi D yönünde kendi boyu kadar uzatarak da çözebilirsiniz.

14.
$AD \,//\, BC$
$CD \perp DA$
$m(DAC) = m(CAB)$
$|CD| = 6$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre
x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



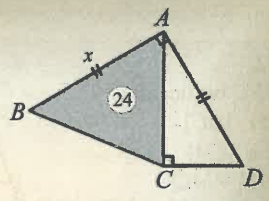
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

15.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = |DC|$
$|AE| = 12$ br
$|EC| = 8$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre
x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16.
$DA \perp AB$
$AC \perp CD$
$|DA| = |AB|$
$|AB| = x$ br
$|ABC| = 24$ br^2
olduğuna göre
x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaç olabilir?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

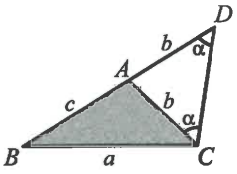
Teorem [Üçgen eşitsizliği]. *Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunluğunun toplamından küçük, farkından büyüktür.*

Yani, alışıldık gösterimlerle

$$|b-c| < a < b+c$$
$$|a-c| < b < a+c$$
$$|a-b| < c < a+b$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt: Önce eşitsizliklerin sağ yanlarını kanıtlayalım. $[BA]$ kenarını A yönünde $|AC|$ kadar uzatalım.



DAC bir ikizkenar üçgen yani

$$m(ADC) = m(DCA)$$

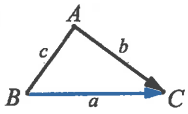
olur. Bundan dolayı

$$m(DCB) > m(BDC)$$

olur. Bu da $b + c > a$ demektir.

Benzer şekilde $a + b > c$ ve $a + c > b$ kanıtlanabilir.

İki kenarın toplamının daima üçüncü kenardan daha uzun olduğuna farklı bir yaklaşım getirelim. Eminim beğeneceksiniz:



B ile C noktaları arasındaki en kısa yol nedir?

Cevabınız, BC doğru parçası değil mi? İşte ondan dolayı

$$|BC| < |BA| + |AC| \text{ yani } a < b + c.$$

Şimdi de kanıtladığımız bu eşitsizliklerle, sol yanları kanıtlayacağız.

$a + c > b$ olduğundan

$$a > b - c$$

$a + b > c$ olduğundan

$$a > c - b$$

olmalıdır.

O halde $a > |b-c|$ yazılabilir. Sonuç olarak

$$|b-c| < a < b+c$$

olduğu kanıtlanmıştır. Diğerleri de benzer mantıkla gösterilebilir.

Bu kural **üçgen eşitsizliği** diye bilinir. Yani verilen üç uzunluğun üçgen oluşturup oluşturamayacağını bu eşitsizlikten anlarız.

Örnek. (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 3, 3), (1, 1, 10), (1, 10, 10) *üçlülerinin kaç tanesi bir üçgenin farklı kenar uzunluklarını belirtecek niteliktedir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir üçgenin herhangi iki kenar uzunluğunun toplamı, üçüncü kenar uzunluğundan büyüktür. (1, 2, 3) ve (1, 1, 10) üçlüleri bu kurala uymamaktadır. Zira 1 + 2 toplamı 3'ten büyük olmalıdır, 3 bile olamaz, bu yüzden (1, 2, 3) değerleri bir üçgenin kenar uzunlukları olamaz. Diğer yandan 1 + 1 < 10 olduğundan (1, 1, 10) değerleri de üçgen belirtmez.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kenar uzunlukları ardışık pozitif tam sayı olan bir üçgenin en kısa kenarının uzunluğu aşağıdakilerden hangisi olamaz?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Kenar uzunluklarına $(a, a + 1, a + 2)$ diyelim. İki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenar uzunluğundan büyük olmalıdır diye

$$a + (a + 1) > a + 2$$

dersek, $a > 1$ olması gerektiğini görürüz. O halde bu şartı sağlamayan tek üçgen (1, 2, 3) üçgenidir.

Doğru cevap: A.

17.
Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeni için aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?

A) $a = 2b + c$ B) $b = 3a + c$ C) $c = b - a$
D) $b = a + c + 1$ E) $c < a + b - 2$

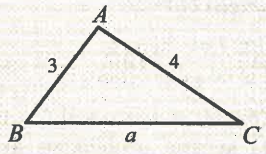
18.
Kenar uzunlukları a, b, c tam sayıları olan bir ABC üçgeninde

$$a - b = 3$$
$$b - c = 8$$

olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi en az kaç br olabilir?

A) 22 B) 25 C) 28 **D) 31** E) 34

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 3$ br
$|CA| = 4$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Üçgen eşitsizliği gereğince

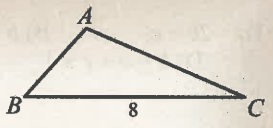
$$|3 - 4| < a < 3 + 4$$

olması gerektiğinden a; 2, 3, 4, 5, 6 olmak üzere 5 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

19.
ABC bir üçgen

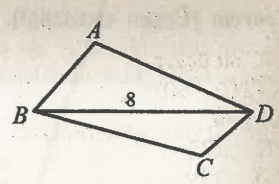
$|BC| = 8$ br



olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi tam sayı olarak en az kaç br olabilir?

A) 9 B) 16 **C) 17** D) 23 E) 24

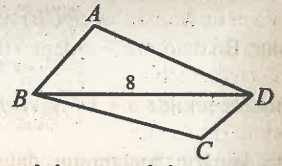
20.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|BD| = 8$ br



olduğuna göre $ABCD$ dörtgeninin çevresinin tam sayı olarak alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 16 **B) 17** C) 18 D) 32 E) 33

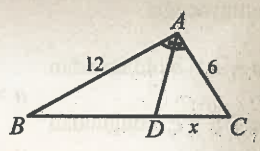
21.
$ABCD$ kenar uzunlukları tam sayı olan bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|BD| = 8$ br



olduğuna göre $ABCD$ dörtgeninin çevresinin tam sayı olarak alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 16 B) 17 **C) 18** D) 32 E) 33

22.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$|AB| = 12$ br
$|AC| = 6$ br
$|DC| = x$ br

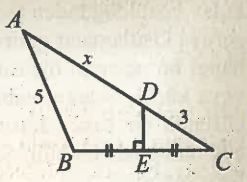


olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 2 **B) 3** C) 4 D) 5 E) 6

23.

ABC bir üçgen
$m(ABC) > 90°$
$DE \perp BC$
$|BE| = |EC|$
$|CD| = 3$ br
$|AB| = 5$ br



olduğuna göre
$|AD| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 **B) 4** C) 5 D) 6 E) 7

24.

Adana ile Mersin'in coğrafi konumu hakkında hiçbir bilgisi olmayan esaslı geometrici bay X, şehirlerarası karayolunda yandaki tabelayı görmüştür.

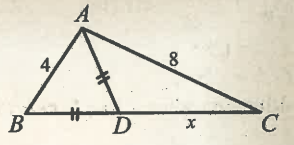


Bay X'e göre Adana-Mersin arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 15 B) 70 C) 80 D) 135 **E) 155**

25.

ABC bir üçgen
$D \in]BC[$
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 8$ br
$|DC| = x$ br
$|BD| = |AD|$

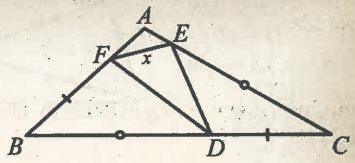


olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 11 B) 10 **C) 9** D) 8 E) 7

26.

ABC bir üçgen
$|AB| + |BC| = 24$ br
$|BC| + |CA| = 28$ br
$|CA| + |AB| = 20$ br
$|BD| = |CE|$
$|FB| = |DC|$
$|FE| = x$ br

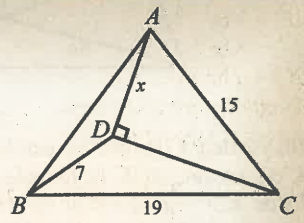


olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

27.

ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$AD \perp DC$
$|DB| = 7$ br
$|BC| = 19$ br
$|CA| = 15$ br
$|AD| = x$ br

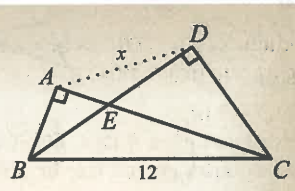


olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 **D) 8** E) 9

28.

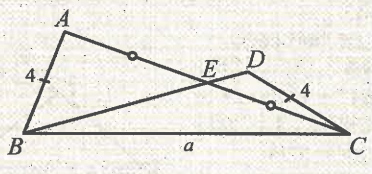
ABC üçgeninde
$m(A) = 90°$
DBC üçgeninde
$m(D) = 90°$
$|BC| = 12$ br



olduğuna göre
$|AD| = x$'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

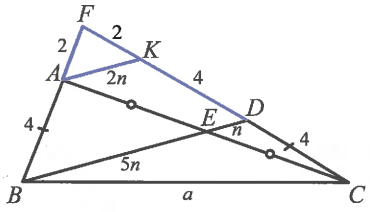
A) 6 B) 7 C) 10 **D) 11** E) 12

Örnek. *ABC ve DBC birer üçgen*
$AC \cap BD = \{E\}$
$|AB| = |CD| = 4$ br
$|AE| = |EC|$
$|BE| = 5 \cdot |BD|$
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a hangi aralıktan değerler alabilir?



A) $4 < a < 12$ B) $8 < a < 16$ C) $4 < a < 16$
D) $2 < a < 12$ E) $4 < a < 8$

Çözüm: $|ED| = n$ br ise $|BE| = 5n$ br olur diyerek çözüme başlıyoruz. BA ile CD'nin kesişim noktası F olsun. Orta nokta gördük mü aklımıza orta taban gelecekti.



Bu yüzden A'dan BD'ye paralel bir doğru çizelim, FC'yi K'de kessin. ACK üçgeninde $[ED]$ orta taban olur. O halde $|KD| = |DC| = 4$ br ve $|AK| = 2n$ br olur. Diğer yandan $AK \parallel ED$ diye $AK \parallel BD$ olur, bu yüzden FAK ile FBD üçgenleri 2:6 oranında benzerdir. Şu durumda

$$|FA| = |FK| = 2 \text{ br}$$

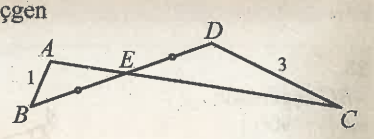
bulunur. FAB üçgeninin yan kenarları bulunduğu için, üçgen eşitsizliği gereğince

$$4 < a < 16$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

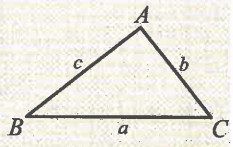
29.
ABE ve DEC birer üçgen
$AC \cap BD = \{E\}$
$|BE| = |ED|$
$|AC| = 4 \cdot |AE|$
$|AB| = 1$ br
$|DC| = 3$ br
olduğuna göre *B* ile *C* köşeleri arasındaki uzaklık tam sayı olarak <u>en çok</u> kaç br olabilir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Bu tarz sorular, sadece üçgen eşitsizliğini kullanarak çok kolay çözüldüğünden (son örnek ve soru hariç☺), bazen soruya kısıtlamalar getirilir. Bu kısıtlamalar üçgenin herhangi bir açısının ölçüsünün verilen bir değerden büyük veya küçük olduğu olabileceği gibi, herhangi bir açı ölçüsünün bir başka açısının ölçüsünden büyük veya küçük olduğu da olabilir. Şimdi bu durumlara ilişkin örnekler çözelim:

Örnek. *ABC bir üçgen*
a, b, c birer doğal sayı
$|AB| = c$ br
$|AC| = b$ br
$|BC| = a$ br
$b < a$
olduğuna göre c kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) $2b-2$ B) $2b-1$ C) $2b$ D) $2a-1$ E) $2a$

Çözümü: Üçgen eşitsizliğinden

$$a - b < c < a + b$$

olduğunu biliyoruz. O halde c değeri $a - b + 1$'den başlamak üzere $a + b - 1$'e kadar tüm tam sayı değerlerini alabilir. Burada kaç tane sayı olduğunu anlamak için terim sayısı formülünü kullanabiliriz. Hatırlayalım:

Terim Sayısı = Son Terim – İlk Terim + 1

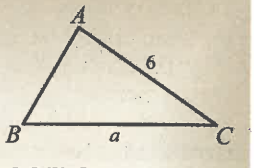
Hemen formülümüzü uygulayalım:

$$(a + b - 1) - (a - b + 1) + 1 = 2b - 1$$

farklı tam sayı değeri alabilir.

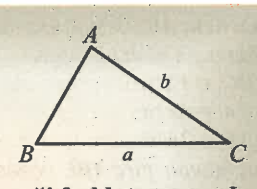
Doğru cevap: B.

30.
ABC bir üçgen
a bir tam sayı
$|BC| = a$ br
$|AC| = 6$ br
$a > 6$
$|AB|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

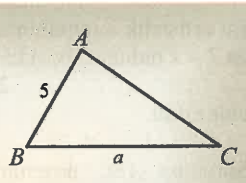
31.
ABC bir üçgen
a ve b sabit birer tam sayı
$|BC| = a$ br
$|AC| = b$ br



olduğuna göre $|AB|$'nin alabileceği farklı tam sayı değerlerinin adedi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 33 B) 45 C) 55 **D) 66** E) 77

32.
ABC bir üçgen
a bir tam sayı
$|AB| = 5$ br
$|BC| = a$ br

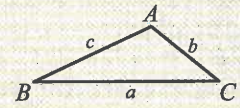


$|AC|$'nin alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı 72 olduğuna göre a kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 **D) 8** E) 7

Bazen, c'nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceği değil de, c'nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı sorulur. Bu toplam $a - b + 1$'den $a + b - 1$'e kadar olan tam sayıların toplamı yani $a\cdot(2b - 1)$'dir. Bu verileri ezberlemenize gerek yoktur, üçgen eşitsizliğini bilin, sırtınız yere gelmez!

Örnek. *ABC; kenar uzunlukları doğal sayı olan bir üçgen*
En büyük iç açı ölçüsü $m(A)$
$|BC| = a$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c kaç farklı değer alabilir?



A) $b-1$ B) b C) $b+1$ D) $2a-b$ E) $a+b$

Çözüm: Ölçüsü en büyük açı A ise a, b, c değerlerinden en büyüğü a'dır. Üçgen eşitsizliğine göre

$$a - b < c < a + b$$

olur. Fakat $c < a$ olması gerektiğinden eşitsizlik

$$a - b < c < a$$

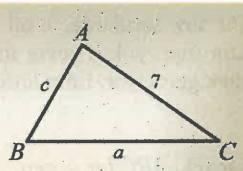
halini alır. O halde c değeri $a - b + 1$ den başlamak üzere $a - 1$'e kadar tüm tam sayı değerlerini alabilir. Terim sayısı formülünden orada

$$(a - 1) - (a - b) = b - 1$$

tane terim olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: A.

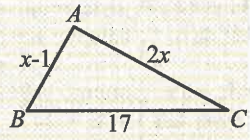
33.
ABC bir üçgen
a ve c birer tam sayı
$|AB| = c$ br
$|BC| = a$ br
$|AC| = 7$ br
$c < 7 < a$



olduğuna göre c kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 11 B) 10 C) 8 D) 7 **E) 6**

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = x - 1$ br
$|AC| = 2x$ br
$|BC| = 17$ br
olduğuna göre x'in alabileceği farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



A) 100 B) 104 C) 107 D) 109 E) 110

Çözüm: Sayısal olan 17 değerini ortaya alarak (bu her daim tavsiye edilen yoldur) üçgen eşitsizliği yazacağız:

$$2x - (x - 1) < 17 < 2x + (x - 1)$$
$$x + 1 < 17 < 3x - 1$$

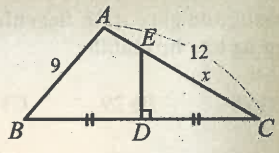
Eşitsizlik sisteminin sol yanından $x < 16$, sağ yanındansa $6 < x$ bulunur. Bunlar birleştirilirse $6 < x < 16$ elde edilir. Bu durumda x'in alabileceği değerlerin toplamı

$$5 + 6 + \ldots + 15 = 110$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

34.
ABC bir üçgen
$ED \perp BC$
$|BD| = |DC|$
$|AB| = 9$ br
$|AC| = 12$ br
$|EC| = x$ br

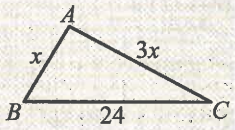


olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Bu tarz sorularda, x mi tam sayı, kenar uzunlukları mı tam sayı, yoksa çevre mi tam sayı, buna çok dikkat etmek gerekiyor. Edin lütfen!

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = x$ br
$|AC| = 3x$ br
$|BC| = 24$ br



olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi tam sayı olarak en az ve en çok kaç br *olabilir?*

A) En az 49, en çok 68 B) En az 50, en çok 68
C) En az 51, en çok 67 D) En az 49, en çok 71
E) En az 50, en çok 71

Çözüm: x, $3x$ ve 24 değerlerinden sayısal olanını ortaya alarak üçgen eşitsizliği yazalım:

$$2x < 24 < 4x$$

Bu eşitsizlik sisteminin sol yanından $x < 12$, sağ yanından da $6 < x$ bulunur. İkisi birleştirilirse

$$6 < x < 12$$

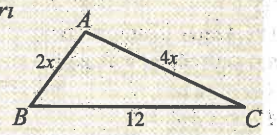
elde edilir. Sorumuz *ABC* üçgeninin çevresi hakkında ve Çevre(ABC) $= 4x + 24$ br olduğundan $4x + 24$ ifadesinin hangi aralıkta olduğunu bulmamız gerekiyor.

$$6 < x < 12$$
$$4\cdot 6 < 4x < 4\cdot 12$$
$$4\cdot 6 + 24 < 4x + 24 < 4\cdot 12 + 24$$
$$48 < \text{Çevre}(ABC) < 72$$

olur. O halde çevre tam sayı olarak en az 49 br, en çok 71 br olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC kenar uzunlukları tam sayı olan bir üçgen*
$|BC| = 12$ br
$|CA| = 4x$ br
$|AB| = 2x$ br



olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi en az ve en çok kaç br *olabilir?*

A) En az 24, en çok 48 B) En az 25, en çok 47
C) En az 26, en çok 46 D) En az 27, en çok 45
E) En az 28, en çok 44

Çözüm: $2x$, $4x$ ve 12 değerlerinden sayısal olanını ortaya alarak üçgen eşitsizliği yazalım:

$$2x < 12 < 6x$$

Bu eşitsizlik sisteminin sol yanından $x < 6$, sağ yanından da $2 < x$ bulunur. İkisi birleştirilirse

$$2 < x < 6$$

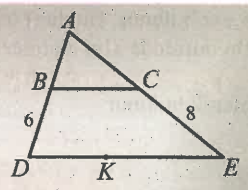
elde edilir.

Sorumuz *ABC* üçgeninin çevresi hakkında ve Çevre(ABC) $= 6x + 12$ br olduğundan $6x + 12$ ifadesinin hangi aralıkta olduğunu bulmamız gerekiyor. Ama demin yaptığımız gibi bir çözüm yapamayız, çünkü bu soruda kenar uzunluklarının tam sayı olduğu söylenmiş. Anlayacağınız zurnanın zırt dediği yere geldik!

Üçgenin tüm kenar uzunlukları tam sayı olduğundan $2x$ ve $4x$ değerleri tam sayı olmalıdır. $2 < x < 6$ eşitsizliklerinden $4 < 2x < 12$ elde edilir ki $2x$ değeri en az 5, en çok da 11 olabilir. Şu durumda çevre de $6x + 12$ yani bu değerin 3 katının 12 fazlası olduğundan, tam sayı olarak en az $5\cdot 3 + 12 = 27$ br, en çok da $3\cdot 11 + 12 = 45$ br olabilir.

Doğru cevap: D.

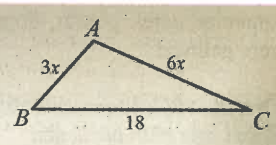
35.
ABC ve *ADE* birer üçgen
K noktası, *ABC* üçgenine ait bir dış teğet çember merkezi
$BC \parallel DE$
$|BD| = 6$ br
$|CE| = 8$ br



olduğuna göre *ADE* üçgeninin çevresi tam sayı olarak en az kaç br olabilir?

A) 28 **B) 29** C) 42 D) 43 E) 57

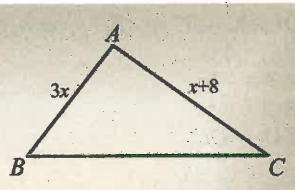
36.
ABC kenar uzunlukları tam sayı olan bir üçgen
$|BC| = 18$ br
$|CA| = 6x$ br
$|AB| = 3x$ br



olduğuna göre *ABC* üçgeninin çevresi en az kaç br olabilir?

A) 36 B) 37 C) 38 **D) 39** E) 40

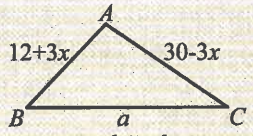
37.
ABC kenar uzunlukları tam sayı olan bir üçgen
$|AB| = 3x$ br
$|AC| = x + 8$ br
$m(C) < m(B) < m(A)$



olduğuna göre *ABC* üçgeninin çevresinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 32 B) 33 C) 37 D) 38 E) 39

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 12 + 3x$ br
$|AC| = 30 - 3x$ br
$|BC| = a$ br



olduğuna göre a'nın alabileceği tam sayı değerlerinin en çok olması için x kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Daha kolay yorum yapabilmek için üçgen eşitsizliğini karşımıza alalım. *a*'yı ortaya alıyoruz.

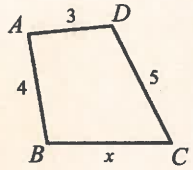
$$|18 - 6x| < a < 42$$

Dikkat ettiyseniz x kaç olursa olsun eşitsizliğin sağ yanı hep 42 oluyor. O halde sol yandaki ifadeyi ne kadar küçük tutarsak a ifadesi o kadar çok değer alabilir. Mutlak değerli bir ifade de en az 0 olabilir. Demek ki $x = 3$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

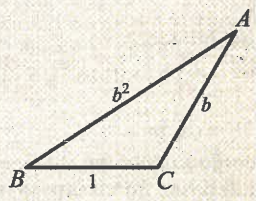
Kıssadan çıkaracağımız hisse şudur: İki kenar uzunluğunun toplamı sabit olan bir üçgende üçüncü kenar uzunluğunun tam sayı olarak daha çok değer alabilmesi üçgenin (üçüncü kenarı taban kabul eder şekilde) ikizkenar olmasıyla mümkündür.

38.
ABCD bir dörtgen
$|AB| = 4$ br
$|CD| = 5$ br
$|DA| = 3$ br
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



1

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BC| = 1$ br
$|CA| = b$ br
$|AB| = b^2$ br
olduğuna göre b'nin hangi aralıktan bir sayı olması gerektiğini araştıralım.



Çözüm: Üçgen eşitsizliği yazıp b'nin yaşadığı aralığı çabucak bulasımız geliyor ama b mi büyük b^2 mi büyük bilmediğimizden sorun yaşarız. Bu yüzden durumu alt aralıklarda inceleyeceğiz.

$b = 1$ iken üçgen zaten eşkenar üçgen olur. Bu yüzden b'yi 1'den küçük ve 1'den büyük diye iki farklı durumda araştıracağız.

$0 < b < 1$ iken $b > b^2$ olacağından üçgen eşitsizliği

$$b - b^2 < 1 < b + b^2$$

şeklinde olur. Bu da

$$b^2 - b + 1 > 0 \text{ ve } b^2 + b - 1 > 0$$

eşitsizlik sisteminin çözümü demektir. İlkinin çözümünün, diskriminantı negatif diye, tüm reel sayılar olduğu ortada. O halde ikinciye geçelim.

$$b^2 + b - 1 > 0$$

$$b^2 + b + \frac{1}{4} > \frac{5}{4}$$

$$\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{5}{4}$$

olduğundan $b + \frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ veya $b + \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ olmalıdır.

$0 < b < 1$ koşulu altında bu şıkkın cevabı $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < b < 1$ olur.

$b > 1$ iken $b^2 > b$ olacağından üçgen eşitsizliği

$$b^2 - b < 1 < b^2 + b$$

şeklinde olur. Bu da

$$b^2 - b - 1 < 0 \text{ ve } b^2 + b - 1 > 0$$

eşitsizlik sisteminin çözümü demektir. $b > 1$ olduğundan bu sefer ikincisi seçeneğin çözümü tem reel sayılardır, bu yüzden biz ilkine bakacağız.

$$b^2 - b - 1 < 0$$

$$b^2 - b + \frac{1}{4} < \frac{5}{4}$$

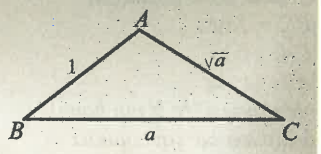
$$\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

diye $-\frac{\sqrt{5}}{2} < b - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$ yani $\frac{-\sqrt{5}+1}{2} < b < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ olmalıdır ama $b > 1$ koşulu var diye sağ tarafı alırız. Şu durumda sorunun çözümü yani üç şıkkın birleşimi

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < b < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

olarak bulunur.

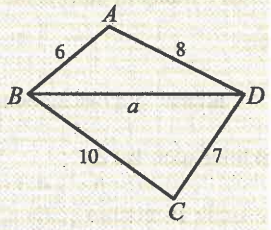
39.
ABC bir üçgen
$|AB| = 1$ br
$|BC| = a$ br
$|CA| = \sqrt{a}$ br
olduğuna göre $6a$
ifadesi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Şimdi tekrar üçgen eşitsizliği sorularına geri dönüyoruz. Bazen üçgen eşitsizliğini 1'den fazla üçgende uygulamak gerekir. Şimdi onlara dair örnekler çözelim:

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
[BD] köşegen
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 10$ br
$|CD| = 7$ br
$|DA| = 8$ br
$|BD| = a$ br
olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



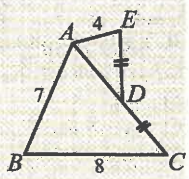
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: Bu soruda temel espri, $|BD|$'nin hem *ABD*'nin hem de *BCD*'nin üçgen olmasını engellemeyecek uzunlukta olması gerekliliğidir. Anlayacağınız iki üçgen için de üçgen eşitsizliği yazacağız ve kesişimlerini alacağız.

ABD üçgenine göre $2 < a < 14$ olması gerekirken, *BCD* üçgenine göre $3 < a < 17$ olması gerekmektedir. İkisinin birden sağlanması için $3 < a < 14$ olmalıdır. Şu durumda a; 4, 5, 6, ..., 13 olmak üzere 10 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: A.

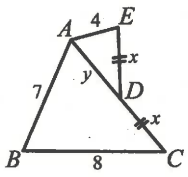
Örnek. *ABC ve AED birer üçgen*
$|AE| = 4$ br
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
$|ED| = |DC|$



olduğuna göre
$|AC|$ tam sayı olarak kaç farklı değer alabilir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 14 E) 15

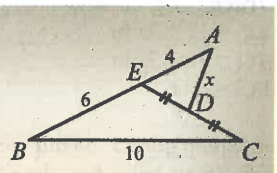
Çözüm: Hemen boş kenarların uzunluklarını adlandıralım.
$|ED| = |DC| = x$ br ve $|AD| = y$ br olsun. *ADE* üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $x + y > 4$,
ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğindense $x + y < 15$ olur.



$x + y = |AC|$ olduğundan $4 < |AC| < 15$ olur ki bu da $|AC|$'nin 10 farklı tam sayı değeri alabileceğini söyler.

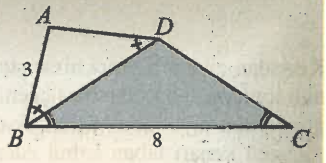
Doğru cevap: B.

40.
AED ve *EBC* birer üçgen
$|ED| = |DC|$
$|AE| = 4$ br
$|EB| = 6$ br
$|BC| = 10$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?



A) 2 B) 2,25 C) 2,5 D) 2,75 E) 3

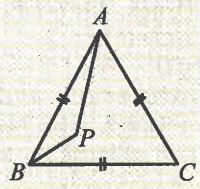
41.
ABCD bir dörtgen
$m(ABD) = m(BDA)$
$m(DBC) = m(BCD)$
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 8$ br



$|BD|$ tam sayı olduğuna göre $|DBC|$ kaç br^2 dir?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
P iç bölgede bir nokta
Çevre(*ABC*) – Çevre(*ABP*) = 4 br
olduğuna göre Çevre(*ABC*)
tam sayı olarak en az kaç br
olabilir?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna a br diyelim. $|PA| = b$ br ve $|PB| = c$ br olsun.

$$\text{Çevre}(ABC) - \text{Çevre}(ABP) = 3a - (a + b + c)$$
$$= 2a - b - c = 4$$

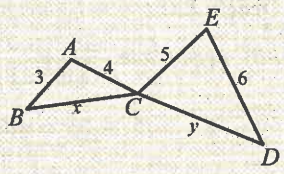
diye verilmiş. Yani $b + c = 2a - 4$ olmalıdır. Diğer yandan ABP üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $b + c > a$ olduğunu biliyoruz. $2a - 4 > a$ olduğundan $a > 4$, o halde

$$\text{Çevre}(ABC) = 3a > 12$$

olur. Şu durumda cevabımız 13 br olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC ve CDE kenar uzunlukları tam sayı olan birer üçgendir.*
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 4$ br
$|CE| = 5$ br
$|ED| = 6$ br
olduğuna göre $|BC| + |CD| = x + y$ *toplamı en çok kaç olabilir?*

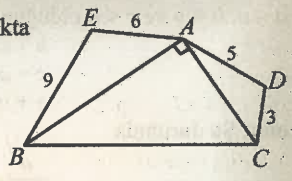


A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: x en çok 6, y en çok 10 olabileceğinden, $x + y$ toplamı en çok 16 olabilir.

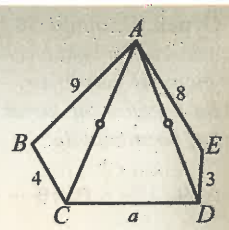
Doğru cevap: C.

42.
ABC bir dik üçgen
D ve *E* dış bölgede birer nokta
$CA \perp AB$
$|CD| = 3$ br
$|DA| = 5$ br
$|AE| = 6$ br
$|EB| = 9$ br
olduğuna göre $|BC|$'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 15 **B) 16** C) 17 D) 22 E) 23

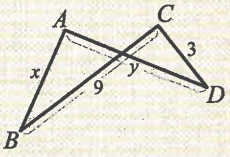
43.
ABCDE bir beşgen
$|AC| = |AD|$
$|DE| = 3$ br
$|EA| = 8$ br
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 4$ br
$|CD| = a$ br



olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 19 B) 20 **C) 21** D) 23 E) 25

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|BC| = 9$ br
$|CD| = 3$ br
$|AB| = x$ br
$|DA| = y$ br
olduğuna göre $x + y$ *toplamının tam sayı olarak alabileceği en küçük değer kaçtır?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $x + y$ toplamının olabildiğince küçük olması $|BD|$'nin olabildiğince küçük olmasıyla mümkündür. BCD üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $|BD| > 6$'dır. O halde

$$x + y > |BD| > 6$$

eşitsizliğinden tam sayı olarak en küçük 7 olabileceğini anlarız.

Doğru cevap: B.

Teorem. *Bir üçgenin her kenarının boyu, o üçgenin yarımçevresinden kısadır.*

Kanıt: Bilindik gösterimlerle $a < b + c$ olduğunu kanıtlamıştık. Şimdi eşitsizliğin her iki yanına a ekleyelim.

$$2a < a + b + c = 2u$$

olduğundan $a < u$ olduğu kanıtlanmış olur. Benzer şekilde

$$b < u$$

ve

$$c < u$$

olduğu da kanıtlanabilir.

Bu teorem sizi aşağıdaki gibi bir soruyla karşı karşıya bırakacak:

Örnek. *Uzunluğu 30 br olan yandaki tel bükülerek üçgen biçimine getiriliyor.*



Bu üçgenin bir kenar uzunluğu tam sayı olarak en çok kaç birim olabilir?

A) 9 B) 10 C) 14 D) 15 E) 19

Çözüm: Uzunluğu 30 br olan bir telin bükülerek üçgen oluşturulması demek, çevresi 30 br olan bir üçgenin oluşturulması demektir. O halde, az önce kanıtladığımız üzere o üçgenin her kenarının uzunluğu yarımçevreden yani 15 birimden kısa olmalıdır. Şu durumda bir kenar uzunluğu tam sayı olarak en çok 14 olabilir.

Doğru cevap: C.

Aynı soruyu bir de dörtgen ve beşgen için çözünüz.

44.
En uzun kenarı 10 cm olan bir üçgenin çevresi tam sayı olarak en az kaç cm dir?

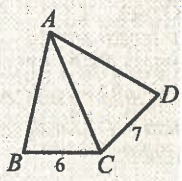
A) 11 B) 20 C) 21 D) 22 E) 28

45.
Bütün kenar uzunlukları tam sayı olup çevresi 22 br olan ve birbirlerinin benzeri olmayan kaç farklı üçgen çizilebilir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Bir üçgende her kenar uzunluğunun yarımçevreden kısa olması, aynı zamanda her üçgenin çevresinin herhangi bir kenar uzunluğunun 2 katından fazla olması anlamını taşır. Aşağıdaki soru da bununla ilgili:

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 7$ br
olduğuna göre ABC ve ACD üçgenlerinin çevreleri toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 12 B) 13 C) 14 D) 27 E) 28

Çözüm: ABC üçgeninde $|BC| = 6$ br olduğundan Çevre(ABC) > 12 ve ACD üçgeninde $|CD| = 7$ br olduğundan Çevre(ACD) > 14 olmalıdır. O halde

$$\text{Çevre}(ABC) + \text{Çevre}(ACD) > 26$$

olması gerektiğinden en küçük tam sayı değeri 27'dir.

Doğru cevap: D.

Bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğunun u'dan küçük olması, toplamları $2u$ olması gerektiğinden, diğer iki kenarının uzunlukları toplamının u'dan büyük olması anlamını da taşır. Sıradaki sorumuz da bununla alakalı:

Örnek. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeni için* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ *toplamı* $\frac{3}{2},\frac{\pi}{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}$ *değerlerinden kaç tanesini alabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu soruda $\frac{a}{b+c}<1$, $\frac{b}{c+a}<1$ ve $\frac{c}{a+b}<1$ olduğundan

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<3$$

olur deyip verilen toplam bu beş değerin beşini de alabilir demeyin sakın. Çünkü bulduğunuz 3 değeri en büyük üst sınır değildir. Şöyle yapmalısınız:

$a < u$, $b < u$ ve $c < u$ olduğundan

$$b+c>u$$
$$c+a>u$$
$$a+b>u$$

olur. Şu durumda

$$\frac{a}{b+c}<\frac{a}{u}$$
$$\frac{b}{c+a}<\frac{b}{u}$$
$$\frac{c}{a+b}<\frac{c}{u}$$

olacağından

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{a}{u}+\frac{b}{u}+\frac{c}{u}=\frac{a+b+c}{u}=2$$

olmalıdır. O halde verilen toplam $\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}$ ve $\sqrt{3}$ değerlerini alabilir fakat 2 ve $\sqrt{5}$ değerlerini alamaz.

Doğru cevap: C.

Şimdi arkanıza yaslanın, ve bu çözeceğimiz problemi dikkatle okuyun lütfen.

Çevre uzunluğu belli olan üçgenlerde her kenarın $(0, u)$ aralığından değerler aldığını öğrendik. Ya çevresi belli olan üçgenlerde açılarla ilgili bir kısıtlama olursa? Şimdi o durumu araştıracağız.

$m(A) < m(B) < m(C)$ bir ABC üçgeninde a, b, c değerleri hangi aralıktan değerler alır?

$m(A) < m(B) < m(C)$ ise $a < b < c$ olduğunu biliyoruz. Yani; a en kısa kenarın boyu, b ortanca kenar boyu, c de en uzun kenarın boyu olur. Araştırmamıza c ile başlayalım:

Her kenar uzunluğunun u'dan küçük olduğunu kanıtlamıştık. En uzun kenarın boyu da olsa, (c'den büyük Allah var!) c de u'dan küçüktür. Sorun, c'nin kaçtan küçük olduğu değil, kaçtan büyük olduğudur. Yani en büyük kenar uzunluğunun en küçük değerini arıyoruz. Daha önce 'Sayılar' dersinde öğrenmiştik ki; toplamları sabit olan ifadelerde en küçüğün alacağı en büyük değer veya en büyüğün alacağı en küçük değer hesaplanırken, bir an için tüm ifadeler eşit kabul edilir, ona göre yorum yapılırdı. İşte bu yüzden, üçgeni bir an için eşkenar kabul etsek, her kenarın boyu $2u/3$ olur. Ama c en büyüğü olduğundan bu değerden büyük olmalıdır. Şu durumda c'nin yaşadığı aralığı bulduk:

$$2u/3 < c < u.$$

Şimdi en kısa kenar boyu olan a'ya bakalım. $0 < a$ olduğu aşikar. Olay, a'nın alabileceği değerlerin üst sınırını bulmakta... Burada da problem; en küçüğün alabileceği en büyük değer problemi olduğundan, hepsini eşitmiş gibi düşüneceğiz. Şu durumda a için de bir aralık bulduk:

$$0 < a < 2u/3.$$

Geldik zurnanın zırt dediği yere... Burada en meşakkatli olanı b'nin aralığıdır. Öncelikle b'nin üst sınırını bulalım. Bunun için a ve c'yi olabildiğince küçük tutmalıyız. a'yi küçültmekte sorun yok, onu 0'a çok yakın kabul edebiliriz ama c'yi kafamıza göre küçültemeyiz, zira c her zaman b'den daha büyük olmalıdır. Şu durumda a'yı nerdeyse 0 kabul edersek, b ile c'nin toplamı nerdeyse $2u$ eder. Yine, toplam sabit iken en küçüğün alabileceği en büyük değer problemiyle karşı karşıya olduğumuzdan, yine bir an için b ile c'yi eşit kabul edeceğiz. Buna göre $b < c < u$ olmalıdır. Şimdi geldik b'nin alt sınırına: b'yi küçültmek için a'yı ve c'yi büyütmek zorundayız. c'yı u'ya yollarsak, a ile b toplamı da u'ya doğru yol alır. Farkettiyseniz $a < b$ olduğundan, karşımızdaki, en büyüğün alabileceği en küçük değer problemi yine... Yine ikisini eşit kabul edersek $u/2 < b$ olur. b için bulduklarımızı birleştirirsek, mutlu sonra ulaşırız:

$$u/2 < b < u.$$

Bulduklarımızı şöyle bir toparlayalım:

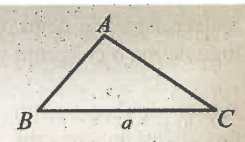
$m(A) < m(B) < m(C)$ bir ABC üçgeninde

$$0 < a < 2u/3$$
$$u/2 < b < u$$
$$2u/3 < c < u$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

46.

ABC bir üçgen
$|BC| = a$ br
Çevre$(ABC) = 24$ br
$m(A) > m(B) > m(C)$

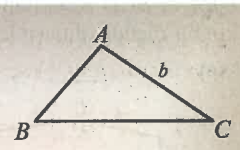


olduğuna göre a için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi geçerlidir?

A) $0 < a < 24$ B) $8 < a < 24$ C) $7 < a < 13$
D) $12 < a < 24$ E) $8 < a < 12$

47.

ABC bir üçgen
$|CA| = b$ br
Çevre$(ABC) = 24$ br
$m(A) > m(B) > m(C)$

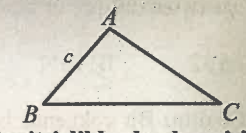


olduğuna göre b için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi geçerlidir?

A) $6 < b < 8$ B) $8 < b < 12$ C) $6 < b < 12$
D) $4 < b < 12$ E) $0 < b < 12$

48.

ABC bir üçgen
$|AB| = c$ br
Çevre$(ABC) = 24$ br
$m(A) > m(B) > m(C)$



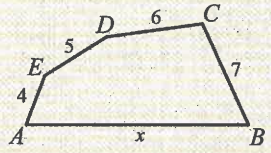
olduğuna göre c için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi geçerlidir?

A) $0 < c < 6$ B) $0 < c < 8$ C) $0 < c < 12$
D) $6 < c < 8$ E) $4 < c < 8$

Sadece üçgende değil, tüm çokgenlerde bir kenar uzunluğu daima o çokgenin yarımçevresinden küçüktür.

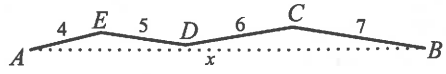
Kanıtı oldukça basittir. Hatta aşağıdaki soruya yaptığımız çözümün aynısıdır.

Örnek. *ABCDE bir beşgen*
$|BC| = 7$ br
$|CD| = 6$ br
$|DE| = 5$ br
$|EA| = 4$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x tam sayı olarak en çok kaç olabilir?



A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

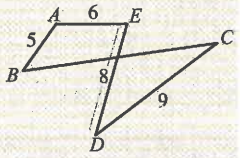
Çözüm: x'in olabildiğince büyük olması, $|DA|$ ve $|DB|$'nin olabildiğince büyük olmasına bağlıdır. Bu da DEA ve BCD açılarının mümkün olduğunda 180°'ye yakın bir ölçüde olmasıyla mümkün olur.



$|AD| < 9$ ve $|DB| < 13$ olduğundan $|AD| + |DB| < 22$'dir, o halde x en fazla 21 olabilir.

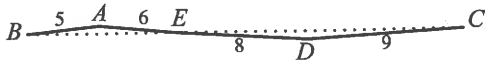
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABCDE bir beşgen*
$|BA| = 5$ br
$|AE| = 6$ br
$|ED| = 8$ br
$|DC| = 9$ br
olduğuna göre $|BC|$ tam sayı olarak en çok kaç br *olabilir?*



A) 12 B) 13 C) 14 D) 27 E) 28

Çözüm: Bir çokgende herhangi bir kenar uzunluğu daima diğer kenar uzunluklarının toplamından daha küçüktür. Bunu defaatle söyledik.



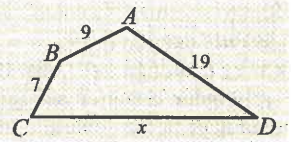
BAE ve EDC açılarının ölçülerini 180° ye yaklaştırdıkça $|BC|$ değerinin arttığını yukardaki şekilden de görebilirsiniz. Tabi hepsinin doğrusal olmasına izin yok çünkü o zaman beşgen oluşmaz.

$$|BC| < 5 + 6 + 8 + 9 = 28$$

olduğundan $|BC|$'nin en büyük tam sayı değeri 27 olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|CB| = 7$ br
$|BA| = 9$ br
$|AD| = 19$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x'in tam sayı olarak alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

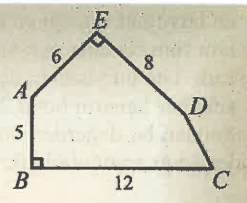


A) 38 B) 37 C) 36 D) 35 E) 34

Çözüm: Bir dörtgende, herhangi bir kenar uzunluğu her zaman diğer üç kenarın uzunlukları toplamından küçüktür. O halde x'in en büyük değeri 34'tür. Gelelim en küçük değerine... $[AC]$'yi çizelim. ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $|AC| < 16$ olduğunu biliyoruz. ACD üçgeninde yazılacak bir üçgen eşitsizliğini düşünürseniz $|AC|$'yi 19'a ne kadar yakın tutabilirsek x'in o kadar küçülebileceğini anlarız. O halde x'in en küçük tam sayı değeri 4 olabilir. O halde cevap 34 + 4 = 38 olmalıdır.

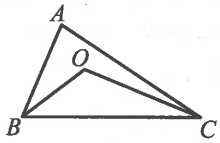
Doğru cevap: A.

49.
ABCDE bir beşgen
$AB \perp BC$, $DE \perp EA$
$|DE| = 8$ br, $|EA| = 6$ br
$|AB| = 5$ br, $|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|CD|$'nin en küçük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

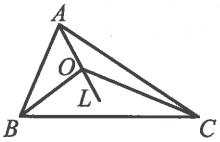


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Teorem. *Bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki her O noktası için*
$m(BOC) > m(BAC)$
eşitsizliği geçerlidir.



Kanıt: AO doğrusunu çizelim.
Bir üçgende bir dış açı ölçüsünün kendisine komşu olmayan iç açı ölçüleri toplamına eşit olduğunu dolayısıyla her birinden büyük olduğunu göz önüne alırsak;



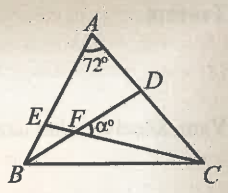
$$m(BOL) > m(BAL) \text{ ve } m(COL) > m(CAL)$$

olur, o halde

$$m(BOC) > m(BAL) + m(CAL) = m(BAC)$$

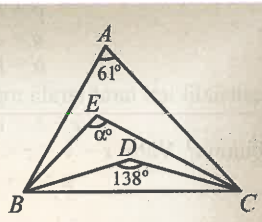
olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

50.
ABC bir üçgen
$BD \cap CE = \{F\}$
F iç bölgede bir nokta
$m(CAB) = 72°$
$m(CFD) = \alpha°$
olduğuna göre α kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



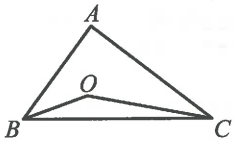
A) 71 B) 72 C) 73 **D)** 107 E) 108

51.
ABC bir üçgen
E bu üçgenin iç bölgesinde
EBC bir üçgen
D bu üçgenin iç bölgesinde
$m(A) = 61°$
$m(E) = \alpha°$
$m(D) = 138°$
olduğuna göre α kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 74 B) 75 C) 76 D) 77 E) 78

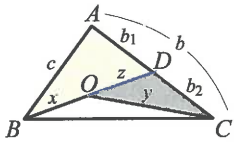
Teorem. *Bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki her O noktası için*
$|BA| + |AC| > |BO| + |OC|$
eşitsizliği geçerlidir.



Kanıt: $|CA| = b$ br, $|AB| = c$ br, $|BO| = x$ br ve $|OC| = y$ br olsun. Kanıtlamamız gereken eşitsizlik

$$c + b > x + y$$

dir. *BO*'nun *AC*'yi kestiği noktaya *D* diyelim. Böylelikle *ABOC* dörtgeni *ABD* ve *CDO* üçgenlerine parçalanmış olur. $|AD| = b_1$ br, $|DC| = b_2$ br ve $|OD| = z$ br olsun. Şimdi bu üçgenlerde üçgen eşitsizliği yazacağız:



$$c + b_1 > x + z$$

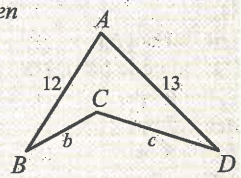
$$z + b_2 > y$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa **z**'ler sadeleşeceğinden

$$c + b_1 + b_2 > x + y$$

elde edilir. $b_1 + b_2 = b$ olduğundan eşitsizlik kanıtlanmış olur.

Örnek. *ABCD bir konkav dörtgen*
$|AB| = 12$ br
$|AD| = 13$ br
$|BC| = b$ br
$|CD| = c$ br
olduğuna göre b + c toplamının tam sayı olarak alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?



A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Çözüm: Önce [*BD*]'yi çizelim. *ABD* üçgeninde üçgen eşitsizliği gereği $1 < |BD|$ olduğunu biliyoruz.

$$1 < |BD| < b + c$$

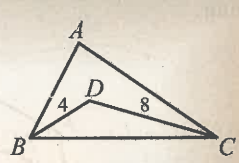
olduğundan $b + c$ toplamının en küçük değeri tam sayı olarak 2 olabilir. Diğer yandan, kanıtladığımız konkav dörtgen teoremi gereğince

$$12 + 13 > b + c$$

olduğundan en büyük değeri de 24'tür. O halde buradan cevabımız 24 + 2 = 26 olur.

Doğru cevap: C.

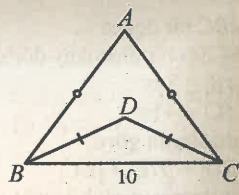
52.
ABC bir üçgen
D üçgen içinde bir nokta
$|BD| = 4$ br
$|DC| = 8$ br
olduğuna göre *ABC* ve *DBC* üçgenlerinin çevreleri toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 32 **B)** 33 C) 34 D) 35 E) 36

53.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta

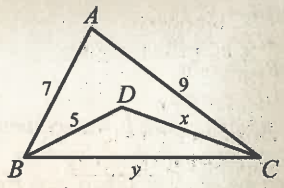
$|AB| = |AC|$
$|DB| = |DC|$
$|BC| = 10$ br



Şekildeki tüm uzunluk ölçüleri birer tam sayı ise *ABC* üçgeninin çevresi en az kaç br olabilir?

A) 21 B) 22 C) 23 **D)** 24 E) 25

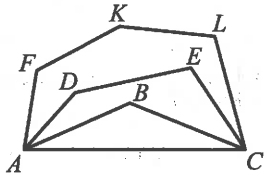
54.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$|CA| = 9$ br
$|AB| = 7$ br
$|BD| = 5$ br
$|DC| = x$ br
$|BC| = y$ br



y alabileceği en büyük tam sayı değerini aldığında, x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Aslında bu teorem, çok daha genel bir teoremin özel halidir.

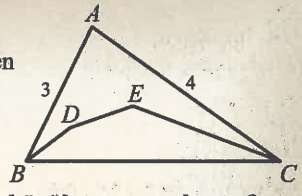


Dışbükey bir çokgen başka bir dışbükey çokgen tarafından çevreleniyorsa, dıştakinin çevresi daima içtekinin çevresinden büyüktür.

Yani yukardaki şekle göre;

$$|AB| + |BC| < |AD| + |DE| + |EC|$$
$$|AD| + |DE| + |EC| < |AF| + |FK| + |KL| + |LC|$$

55.
ABC bir üçgen
$BCED$ bir dışbükey dörtgen
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 4$ br
olduğuna göre
$|BD| + |DE| + |EC|$
toplamının alabileceği en büyük tam sayı kaçtır?



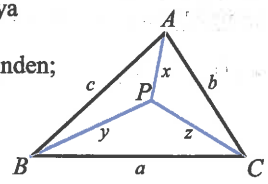
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Teorem. *Bir üçgenin iç bölgesinde alınan isteksel bir noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamı çevrenin yarısından (u) büyük, çevreden ($2u$) küçüktür.*

Yani, köşelere olan uzaklıklar x, y, z ise

$$u < x + y + z < 2u.$$

Kanıt: Rastgele alınan noktaya P diyelim. ADB, BDC, CDA üçgenlerinde üçgen eşitsizliğinden;



$$x + y > c$$
$$y + z > a$$
$$x + z > b$$

olur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$x + y + z > \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

bulunur. Yani; $u < x + y + z$. Bununla birlikte;

$$c + b > y + z$$
$$a + c > x + z$$
$$a + b > x + y$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

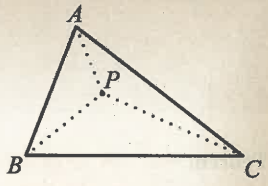
$$a + b + c > x + y + z$$

bulunur. Yani; $x + y + z < 2u$. Sonuç olarak;

$$u < x + y + z < 2u.$$

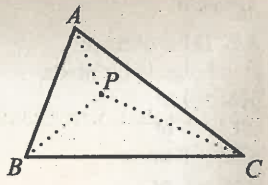
Uyarı: Burada önemli olan bir nokta var: Bu aralık, ölçüleri belli tek bir üçgen için en dar aralık değildir. Bir üçgen ailesi için en dar aralıktır, çevresi $a + b + c$ birim olan üçgenlerin ailesi gibi...

56.
ABC bir üçgen
P iç bölgede bir nokta
Çevre(ABC) = 16 br
olduğuna göre
$|PA| + |PB| + |PC|$
toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



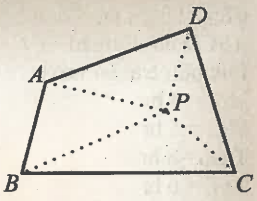
A) 8 B) 9 C) 10 D) 15 E) 16

57.
ABC bir üçgen
P iç bölgede bir nokta
Çevre(ABC) = 16 br
olduğuna göre
$|PA| + |PB| + |PC|$
toplamının alabileceği
en büyük tam sayı değeri kaçtır?



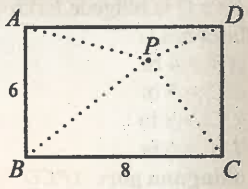
A) 15 B) 16 C) 20 D) 31 E) 32

58.
$ABCD$ bir dörtgen
P iç bölgede bir nokta
***ABCD* dörtgeninin köşegen**
uzunluklarının toplamı
10 br olduğuna göre
$|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$
toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?



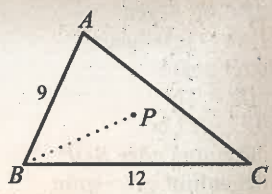
A) 5 B) 9 C) 10 D) 11 E) 20

59.
$ABCD$ bir dikdörtgen
P iç bölgede bir nokta
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$
toplamının alabileceği
en küçük değer kaçtır?



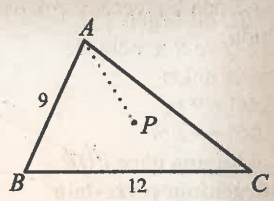
A) 20 B) 21 C) 22 D) 27 E) 28

60.
ABC bir üçgen
P iç bölgede bir nokta
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|BP|$'nin
alabileceği en büyük
tam sayı değeri kaçtır?



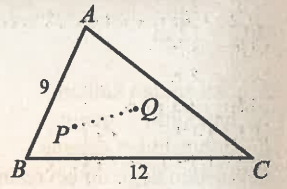
A) 8 B) 9 C) 10 **D) 11** E) 12

61.
ABC bir üçgen
P iç bölgede bir nokta
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|AP|$'nin
alabileceği en büyük
tam sayı değeri kaçtır?



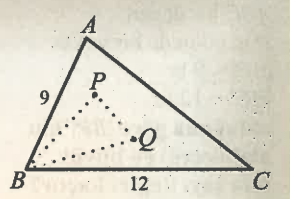
A) 8 B) 9 C) 15 D) 18 **E) 20**

62.
ABC bir üçgen
P ve Q iç bölgede
birer nokta
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|PQ|$'nun
alabileceği en büyük
tam sayı değeri kaçtır?



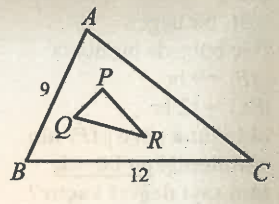
A) 11 B) 12 C) 15 D) 16 **E) 20**

63.
$|ABC|$ bir üçgen
P ve Q iç bölgede birer nokta
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|BQP|$ üçgeninin çevresinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 35 B) 36 C) 39 D) 40 **E) 41**

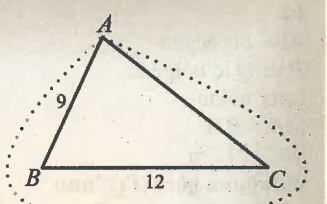
64.
$|ABC|$ bir üçgen
P, Q ve R iç bölgede birer nokta
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre $|PQR|$ üçgeninin çevresinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 35 B) 36 C) 39 D) 40 **E) 41**

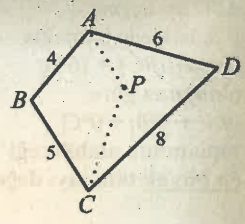
65.
$|ABC|$ bir üçgen
$|AB| = 9$ m
$|BC| = 12$ m

A noktasından kalkan bir hareketli, üçgenin dış bölgesinden üçgene değmeden üçgenin çevresini şekildeki gibi dolaşarak tekrar A noktasına geliyor.
Bu hareketlinin katettiği yol, tam sayı olarak en az kaç m dir?



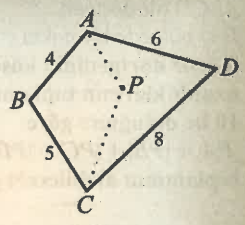
A) 24 **B) 25** C) 26 D) 36 E) 41

66.
$|ABCD|$ bir dörtgen
P iç bölgede bir nokta
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = 8$ br
$|DA| = 6$ br
olduğuna göre $|AP| + |PC|$ toplamının en küçük tam sayı değeri kaçtır?



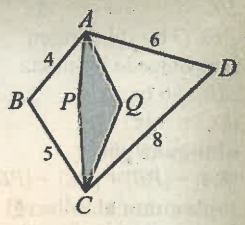
A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

67.
$|ABCD|$ bir dörtgen
P iç bölgede bir nokta
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = 8$ br
$|DA| = 6$ br
olduğuna göre $|AP| + |PC|$ toplamının en büyük tam sayı değeri kaçtır?



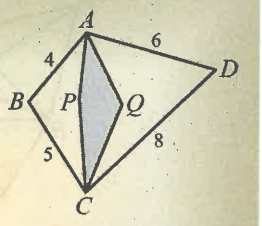
A) 8 B) 9 C) 12 **D) 13** E) 14

68.
$|ABCD|$ bir dörtgen
P ve Q iç bölgede farklı birer nokta
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = 8$ br
$|DA| = 6$ br
olduğuna göre $|APCQ|$ dörtgeninin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

69.
$ABCD$ bir dörtgen
P ve Q iç bölgede farklı birer nokta
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = 8$ br
$|DA| = 6$ br
olduğuna göre $APCQ$ dörtgeninin çevresinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 **E) 27**

FERMAT-TORICELLI NOKTASI

Üniversite sınavlarının geometri kısmıyla biraz olsun ilgilenen her öğrenci $u < x + y + z < 2u$ eşitsizliklerini görmüş olmalı. Bu eşitliksizlikler birçok üniversite hazırlık geometri kitabının ilk sayfalarını süsler, ama neden bilmem, önemli bir ayrıntı çoğu zaman hiçbir kitapta verilmez ve böylece öğrencilerin bu bilgiyi yanlış kullanmalarına neden olunur.

Soru: *Kenar uzunlukları 5, 7 ve 8 birim olan bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklıkları toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulunuz.*

Kitaptaki Yanıt: Önce çevreyi hesaplayalım: $5 + 7 + 8 = 20$, o zaman $u = 10$. Toplama s diyelim. $10 < s < 20$ olduğundan, s'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 11, en büyük tam sayı değeri ise 19'dur.

Bakalım bu yanıtlar şıklarda var mı? Eveeet, E şıkkı! ... Ne kadar kolaymış! Ama keşke yazar şıkları da doğru verseydi...

Bulunan eşitsizlik hatalı değil, $x + y + z$ toplamı her zaman u ile $2u$ arasındadır, bunu kanıtladık, ancak bu aralık, toplamın değişeceği en dar aralık olmayabilir. Hatta böyle bir en dar aralık yoktur bile! Yani toplamın en küçük tam sayı değeri u'dan büyük en küçük tam sayı olmayabilir, en büyük değerin de $2u$'dan küçük en büyük tam sayı olmayabileceği gibi... Örneğin, verilen üçgende $x + y + z$ toplamı hep sabit bir sayı (örneğin 15) olabilir, olamaz mı? Ya da $x + y + z$ toplamı o üçgende 10'la 20 arasındadır ama, ne bileyim ben, mesela 15'ın altına inmez, 17'nin üstüne çıkmaz... Olabilir... Olamazsa da olamayacağı kanıtlanmalı.

Nitekim her üçgende P noktası üçgenin içinde değiştikçe $x + y + z$ toplamı u ile $2u$ arasında her değeri almaz, bunu birazdan bir örnekle göstereceğiz.

Sorunun yanıtının gerçekten E şıkkı olabilmesi için üçgenin kenar uzunlukları değil, çevresi verilmeli. Yani çevresi 20 olan **tüm** üçgenlerde $x + y + z$ toplamı P noktası üçgenin içinde değiştikçe 10 ile 20 arasındaki her değeri alır.

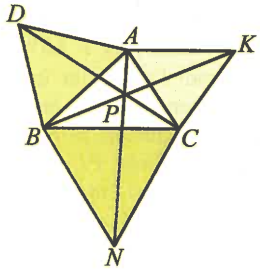
Verilmiş bir ABC üçgeninde, P noktası üçgenin içinde değiştikçe $x + y + z$ sayılarının aldığı değerler bir aralık oluştururlar, $[s, t]$, $(s, t]$, $[s, t)$ ya da (s, t) biçiminde bir aralık, çünkü P noktası "deliksiz" bir mekân olan ABC üçgeninde değişmektedir ve $x + y + z$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Yukarda kanıtladığımız teoreme göre $u \le s \le t \le 2u$ olmalı. Ama s'nin u'ya, t'nin $2u$'ya eşit olabileceğini söyleyebilir miyiz?

Bu ünlü problem, Jean Pierre Fermat (1565-1601) tarafından ortaya atılmıştır. Aslı şöyle:

Soru: *İç açılarının her birinin ölçüsü 120°'den küçük olan bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklıkları toplamının en küçük olması için nokta nerede alınmalıdır?*

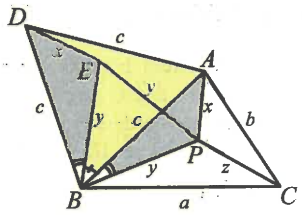
Böyle bir noktanın olmak zorunda olup olmadığını da şimdilik bilmediğimizi de ayrıca dikkatinize sunarız... Yıllar sonra, Galileo'nun öğrencisi olan barometrenin mucidi Evangelista Toricelli (1608-1647) bir çözüm üretmiş:

Teorem. *Bir ABC üçgeninde, köşelere olan uzaklıklarının toplamının en küçük olduğu nokta, üçgenin üç kenarı üzerinde üçgenin dışına doğru yandaki şekildeki gibi yerleştirilen eşkenar üçgenler için AA', BB', CC' doğrularının kesiştiği yerdir* [bu üç doğru kesişir!], *yani yandaki şekildeki P noktasıdır. P noktasının ayrıca şu özelliği vardır: $m(APB) = m(BPC) = m(CPA) = 120°$.*



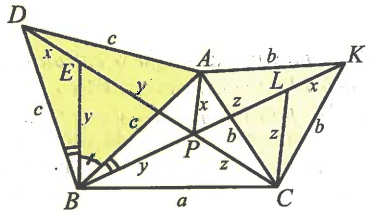
Bu P noktası bazı kaynaklarda **Fermat-Toricelli noktası** diye anılır.

Kanıt: Üçgenin içinde herhangi bir P noktası alalım.



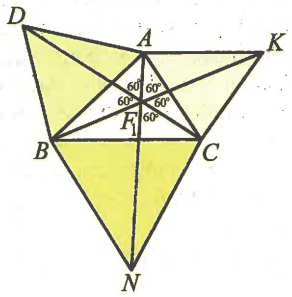
a, b, c, x, y ve z yukarda tanımlanan ve yandaki şekilde gösterilen uzunluklar olsun. BP ve AB üzerlerine AB kenarına doğru birer eşkenar üçgen çizelim. Bu iki eşkenar üçgene sırasıyla BPE ve ABD diyelim. Şimdi, $|BD| = |BA|$, $|BE| = |BP|$ ve $m(DBE) = 60^\circ - m(EBA) = m(ABP)$ eşitliklerinden DBE ile ABP üçgenleri eş çıkar. O halde $|DE| = |AP| = x$ olur. $DEPC$ kırık doğru parçasının boyunun $x + y + z$ olduğuna dikkat ediniz. Demek ki ABC üçgeni içinde alınan P noktası D, E, P, C noktalarını doğrusal yaparsa $x + y + z$ toplamı en küçük olur.

O halde soruyu çözülmüş gibi tekrar çizelim:



ABC üçgeninin AB kenarı üzerine üçgenin dışına doğru ABD eşkenar üçgenini çizelim. C ve D köşelerini birleştirelim. CD üzerinde $m(BPC) = 120^\circ$ olacak şekilde bir P noktası işaretleyelim. x, y ve z sayıları P noktasının sırasıyla A, B ve C noktalarına olan uzaklıkları olsun. $m(BPD) = 60^\circ$ olduğundan DP üzerindeki bir E noktası için BPE eşkenar üçgenini oluşturabiliriz. İstediğimiz gibi D, E, P, C noktaları doğrusal oldu.

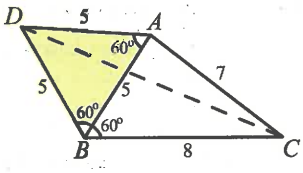
Aynen bir paragraf önce de yaptığımız gibi, $m(PBA) = 60^\circ - m(ABE) = m(EBD)$, $|PB| = |EB|$ ve $|AB| = |DB|$ olduğundan PBA ile EBD üçgenleri eştir. O halde $|AP| = |DE|$. Demek ki $|DC| = x + y + z$. Öte yandan $m(BPD) = 60^\circ = m(BAD)$ olduğundan $BPAD$ bir kiriş dörtgenidir. Buradan $m(DPA) = m(DBA) = 60^\circ$ bulunur. O halde $m(APC) = 120^\circ$. Şimdi PC üzerine üçgenin dışına doğru bir PCL eşkenar üçgeni çizelim. $m(BPC) + m(CPL) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ olduğundan, B, P, L noktalarının doğrusal olduğuna dikkat ediniz. PL'yi L yönünde $|AP|$ kadar uzatarak bir LK çizelim. $m(CLK) = 120^\circ = m(CPA)$, $|CL| = |CP|$ ve $|LK| = |PA|$ olduğundan CLK ile CPA üçgenleri eştir. Dolayısıyla $|CA| = |CK|$. Bunun yanı sıra, $m(LCK) = m(PCA) = 60^\circ - m(ACL)$ olduğundan $m(ACK) = m(ACL) + m(LCK) = 60^\circ$, ayrıca $|CA| = |CK|$ olduğundan ACK üçgeni de eşkenardır. Aynı çizim BC kenarı üzerinde de yapılabilir.



Sonuç olarak DC ile BK doğrularının arakesiti olan P noktası istenen noktadır. □ Biz bu noktayı Fermat noktası diye anacağız. F_1 ile göstereceğiz.

Doğru Yanıt. Sonuçta $|BK| = |CD| = x + y + z$ olduğundan $x + y + z$ toplamının en küçük değeri sorulduğunda, $[BK]$ veya $[CD]$'nin boyu hesaplanmalıdır.

Bu şekilden ayrıca neden üçgenin iç açılarının her birinin 120°'den küçük olduğunun belirtildiğini anlayabiliyoruz[1]. BAC açısının ölçüsünün 120° olması durumunda D, A, C ve B, A, K noktalarının doğrusal olacağına ve bu doğruların üçgenin A köşesinde kesişeceklerini, dolayısıyla noktamızın üçgenin iç bölgesinde olmayacağını anlıyoruz. BAC açısının 120°'den büyük olması durumunda ise Fermat noktası üçgenin dışında yer alıyor. Demek ki koşulları sağlayan noktanın üçgenin içinde bulunabilmesi, üçgenin iç açılarının her birinin 120°'den küçük olması ile mümkün. Şimdi, kenar uzunlukları 5, 7, 8 olan bir ABC üçgeninde toplamın en küçük değerini hesaplayalım:



ABC üçgeninde kosinüs teoremi gereğince $m(ABC) = 60^\circ$ bulunur. ABD eşkenar üçgen olduğundan $m(DBA) = 60^\circ$'dir, dolayısıyla $m(DBC) = 120^\circ$'dir. DBC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|DC| = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 5 \cdot 8}$$
$$= \sqrt{5^2 + 8^2 + 5 \cdot 8}$$
$$= \sqrt{129} \approx 11{,}35$$

bulunur. Demek ki; $11{,}35 \approx \sqrt{129} = a + b + c$, yani, toplamın alabileceği en küçük tam sayı değeri 11 değil 12 imiş. Eğer üçgenin kenarlarını üçle çarpıp 15, 21, 24 alsaydık, doğru değeri kitap 35 yerine 31 bulacaktı, daha büyük bir yanılgı!

[1] **Soru:** ABC üçgeninin iç açılarının biri 120°'den büyük olduğunda da Fermat noktası, yani $|AP| + |BP| + |CP|$'nin en küçük değeri aldığı bir nokta (üçgenin dışında da olsa) vardır. Bu nokta geometrik olarak nasıl bulunur?

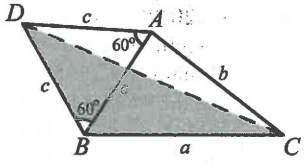
Gelelim toplamın en büyük değerine. Toplamın en büyük değere ulaştığı yer ise üçgenin en uzun iki kenarının kesiştiği köşedir [neden?] ama nokta üçgen içinde alınması gerektiğinden yani üçgenin üzerinde olamayacağından, bu köşeye mümkün olduğunca yakın alınmalıdır. O halde bu soru için $x+y+z<7+8=15$ olduğunu anlıyoruz. Yani $x+y+z$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri de 19 değil 14 imiş.

Fermat Uzaklığını Hesaplamak. Fermat noktası bir üçgenin içinde AF_1B, BF_1C, CF_1A açılarının eşit olduğu tek noktadır. Bu bilgiden hareketle $x+y+z$ toplamının en küçük değeri (Fermat uzaklığı) bu üç üçgende kosinüs teoremi ve bir miktar çarpanlara ayırma kuralları uygulanarak da bulunabilir. Bulalım.

Kenar uzunlukları a, b, c, çevresi $2u$ ve alanı Δ olan bir ABC üçgeninde, üçgenin içindeki bir F_1 noktası için, en küçük

$$|AF_1|+|BF_1|+|CF_1|$$

mesafesini bulacağız. Yandaki şekilden izleyin. Amacımız $[CD]$'nin uzunluğunu bulmak.



ABC üçgeninde B açısının ölçüsü β olsun. Kosinüs teoreminden $\cos\beta=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ bulunur. O halde

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}.$$

Buradan,

$$\cos(\beta+60^\circ)=\cos\beta\cdot\cos 60^\circ-\sin\beta\cdot\sin 60^\circ$$

formülünün de yardımıyla, $\cos(\beta+60^\circ)$ kolayca hesaplanır:

$$\cos(\beta+60^\circ)=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Şimdi DC uzunluğunu kosinüs teoreminden kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$|DC|^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta+60^\circ)$$

$$=a^2+c^2-2ac\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=a^2+c^2-\frac{1}{2}\left[c^2+a^2-b^2+\sqrt{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}\cdot\sqrt{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2)}\cdot\sqrt{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}\cdot\sqrt{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+\sqrt{2u(2u-2b)(2u-2c)(2u-2a)}\cdot\sqrt{3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\cdot\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]$$

Kenar uzunlukları a, b, c ve yarımçevresi u olan bir üçgensel bölgenin alanının $\Delta=\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ olduğunu hatırlayınız. Sonuç olarak,

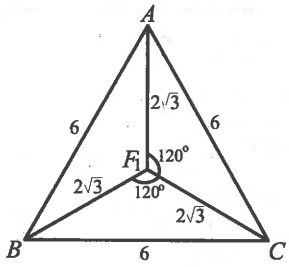
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\cdot\Delta}{2}}\le x+y+z<\max\{a+b,b+c,c+a\}$$

bulunur.

Örnek. *Bir kenarının uzunluğu 6 cm olan bir eşkenar üçgenin içinde alınan bir noktanın köşelere olan uzaklıkları toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

Çözüm: 'Bu toplam u ile $2u$ arasındadır' diyerek çözülürse, ki birçok geometri kitabında benzer sorular böyle çözülüyor, cevap 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 olmak üzere 8 bulunur. Oysa bu toplam 11'den başka tam sayı değeri alamayacağından cevap 1 olmalıdır.



Eşkenar üçgende Fermat noktasının ağırlık merkezi ile çakışık yani aynı nokta olduğunu görmek zor değildir. Şekilde $x=2\sqrt{3}$'tür. Teorem 4'de elde ettiğimiz sonuca göre; istenilen toplama S dersek, $6\sqrt{3}\le S\le 12$'dir. Bu koşulu sağlayan tam sayı sadece 11'dir.

Doğru cevap: A.

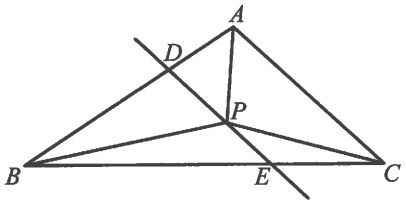
Şimdi de $x+y+z$ toplamının en büyük değerinin neden o olduğunu kanıtlayalım.

Teorem. *Bir üçgenin iç bölgesinde alınan rasgele bir noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamı daima üçgenin en uzun iki kenarının toplamından küçüktür.*

Kanıt: ABC üçgeninde genelliği bozmadan $|BC| \geq |BA| \geq |AC|$ kabul edelim. İç bölgesinde rasgele alınan nokta da P olsun. Kanıtlamamız gereken eşitsizlik

$$|PA| + |PB| + |PC| < |BA| + |BC|.$$

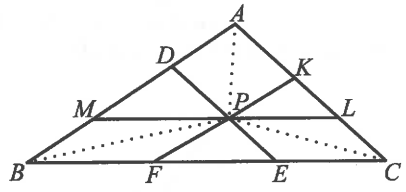
Birinci Yol. P'den geçen AC doğrusuna koşut bir doğru AB'yi D'de, BC'yi E'de kessin.



$BDE \sim BAC$ olduğundan BDE üçgeninde en uzun kenarın $[BE]$ ve $|BE| > |BP|$ olduğunu unutmuyoruz. Şimdi hesap yapalım:

$$\begin{aligned}|PA| + |PB| + |PC| &< (|PD| + |DA|) + |PB| + (|PE| + |EC|)\\ &= |DE| + |DA| + |PB| + |EC|\\ &\leq |DB| + |DA| + |PB| + |EC|\\ &= |BA| + |PB| + |EC|\\ &< |BA| + |BE| + |EC|\\ &= |BA| + |BC|.\end{aligned}$$

İkinci Yol. P'den geçen AC, BA ve BC doğrularına koşut doğrular bu doğruları şekildeki gibi kessin.



$MAL \sim BAC$ olduğundan,

$$|PA| \leq \max(|MA|, |AL|) = |MA|$$

$KFC \sim ABC$ olduğundan,

$$|PC| \leq \max(|KC|, |FC|) = |FC|$$

BMP'de üçgen eşitsizliğinden,

$$|PB| < |BM| + |MP| = |BM| + |BF|$$

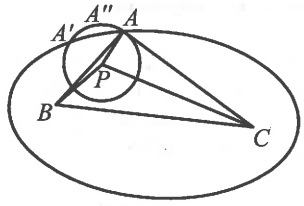
Bu üç eşitsizliği toplarsak sonuç çıkar:

$$\begin{aligned}|PA| + |PB| + |PC| &< (|BM| + |MA|) + (|BF| + |FC|)\\ &= |BA| + |AC|.\end{aligned}$$

Sonuç: *Doğrusal olmayan ve uzunlukları bilinen $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$ için $|AB| + |AC| + |BC|$ toplamı en büyük değerine, P noktası ABC üçgeninin iç çember merkezi olduğu an ulaşır.*

Sayısal verilerden ayrılıp tekrar genel formata dönüyoruz. Genelliği bozmadan $|PA| > |PB| > |PC|$ kabul edelim. A, B, P, C noktaları doğrusal olurlarsa $|AB| + |AC| + |BC|$ minimum olur. Bu minimum değer de $2(|PA| + |PC|)$ büyüklüğündedir. Ama bu haliyle ABC üçgen değildir. En küçük tam sayı değeri sorulsaydı eğer bu değerden büyük en küçük tam sayı cevap olacaktı.

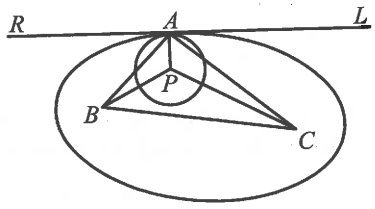
Çözüm: ABC üçgeni $x = |PA|$, $y = |PB|$ ve $z = |PC|$ olmak üzere çizilebilecek en büyük çevreli üçgen olsun.



P, B ve C noktalarının sabit olduğu düşünülürse, A noktası, P merkezli x yarıçaplı bir çember üzerinde hareket eder. A'dan geçen B ve C odaklı elips, bu çemberi başka bir noktada daha keser. Bu noktaya A' diyelim. Diğer yandan elipsin dışında ama çember üzerinde başka noktalar da görülür ki (A'' gibi) hem P'ye olan uzaklıkları x, hem de üçgenin çevresini daha büyük yapıyor. Elipsin üzerindeki her noktanın odaklara yani B'ye ve C'ye olan uzaklıkları toplamı sabittir ya, A'' noktası elipsin dışında diye yani. Bu durum bize maksimum çevreli üçgenin ne ABC ne de $A'BC$ olduğunu söyler. Çünkü $A''BC$ üçgeninin çevresi her ikisinden de daha büyük.

İşte bu yüzden elips ile çember birbirlerine teğet olmalı ve gerçek A noktası da bu teğet değme noktası olmalıdır.

Şimdi şeklimizi tekrar çizelim.

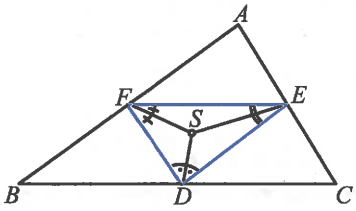


Ortak teğet doğrusuna yan şekilde gösterildiği üzere KL dersek; KL teğeti üzerindeki her S noktası için

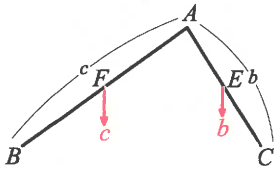
$$|SB| + |SC| > |AB| + |AC|$$

olur. Bu ise A noktasının B'den C'ye KL'ye uğramak üzere gidilebilecek yollardan en kısa olanının $|AB| + |AC|$ olduğunu anlatır. Doğrunun analitiği dersinden hatırlarsınız; A bu yolu en kısa yapan nokta ise $m(KAB) = m(LAC)$ olmalıdır. Aynı zamanda $PA \perp KL$ olduğundan $m(BAP) = m(CAP)$ olur. Benzer şekilde işlemler yaparak $m(CBP) = m(ABP)$ ve $m(ACP) = m(BCP)$ eşitliklerine de ulaşabiliriz. O halde maksimum çevreli ABC üçgeni için P noktası bu ABC üçgeninin iç çember merkezi olmalıdır.

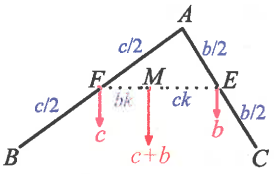
Spieker Noktası. Bir üçgenin orta üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir. **Spieker Merkezi** olarak da anılır.



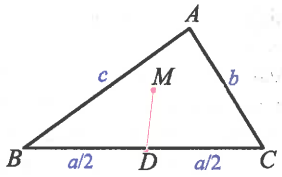
Bunu biliyor muydunuz? *Bir üçgenin ağırlık merkezi, kenarortayların kesim noktası değil, o üçgenin Spieker noktasıdır.*



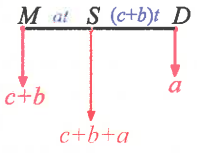
Şekil -1



Şekil -2

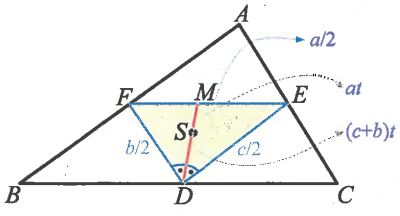


Şekil -3



Şekil -4

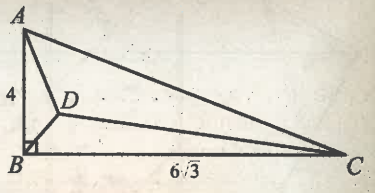
Şekil-1'deki gibi homojen iki tel parçası düşünelim. Bu iki telin ağırlık merkezi; her iki telin orta noktasını birleştiren doğru parçası üzerinde olup hangi tel parçası daha uzunsa, uzunluklarıyla ters orantılı olacak şekilde ona daha yakındır. Yani, bu AB ve AC tellerinin ağırlık merkezleri Şekil-2'de gösterildiği üzere M noktasıdır. Şimdi bu iki telin yanına BC telini getirip ABC üçgenini oluşturalım. İlk iki telin ağırlık merkezi ile üçüncü telin ağırlık merkezinin bileşkesi, üçgenin ağırlık merkezini verir. Görünen o ki Şekil-3'teki $[DM]$ üzerinde olacak. M noktasında $c + b$, D noktasında da a büyüklüğünde bir yük varmış gibi düşünelim. O halde bu iki yükün ağırlık merkezi Şekil-4'te gösterildiği üzere S noktasıdır.



Şekil-5

Şimdi de bu S noktasını Şekil-5'te üçgenin üzerinde gösterelim. FE orta taban olduğundan $|FE| = a/2$, $|DE| = c/2$, $|DF| = b/2$ ve $|DS|/|SM| = (|DF| + |DE|)/|FE|$ olduğundan S noktası DEF üçgeninin iç teğet çember merkezidir, yani ABC üçgeninin Spieker noktasıdır.

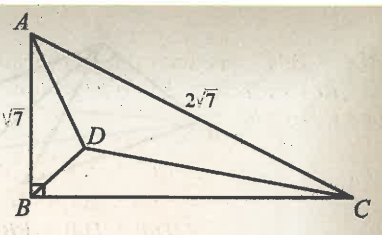
70.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 6\sqrt{3}$ br
$D \in (ABC)$



olduğuna göre
$|DA| + |DB| + |DC|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

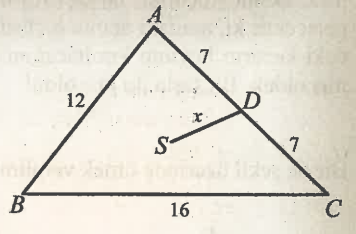
A) 13 **B) 14** C) 15 D) 16 E) 17

71.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = \sqrt{7}$ br
$|AC| = 2\sqrt{7}$ br
$D \in (ABC)$
olduğuna göre
$|DA| + |DB| + |DC|$ toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



A) 13 B) 14 C) 15 **D) 16** E) 17

72.
ABC bir üçgen
$|AB| = 12$ br
$|BC| = 16$ br
$|CD| = |DA| = 7$ br
$|SD| = x$ br
S noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezi (Spieker noktası) olduğuna göre x kaçtır?



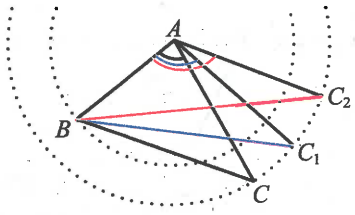
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 **E) 4**

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Pisagor Eşitsizlikleri

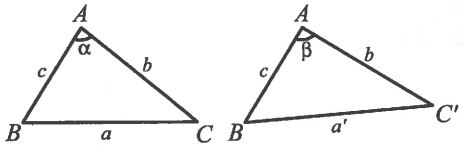
Açı Ölçüsünün Büyümesi/Küçülmesi. Bir üçgenin iki kenar uzunluğu sabitken, bu kenarların belirttiği açının ölçüsünü arttırırsak yani kenarları birbirinden uzaklaştırırsak, açının gördüğü kenar yani üçgenin üçüncü kenarı uzar. Benzer şekilde eğer, kenarları birbirlerine yakınlaştırırsak da üçüncü kenar kısalır. Bunu aşağıda resmetmeye çalıştım, inceleyiniz.



Örneğin, yukardaki ABC üçgeninin $[AB]$ kenarını sabit tutarak, $[AC]$ kenarını, boyunu değiştirmeden B'den uzaklaştırıyoruz. Yani C'yi önce C_1 konumuna, sonra C_2 konumuna getiriyoruz. Görüldüğü üzere $|BC|$ değeri önce $|BC_1|$'e, ardından da $|BC_2|$'ye uzuyor.

Yalnız burada ''açının ölçüsünü ne kadar büyütürsek karşıdaki kenar o kadar uzar'' demek yanlış olur. Zira üçgen, üçgenliğini bilmeli... Yani bu durum CAB açısının ölçüsü 180°'ye varıncaya kadar sürer. B, A, C noktaları doğrusal olduktan sonra C'yi hala aynı yönde hareket ettirirsek bu durum BAC açısının ölçüsünü büyültmez, aksine küçültür, bu da $|BC|$'nin kısalması anlamına gelecektir ki, aradaki açının ölçüsünü küçültmenin karşıdaki kenarın boyunu kısaltacağını da böylelikle izah etmiş olduk. Bir taşla iki kuş oldu!

Bir de şekil üzerinde örnek verelim:

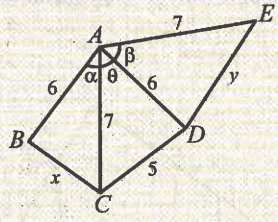


Yukardaki ABC ve ABC' üçgenleri için;

eğer $\beta > \alpha$ ise $a' > a$ olur

demek isteniyor.

Örnek. *ABCDE bir beşgen*
$|AB| = |AD| = 6$ br
$|AC| = |AE| = 7$ br
$|BC| = x$ br
$|CD| = 5$ br
$|DE| = y$ br
$m(BAC) = \alpha$
$m(CAD) = \theta$
$m(DAE) = \beta$



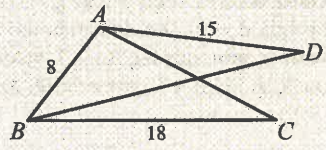
olup $\alpha < \theta < \beta$ *olduğuna göre x'in alabileceği farklı tam sayı adediyle y'nin alabileceği farklı tam sayı adedinin toplamı kaçtır?*

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

Çözüm: BAC, CAD ve DAE üçgenlerinin yan kenarlarının eşit uzunlukta olduğuna dikkat ediniz. $\alpha < \theta < \beta$ olduğundan $x < 5 < y$ olmalıdır. Bu eşitsizlikleri üçgen eşitsizliklerinden gelen $1 < x < 13$ ve $1 < y < 13$ eşitsizlikleriyle birleştirirsek $1 < x < 5 < y < 13$ elde edilir. Şu durumda x; 3 farklı, y de 7 farklı tam sayı değeri alabileceğinden cevabımız $3 + 7 = 10$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC ve ABD birer üçgen*
$m(BAD) > m(BAC)$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 18$ br
$|AC| = |AD| = 15$ br
olduğuna göre $|BD|$ *kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 15

Çözüm: ABC ile ABD üçgenlerinin yan kenar uzunlukları aynıyken $m(BAD) > m(BAC)$ olduğundan

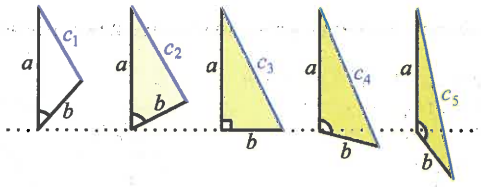
$$|BD| > |BC| = 18$$

olmalıdır. Üçgen eşitsizliğinden de $|BD| < 23$ olduğunu biliyoruz. O halde $|BD|$; 19, 20, 21, 22 olmak üzere 4 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: D.

Şimdi, uzunlukları sabit olan iki kenarın belirttiği açının ölçüsünü büyültme ve küçültme işlemlerini, 90°'lik bir açıyı baz alarak yapacağız.

Bu sabit iki kenarın boyları sözgelimi a br ve b br olsun. Şimdi a ve b değerleri sabit dururken, C açısının ölçüsüyle oynayalım bakalım, c değeri nasıl değişiyor?



Ortadaki şekilden $c_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğunu biliyoruz. C açısının ölçüsü küçüldükçe c değerinin kısaldığını, büyüdükçe c değerinin uzadığını görmek hiç de zor olmasa gerek. Yani yukardaki şekle göre

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$$

olmaktadır. İşte bu durumu Pisagor Bağıntıları adı altında toplayacağız.

Pisagor Bağıntıları. *Bir ABC üçgeninde*

$m(C) < 90°$ *isse* $c^2 < a^2 + b^2$

$m(C) = 90°$ *isse* $c^2 = a^2 + b^2$

$m(C) > 90°$ *isse* $c^2 > a^2 + b^2$

eşit(siz)likleri geçerlidir.

Eşitlik durumu zaten Pisagor Teoremi'nin ta kendisidir. Biz $m(C) < 90°$ veya $m(C) > 90°$ olduğunda n'apacağımızı izah edelim. Önce '$m(C) = 90°$ olsaydı, c kaç olurdu?' onu bulacağız, sonra da ''<'' veya ''>'' sembollerinden uygun olanını araya koyacağız... Tabii üçgen eşitsizliğini de unutmadan... Bu kadar!

Örnek. *Kenar uzunlukları*

(2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (6, 6, 9), (2, 7, 8)

olan üçgenlerin kaç tanesi geniş açılıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Eğer bir üçgen geniş açılıysa, geniş açının gördüğü kenar en uzundur. Biz de bu yüzden verilmiş kenar uzunluklarının en büyüğüne c, diğerlerine a ve b deyip

$$c^2 > a^2 + b^2$$

eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakacağız. Sağlanıyorsa geniş açılı diyeceğiz, sağlamıyorsa değil!

$$4^2 > 2^2 + 3^2$$
$$9^2 > 6^2 + 6^2$$
$$8^2 > 2^2 + 7^2$$

olduğundan (2, 3, 4), (6, 6, 9), (2, 7, 8) üçgenleri geniş açılıdır.

Doğru cevap: C.

1.

Kenar uzunlukları

(2, 2, 3), (3, 4, 4), (4, 5, 6), (4, 5, 7), (5, 7, 8)

olan üçgenlerin kaç tanesinde en büyük iç açı dardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

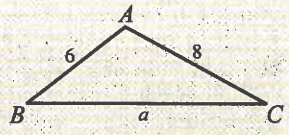
Örnek. *ABC bir üçgen*

CAB bir geniş açı

$|AB| = 6$ br

$|AC| = 8$ br

$|BC| = a$ br



olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: Nasıl ki eğer $m(A) = 90°$ olsaydı, Pisagor teoreminden hemencecik $a = 10$ olurdu diyorduk, şimdi de $m(A) > 90°$ diye $a > 10$ olmalıdır diyeceğiz. Tabii ki üçgen eşitsizliğini unutmadan... Unutan yandı! Üçgen eşitsizliği de bize $2 < a < 14$ olması gerektiğini söylüyor. Bu eşitsizlikleri birleştirirsek

$$10 < a < 14$$

olduğunu görürüz. Demek ki a; 11, 12, 13 olmak üzere 3 farklı tam sayı değeri alabilirmiş.

Doğru cevap: A.

2.

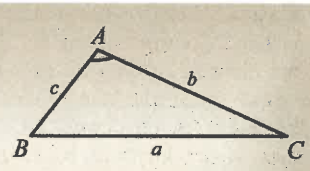
ABC bir üçgen

$|BC| = a$ br

$|CA| = b$ br

$|AB| = c$ br

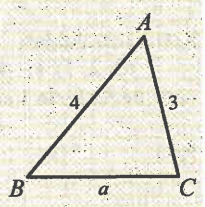
$b^2 + c^2 = 48$



olduğuna göre $a + b + c$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

Örnek. *ABC bir üçgen*
CAB bir dar açı
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 3$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

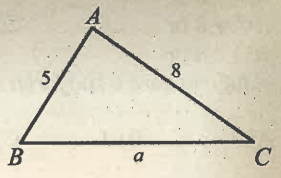


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $m(A) = 90°$ olsaydı, $a = 5$ olurdu ama bu soruda $m(A) < 90°$ diye $a < 5$ olmalıdır. Üçgen eşitsizliğinden de $1 < a < 7$ olması gerekiyor. Bu eşitsizlikleri birleştirirsek $1 < a < 5$ çıkar ki a; 2, 3, 4 olmak üzere 3 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

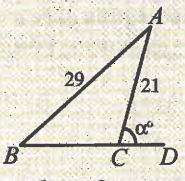
3.
ABC bir üçgen
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 8$ br
$|BC| = a$ br
$m(B) < m(A) < 90°$



olduğuna göre *a* kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 0 **B)** 1 C) 2 D) 3 E) 4

Örnek. *ABC bir üçgen*
B, C, D noktaları doğrusal
$|AC| = 21$ br
$|AB| = 29$ br
$m(ACD) = \alpha° < 90°$
olduğuna göre $|BC|$'nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



A) 134 B) 144 C) 154 D) 164 E) 174

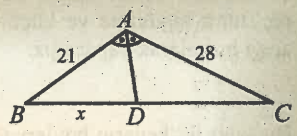
Çözüm: ACD açısının dar olması, ACB açısının geniş olması demektir. O halde $29^2 > 21^2 + |BC|^2$ eşitsizliğinden $400 > |BC|^2$ yani $|BC| < 20$ bulunur. Diğer yandan üçgen eşitsizliğinden $|BC| > 8$ olmalıdır. Sonuç olarak $|BC|$'nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı

$$9 + 10 + \ldots + 19 = 154$$

bulunur.

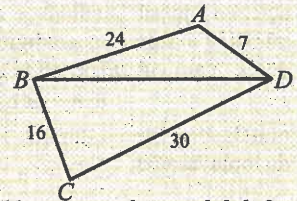
Doğru cevap: C.

4.
ABC bir üçgen
BAC geniş açı
$|AB| = 21$ br
$|AC| = 28$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre *x* kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 20 B) 14 C) 9 D) 7 E) 5

Örnek. *ABCD bir dörtgen*
$|AB| = 24$ br
$|BC| = 16$ br
$|CD| = 30$ br
$|DA| = 7$ br
$m(A) > 90°$
$m(C) < 90°$
olduğuna göre $|BD|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

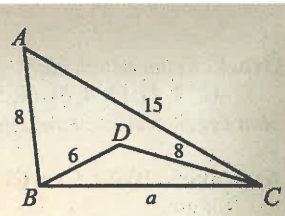


A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $|BD|$'ye e diyelim. $m(A) = 90°$ olsaydı, $e = 25$ olurdu, $m(A) > 90°$ diye $e > 25$ olmalıdır. Diğer yandan $m(C) = 90°$ olsaydı $e = 34$ olurdu, $m(C) < 90°$ diye $e < 34$ olmalıdır. Bu yüzden $25 < e < 34$ olmalı diyen yandı! Bir de üçgen eşitsizliğini incelemek zorundayız. ABD üçgeninde üçgen eşitsizliği gereğince $17 < e < 31$ olması gerektiğinden, e için $25 < e < 31$ doğru aralıktır. O halde e; 26, 27, 28, 29, 30 olmak üzere 5 farklı tam sayı değeri alabilir.

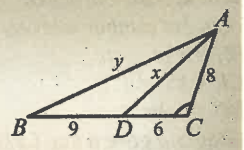
Doğru cevap: B.

5.
ABC bir üçgen
D iç bölgede bir nokta
$|CA| = 15$ br
$|AB| = 8$ br
$|BD| = 6$ br
$|DC| = 8$ br
$|BC| = a$ br
***A* açısı dar ve *D* açısı geniş olduğuna göre *a* kaç farklı tam sayı değeri alabilir?**



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

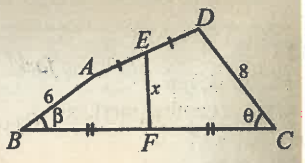
6.
ABC bir üçgen
$m(ACB) > 90°$
$|BD| = 9$ br
$|DC| = 6$ br
$|CA| = 8$ br



olduğuna göre $|AD| = x$ ve $|AB| = y$ değerlerinin birbirlerinden bağımsız olarak alabilecekleri en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

7.
$ABCD$ bir dörtgen
$|AB| = 6$ br
$|CD| = 8$ br
$|EF| = x$ br
$|AE| = |ED|$, $|BF| = |FC|$
$m(B) = \beta°$, $m(C) = \theta°$
$\beta + \theta > 90$



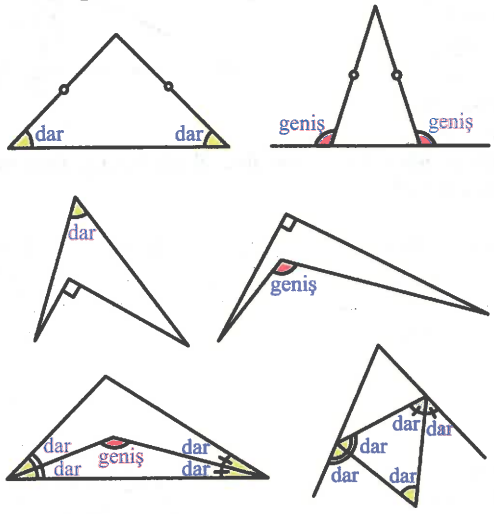
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

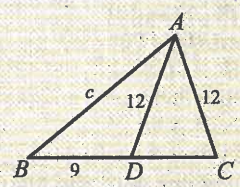
Gizli Darlık-Gizli Genişlik. Bazı geometrik şekillerde bazı durumlar, o şekle özgüdür ve hep öyledir. Bu onun bir karakteristik özelliğidir. Örneğin herhangi bir açı dar da dik de geniş de olabilir ama o açı bir ikizkenar üçgenin taban açılarından biriyse dardır ve ilelebet dar kalacaktır. Her zaman aynı olan böyle özellikler doğal olarak sorularda verilmez, bilinmeleri gerekir.

Örneğin, 'bir üçgenin taban açılarına ait açıortayların belirttiği açılardan tabana bakanı hep geniştir', 'bir üçgenin taban açılarının dış açıortaylarının belirttiği açılardan tabana bakanı hep dardır' gibi... Bu bilgiler sorularda verilmediği için biz bunlara gizli darlık veya gizli genişlik diyeceğiz. İnanmayacaksınız ama gizli diklik bile var ☺

En meşhur gizli darlık ve gizli genişlik soru tipleri aşağıdadır, bir göz atmanızda fayda var.

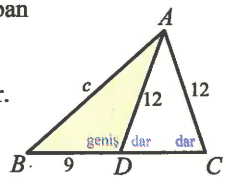


Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [BC]$
$|AC| = |AD| = 12$ br
$|BD| = 9$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



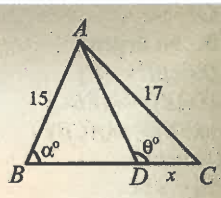
A) 4 B) 9 C) 13 D) 16 E) 20

Çözüm: Bir ikizkenar üçgenin taban açıları oldumolası dardır.
ADC açısı dar olduğundan
ADB açısı geniş olmak zorundadır.
$m(ADB) = 90°$ olsaydı $c = 15$ olurdu, $m(ADB) > 90°$ diye $c > 15$ olmalıdır. Şu durumda c'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 16'dır.



Doğru cevap: D.

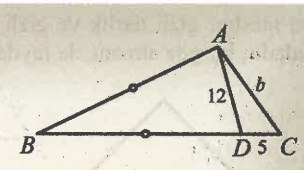
8.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = \alpha°$
$m(ADC) = \theta°$
$\alpha + \theta = 180$
$|AB| = 15$ br
$|AC| = 17$ br



olduğuna göre $|DC| = x$'in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

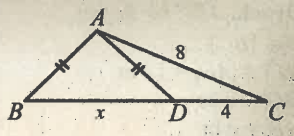
A) 25 B) 33 C) 42 D) 52 E) 63

9.
ABC bir üçgen
$D \in]BC[$
$|AB| = |BD|$
$|DC| = 5$ br
$|AD| = 12$ br
$|CA| = b$ br
olduğuna göre b'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



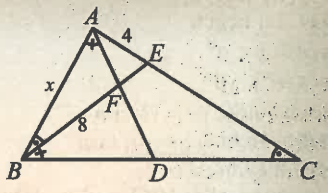
A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 **E)** 14

10.
ABC bir üçgen
$m(BAD) > 90°$
$|AB| = |AD|$
$|AC| = 8$ br
$|DC| = 4$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği tam sayı değeri kaçtır?



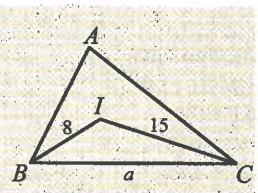
A) 4 B) 5 C) 6 **D)** 7 E) 8

11.
ABC bir üçgen
$AD \cap BE = \{F\}$
$m(DAB) = m(EBC)$
$m(ABE) = m(ACB)$
$|AE| = 4$ br
$|BF| = 8$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



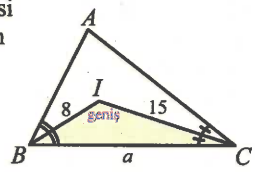
A) 3 B) 4 C) 7 D) 8 E) 9

Örnek. *ABC bir üçgen*
I iç teğet çember merkezi
$|IB| = 8$ br
$|CI| = 15$ br
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 15 E) 16

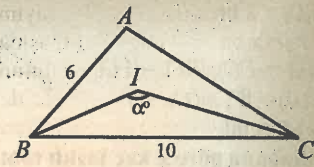
Çözüm: Burada dikkat edilmesi gereken tek nokta, BIC açısının geniş olduğudur. Neden mi? Üçgende açı dersinde
$m(BIC) = 90° + \frac{1}{2}m(A)$
olduğunu kanıtlamıştık.



$m(BIC) > 90°$ olduğu görüldüğünden $x^2 > 8^2 + 15^2$ yani $x > 17$ olmalıdır. Diğer yandan üçgen eşitsizliği gereği $7 < x < 23$ olduğunu biliyoruz. İki eşitsizlik birleştirilirse $17 < x < 23$ olur. O halde x; 18, 19, 20, 21, 22 olmak üzere 5 farklı tam sayı değeri alır.

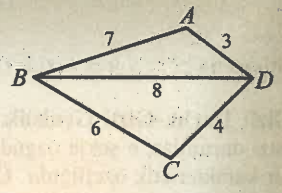
Doğru cevap: A.

12.
ABC bir üçgen
I iç teğet çember merkezi
$m(CIB) = \alpha°$
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 10$ br
$\alpha > 135$
olduğuna göre $|AC|$ tam sayı olarak en çok kaç olabilir?



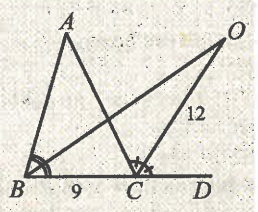
A) 6 **B)** 7 C) 8 D) 9 E) 10

13.
$ABCD$ bir dörtgen
$[BD]$ köşegen
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = 4$ br
$|DA| = 3$ br
$|BD| = 8$ br
olduğuna göre aşağıdaki açı ölçülerinden hangisi diğerlerinden daha büyüktür?



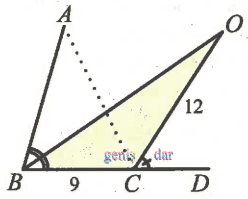
A) $m(ABC)$ B) $m(CDA)$ C) $m(BDA)$
D) $m(A)$ **E)** $m(C)$

Örnek. *ABC bir üçgen*
[BO iç açıortay
[CO dış açıortay
$|BC| = 9$ br
$|CO| = 12$ br
olduğuna göre $|BO|$'nun alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 4 B) 10 C) 15 D) 16 E) 20

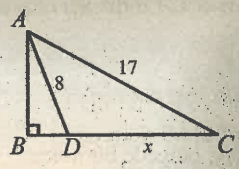
Çözüm: *ACD* geniş açı olsa bile onun yarısı olan *OCD* açısı her halükarda dardır, bu da *BCO* açısının daima geniş kalacağı anlamını taşır. Buna göre çözüm yaparsak; $|BO| > 15$ olmalıdır. Şu durumda $|BO|$'nun alabileceği en küçük tam sayı değeri 16'dır.



Doğru cevap: D.

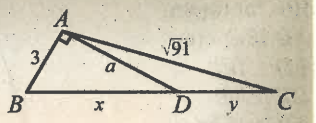
Yukardaki çözümde belki de şu soru aklınıza gelmiştir: ''*OBC* açısı da daima dardır, neden o darlık durumunu hesaba katmadık?'' Açıklayayım: Bir üçgende herhangi bir açının dar olması başlıbaşına ilginç bir şey değildir. Yani bir açının dar olması durumunda diğer açılar kısıtlanmazlar, diğerleri hala dar da olabilir, dik de, geniş de... Ama bir açının geniş olması, diğer açıları mecburen dar yapar. Genişlik durumunu çözmek demek, diğer açıların dar olma durumunu da çözmek demektir. Anlayacağınız *BCO*'nun geniş olduğunu gören ve ona göre çözüm yapan bir insan, zaten *OBC* açısının da dar olma durumunu gizlice halletmiş olur.

14.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$D \in]BC[$
$|AD| = 8$ br
$|AC| = 17$ br
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



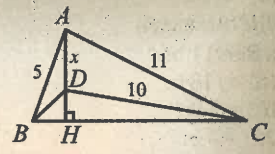
A) 2 B) 3 C) 4 **D) 5** E) 6

15.
ABC bir üçgen
$DA \perp AB$
$|AB| = 3$ br
$|AC| = \sqrt{91}$ br
$x > y$
olduğuna göre $|AD| = a$ tam sayı olarak <u>en az</u> kaç br olabilir?



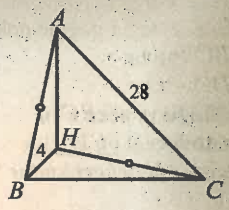
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 **E) 5**

16.
ABC bir üçgen
$AH \perp BC$
$|AB| = 5$ birim
$|AC| = 11$ birim
$|DC| = 10$ birim
$|AD| = x$ birim
olduğuna gore x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



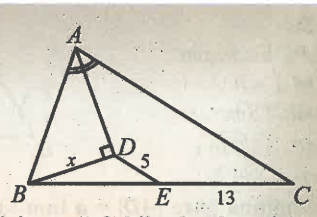
A) 0 **B) 1** C) 2 D) 3 E) 4

17.
ABC bir dar açılı üçgen
H diklik merkezi
$|AB| = |HC|$
$|BH| = 4$ br
$|AC| = 28$ br
olduğuna göre $|AH|$'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?



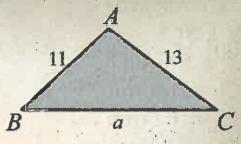
A) 17 B) 18 **C) 19** D) 20 E) 23

18.
ABC bir üçgen
AD iç açıortay
$BD \perp DA$
$DE \,//\, AC$
$|DE| = 5$ br
$|EC| = 13$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ için aşağıdakilerden hangisi geçerlidir?



A) $8 < x < 18$ B) $12 < x < 18$ **C)** $8 < x < 12$
D) $13 < x < 18$ E) $8 < x < 13$

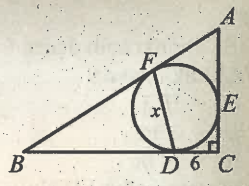
19.
ABC bir üçgen
$|AB| = 11$ br
$|AC| = 13$ br
$|BC| = a$ br



Hangi a tam sayısı için ABC üçgensel bölgesinin alanı diğer tam sayılara göre daha <u>büyük</u> olur?

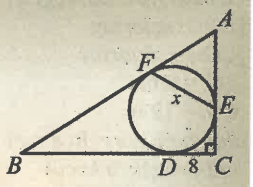
A) 16 **B)** 17 C) 18 D) 19 E) 20

20.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
D, E, F teğet değme noktaları
$|DC| = 6$ br
$|DF| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?



A) 7 B) 8 **C)** 9 D) 10 E) 11

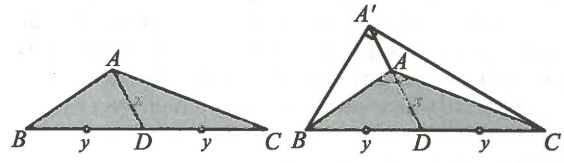
21.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
D, E, F teğet değme noktaları
$|DC| = 8$ br
$|EF| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?



A) 12 B) 13 C) 14 **D)** 15 E) 16

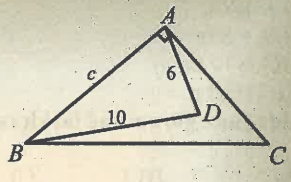
Örnek. *Bir ABC üçgeninde $|BC|$ değeri, $[BC]$'ye inen kenarortayın boyunun 2 katından büyükse A açısı için ne söylenebilir?*

Çözüm: Kenarortayın boyuna x br, $|BC|$'ye $2y$ br diyelim. Soruda anlatılmak istenen $y > x$ olduğudur.



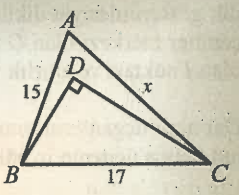
Sağ şekilden de görüleceği üzere x'i y olana kadar uzatırsak $CA'B$ dik açı oluyor, demek ki CAB geniş!

22.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
D iç bölgede bir nokta
$|DA| = 6$ br
$|DB| = 10$ br
$|AB| = c$ br
olduğuna göre c'nin alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 **E)** 9

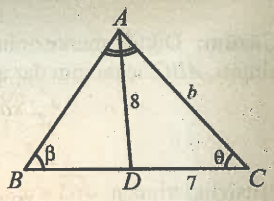
23.
ABC bir üçgen
D üçgenin iç bölgesinde
$CD \perp DB$
$|AB| = 15$ br
$|BC| = 17$ br
$|AC| = x$ br



olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

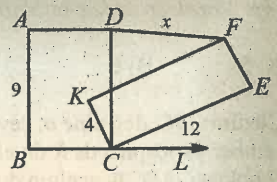
24.
ABC bir üçgen
$[AD]$ iç açıortay
$m(B) = \beta$
$m(C) = \theta$
$\beta > \theta$
$|AD| = 8$ br
$|DC| = 7$ br



olduğuna göre $|AC|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 13

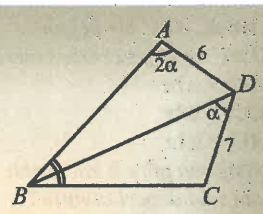
25.
$ABCD$ ve $CEFK$
birer dikdörtgen
$|AB| = 9$ birim
$|CK| = 4$ birim
$|CE| = 12$ birim
$|DF| = x$ birim



K noktası, $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 13 **B) 12** C) 11 D) 10 E) 9

26.
$ABCD$ bir dörtgen
$m(ABD) = m(CBD)$
$m(CDB) = \alpha$
$m(A) = 2\alpha$
ABC dar açı
$|AD| = 6$ br
$|DC| = 7$ br



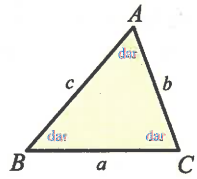
olduğuna göre A ile C köşeleri arasındaki uzaklık kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Bir açının dar olması değil ama üç açının da dar olması, kayda alınması gereken bir şeydir ama... Biz de aldık!

Dar Açılı Üçgen. Bir üçgenin iç açılarından en az iki tanesi daima dar açıdır. Üçgen, bu üçüncü açısının türüne göre isim alır zaten... Üçüncü açı genişse, üçgene **geniş açılı üçgen**, dik ise **dik üçgen**, dar ise **dar açılı üçgen** deriz. Anlamış olduğunuz üzere, dar açılı üçgenleri üç iç açısı da dardır. Dolayısıyla üç kenar içinde Pisagor bağıntısı geçerli olmalıdır. Şöyle ki;

$m(A) < 90°$ diye $a^2 < b^2 + c^2$
$m(B) < 90°$ diye $b^2 < c^2 + a^2$
$m(C) < 90°$ diye $c^2 < a^2 + b^2$
olmalıdır. Üçgen eşitsizliklerini de düşününce şu sonuç çıkar:



ABC bir dar açılı üçgense

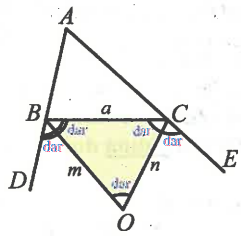
$$|b-c| < a < \sqrt{b^2+c^2}$$
$$|c-a| < b < \sqrt{c^2+a^2}$$
$$|a-b| < c < \sqrt{a^2+b^2}$$

En meşhur dar açılı üçgen, üçgenin iki dış açıortayıyla bir kenarının belirttiği üçgendir. Şimdi bu üçgenin neden dar açılı olduğunu anlatalım.

Sözgelimi üçgenimiz A olsun. B ve C'ye ait dış açıortaylar da O'da kesişsin. Daha önce ''açıortayların açıları'' dersinde

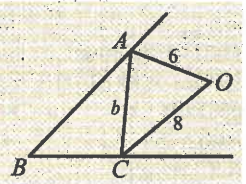
$$m(BOC) = 90° - \frac{m(A)}{2}$$

olduğunu kanıtlamıştık.



Demek ki BCO üçgeninde O açısı daima dar. Diğer yandan DBC ve ECB açıları geniş olsa bile OBC ve OCB açıları dar olacaktır. Bu yüzden BOC bir dar açılı üçgendir. Kenar uzunlukları yukarda verilen üç bağıntının üçünü de sağlamalıdır.

Örnek. *ABC bir üçgen*
O bir dış teğet çember merkezi
$|AO| = 6$ br
$|CO| = 8$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre b kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: O bir dış teğet çember merkezi ise ACO dar açılı üçgendir. Bu yüzden

$$b^2 < 6^2 + 8^2$$
$$6^2 < 8^2 + b^2$$
$$8^2 < b^2 + 6^2$$

eşitsizliklerinin hepsi birden sağlanmalıdır. Şu durumda

$$\sqrt{28} < b < 10$$

olması gerekiyor. O halde b; 6, 7, 8, 9 olmak üzere 4 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıda açı ölçüleri verilmiş üçgenlerin hangisinin kenar uzunluklarının kareleri de bir üçgen belirtir?*

A) 30°-60°-90° B) 40°-60°-80° C) 40°-50°-90°
D) 40°-40°-100° E) 30°-40°-100°

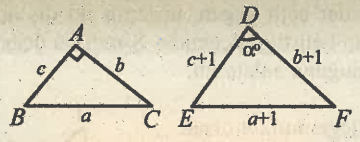
Çözüm: Asıl üçgenin kenar uzunlukları a br, b br ve c br olsun. a^2, b^2 ve c^2 değerlerinin üçgen belirtmesi demek

$$a^2 < b^2 + c^2$$
$$b^2 < c^2 + a^2$$
$$c^2 < a^2 + b^2$$

eşitliklerinin üçünün birden sağlanması demektir. Bu da asıl üçgenin dar açılı bir üçgen olması anlamına gelir. Şıklarda sadece B şıkkındaki üçgen dar açılı bir üçgendir.

Doğru cevap: B.

27.



Şekildeki DEF üçgeni, ABC dik üçgeninin kenar uzunluklarına 1 br eklenerek oluşturulmuştur.
$m(FDE) = \alpha°$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi daima doğrudur?

A) $\alpha < 90$ B) $\alpha = 90$ C) $\alpha > 90$
D) $ABC \cong DEF$ E) $m(B) = m(E)$

Üçgenin en önemli dört noktası, bildiğiniz üzere, bilindik gösterimleriyle diklik merkezi olan H noktası, çevrel çember merkezi olan O noktası, iç teğet çember merkezi olan I noktası ve ağırlık merkezi olan G noktasıdır.

Dar açılı üçgenlerin sanırım en özelliği, bu 4 özel noktanın daima üçgenin iç bölgesinde kalmasıdır.

Tamam, I ve G her daim üçgenin iç bölgesindedir fakat *sadece dar açılı üçgenlerde H ve O noktaları üçgenin iç bölgesinde kalır.*

Bazı soruları çözmek için bu bilgi gerekir. Şimdi o sorularla ilgilenelim:

Örnek. $|AB| = 9$ br *ve* $|BC| = 12$ br *olan bir ABC üçgeninin diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir. Buna göre* $|AC|$ *kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 3 B) 6 C) 7 D) 8 E) 17

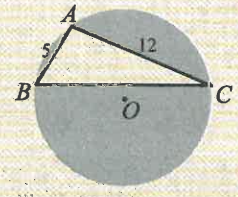
Çözüm: Diklik merkezinin üçgenin iç bölgesinde yer alması, ABC üçgeninin dar açılı olduğunu anlatır.

$$x^2 < 9^2 + 12^2$$
$$9^2 < 12^2 + x^2$$
$$12^2 < x^2 + 9^2$$

eşitsizliklerinden $\sqrt{63} < x < 15$ bulunur. O halde x; 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 olmak üzere 7 farklı tam sayı değeri alabilir.

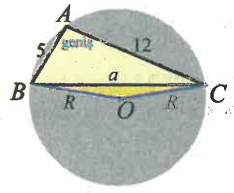
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
O çevrel çember merkezi
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 12$ br
O noktası ABC üçgeninin dış bölgesinde kaldığına göre, çevrel çemberin yarıçapı tam sayı olarak en az kaç br *olabilir?*



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $|BC|$ değerine a, çevrel çember yarıçapına da R diyelim. O noktası, ABC üçgeninin dış bölgesinde kalmışsa ABC üçgeninin geniş açılı bir üçgen olduğunu anlamalıyız. $[BC]$'nin arkasında kaldığı için de geniş olan açı, A açısıdır. Şimdi O'yu B ve C köşeleri ile birleştirelim. BOC'de üçgen eşitsizliğinden $2R > a$ olması gerektiğini biliyoruz. En küçük R'yi bulmak için en küçük a'yı aramalıyız. ABC üçgeninde Pisagor bağıntısına göre $a > 13$ olduğundan

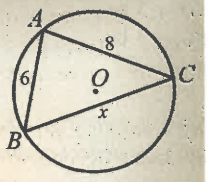


$$2R > a > 13$$

olmalıdır. Buradan R'nin alabileceği en küçük tam sayı değerinin 7 olduğu görülür.

Doğru cevap: C.

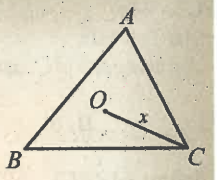
28.
O noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezidir.
Şekildeki gibi ABC üçgensel bölgesinin iç bölgesindedir.
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 8$ br



olduğuna göre $|BC| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

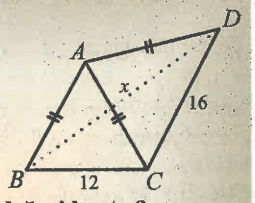
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 11

29.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
ve üçgenin iç bölgesindedir.
Çevre$(ABC) = 36$ br
olduğuna göre $|CO| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

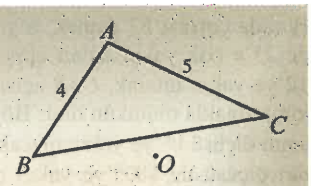
30.
$ABCD$ bir dışbükey dörtgen
$|AB| = |AC| = |AD|$
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 16$ br
$|BD| = x$ br



olduğuna göre x'in alabileceği en <u>küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 13 B) 17 C) 20 D) 21 E) 27

31.
ABC bir üçgen
O çevrel çember merkezi
$O \notin (ABC)$
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 5$ br

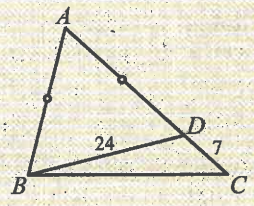


olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanının tam sayı olarak alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Şimdi sırada, birbirini direkt olarak etkileyen yani birbirlerine bağımlı hareket eden kenarlara sahip bir üçgende eşitsizlik sorusu var. Dikkatlice inceleyin lütfen!

Örnek. *ABC bir üçgen*
$D \in [AC]$
$|AB| = |AD|$
$|BD| = 24$ br
$|DC| = 7$ br
olduğuna göre Çevre(ABC) *tam sayı olarak en az kaç br olabilir?*



A) 57 B) 59 C) 61 D) 63 E) 65

Çözüm: ABD ikizkenar üçgen olduğundan taban açıları daima dardır. Bu yüzden BDC açısı daima geniştir, o halde $|BC| > 25$ olduğunu kesinlikle söyleyebiliriz. İkiz kenarların uzunluklarına a br dersek $2a > 24$ olması gerekir.

$$\text{Çevre}(ABC) = 2a + 7 + |BC|$$

olup $2a + 7 > 31$ ve $|BC| > 25$ olduğundan

$$\text{Çevre}(ABC) > 56$$

olmalıdır. O halde bu çevre en az 57 br olabilir.

Siz öyle sanın! ''Bu çözümde yapılan hatayı bulun'' diye bir soru sorsam sanırım sorunun kendisinden daha zor olur. ☺ Ben açıklamaya çalışayım.

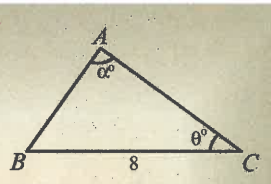
Çevre$(ABC) > 56$ olması bu çevrenin 57 br olabileceği anlamını taşımamakta, sadece 56'dan kesinlikle büyük olduğu anlamını taşımaktadır. Örneğin benim yaşımın 500'den küçük olduğu bir gerçektir ama bu 499 yaşında olabileceğim anlamına gelmez, onun gibi...

Burada cevaba 57 demek, a'yı 12'ye çok yakın, $|BC|$'yi de 25'e çok yakın kabul etmek demektir. Halbuki a'yı 12'ye yakın tutmak, CAB açısının ölçüsünü 180°'ye yakın tutmakla mümkün olur. Böyle bir durumda ADB açısının ölçüsü 0°'ye yakın olacak ve bu sayede BDC açısının ölçüsü de 180°'ye yakın olacaktır. O halde bu durumda $|BC|$ değeri 31'den küçük ama nerdeyse 31 br olur.

Şimdi gerekli toplam yapılırsa çevrenin 62 br den büyük olduğunu (B, A, D, C noktaları doğrusal olursa ancak 62 br olur) dolayısıyla en az 63 br olabileceğini anlarız.

Doğru cevap: D.

32.
ABC bir üçgen
$m(CAB) = \alpha^\circ$
$m(BCA) = \theta^\circ$
$\alpha + \theta > 90$
$\alpha > \theta$
$|BC| = 8$ br

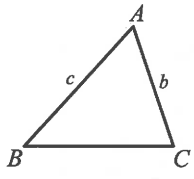


olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi tam sayı olarak en çok kaç br olabilir?

A) 28 **B) 27** C) 26 D) 25 E) 24

Her ne kadar başlığımız Pisagor bağıntıları olsa da, bazen bir üçgenin iki kenar uzunluğuyla birlikte bu kenarların belirttiği açının ölçüsünün 90°'den değil de bir başka özel ölçüden küçük veya büyük olduğu verilip üçüncü kenarın alabileceği değerler sorulur. O tip soruları da bu başlık altında inceleyeceğiz. Zira, nihayetinde çözüm için kullanacağımız mantık aynı...

Örneğin yandaki üçgende b ve c değerleri biliniyorken, A açısının 90°'den değil de 90'dan farklı bir α değeri için α°'den küçük veya büyük olduğu verilsin. Sonra da x'in alabileceği değerler sorulsun.

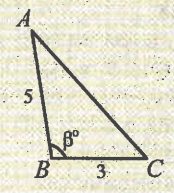


Önce, A açısının ölçüsü tam α° olduğunda $|BC|$'nin kaç olacağı özel üçgen özellikleri veya kosinüs teoremi yardımıyla bulunur. Bu değerin p olduğunu farzedelim. Gerisini $\alpha = 90$ iken ne yapıyorsak öyle yaparız.

$$m(A) < \alpha^\circ \text{ ise } |b-c| < x < p$$
$$m(A) > \alpha^\circ \text{ ise } p < x < b+c.$$

Diğer sınır değerlerini üçgen eşitsizliği yardımıyla bulduk.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 3$ br
$m(B) = \beta^\circ$
$\beta \leq 120$
olduğuna göre $|AC|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

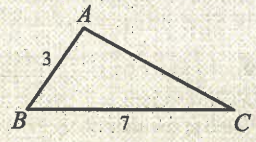


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\beta = 120$ olsaydı, daha önce özel üçgenler konusundan bildiğimiz 3-5-7 üçgeni gereği $|AC| = 7$ br olurdu. O halde $\beta < 120$ olduğundan $|AC| < 7$ olmalıdır. Diğer yandan üçgen eşitsizliğinden $2 < |AC| < 8$ olmalıdır. Sonuç olarak $|AC|$; 3, 4, 5, 6 olmak üzere 4 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1988 ÖSS].
ABC bir üçgen
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 7$ br
$m(ABC) < 60^\circ$
olduğuna göre $|AC|$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $m(ABC) = 60^\circ$ olsaydı, kosinüs teoreminden

$$|AC|^2 = 3^2 + 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot \frac{1}{2} = 37$$

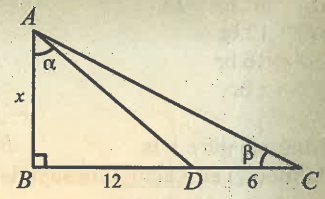
olduğundan $|AC| = \sqrt{37}$ br olurdu. $m(ABC) < 60^\circ$ olduğundan $|AC| < \sqrt{37}$ olmalıdır. Diğer yandan üçgen eşitsizliğinden gelen $4 < x < 10$ durumunu da düşünürsek,

$$4 < x < \sqrt{37}$$

olduğunu anlarız. Şıklarda bu aralıkta yaşayan sadece 6 değeri var.

Doğru cevap: B.

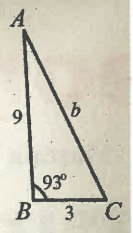
33.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|BD| = 12$ birim
$|CD| = 6$ birim
$m(DAB) = \alpha$
$m(DCA) = \beta$



$\beta < \alpha < 2\beta$ olduğuna göre $|AB| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

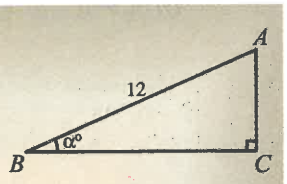
34.
$|AB| = 9$ br
$|BC| = 3$ br
$|CA| = b$ br
$m(ABC) = 93°$
olduğuna göre b kaç farklı değer alabilir?



A) 0 **B)** 1 C) 2 D) 3 E) 4

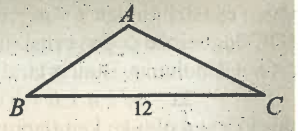
[Necmi Akbulut]

35.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|AB| = 12$ br
$m(ABC) = \alpha°$
$15 < \alpha < 22{,}5$
olduğuna göre $|BC|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



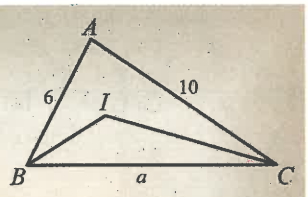
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 **E)** 0

36.
ABC bir üçgen
$m(CAB) > 90°$
$m(ABC) < 45°$
$m(BCA) < 45°$
$|BC| = 12$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



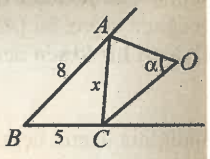
A) 3 **B)** 4 C) 5 D) 10 E) 16

37.
ABC bir üçgen
BI ve CI iç açıortay
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 10$ br
$m(CIB) < 150°$
$|BC| = a$ br
olduğuna göre a kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



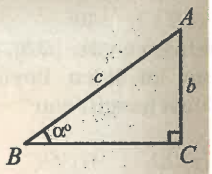
A) 6 B) 7 C) 8 **D)** 9 E) 10

38.
ABC bir üçgen
O dış teğet çember merkezi
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 5$ br
$|AC| = x$ br
$m(COA) = \alpha < 60°$
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 4 **B)** 5 C) 6 D) 7 E) 8

39.
ABC bir dik üçgen
$BC \perp CA$
$|CA| = b$ br
$|AB| = c$ br
$m(CBA) = \alpha°$
$\sqrt{2}b < c < 2b$
olduğuna göre α kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 14 B) 15 C) 16 D) 44 E) 89

Geometri Notları

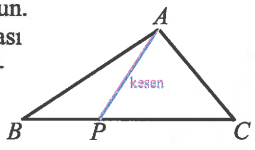
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kesen Eşitsizlikleri

Yavaş yavaş ''Kenar-Açı Bağıntıları'' notlarının da sonuna geliyoruz. Son başlığımız bir üçgende ''Kesenlerle İlgili Eşitsizlikler''.

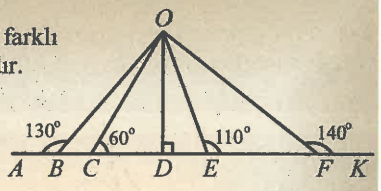
Önce 'kesen'in ne olduğunu hatırlayalım: Bir üçgenin bir köşesini, o köşenin karşısındaki kenar üzerinde bir noktaya birleştiren doğru parçasına o üçgene ait bir **kesen** denir.

Sözgelimi, üçgenimiz ABC olsun. $[BC]$ üzerinde keyfi bir P noktası alalım. Yan şekilden de görebileceğiniz üzere, bu $[AP]$'ye ***A*'ya ait bir kesen** denir.



Bildiğiniz üzere, üçgenin yardımcı elemanları dediğimiz kenarortay, açıortay ve yüksekliklerin hepsi birer kesendir.. Öncelikle, hiçbir özelliği olmayan kesenlerle ilgili eşitsizlikleri vereceğiz, ardından aynı durumları kenarortay, açıortay ve yükseklik için inceleyip kimilerini genelleyecek, kimilerini formülleyeceğiz. Ufak ufak başlayalım:

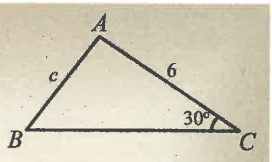
1.
A, B, C, D, E, F, K farklı doğrudaş noktalardır.
$OD \perp AK$
$m(ABO) = 130°$
$m(OCK) = 60°$
$m(OEK) = 110°$
$m(OFK) = 140°$



olduğuna göre $|OB|$, $|OC|$, $|OD|$, $|OE|$, $|OF|$ uzunluklarını küçükten büyüğe sıraya dizdiğimizde baştan ikinci hangisi olur?

A) $|OB|$ B) $|OC|$ C) $|OD|$ **D)** $|OE|$ E) $|OF|$

2.
ABC bir üçgen
$m(C) = 30°$
$|CA| = 6$ br
$|AB| = c$ br

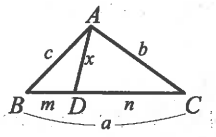


olduğuna göre c'nin en geniş değer aralığı hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $(3, 6)$ B) $[3, 6)$ C) $[3, 6]$
D) $(3, +\infty)$ **E)** $[3, +\infty)$

Teorem. *Bir üçgende bir kesenin boyu daima o üçgenin yarımçevresinden kısadır.*

Kanıt: Üçgenimiz ABC, kesenimiz de şekildeki gibi $[AD]$ olsun. Uzunlukları da şekildeki gibi adlandıralım. ABD üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $x < m + c$, ADC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $x < n + b$ bulunur. Bunlar taraf tarafa toplanırsa

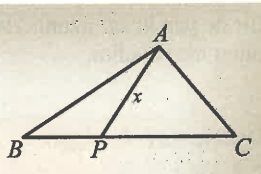


$$2x < m + n + b + c = a + b + c = 2u$$

olur ki $x < u$ olduğu kanıtlanmış olur.

Şöyle bir yorum da yapılabilir:
Kesenin boyu ne zaman en az olur? D noktası A'ya ait yükseklik ayağı olduğu zaman... Demek ki D, yükseklik ayağı konumundan B'ye doğru da hareket etse, C'ye doğru da hareket etse $|AD|$ yani x değeri artacaktır, ama hiçbir zaman b ile c'den hangisi büyükse onu geçemeyecektir. E daha önce 'üçgen eşitsizliği' notlarında bir üçgenin her kenarının da yarımçevreden kısa olduğunu kanıtlamıştık. Madem ki kesenin boyu, en uzun kenarın boyunu geçemiyor, o halde o da onun gibi yarımçevreden kısa kalmaya mahkum!

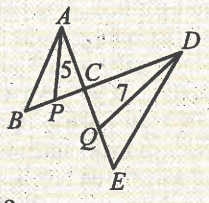
3.
ABC bir üçgen
$P \in [BC]$
Çevre(ABC) = 13 br
$|AP| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 7

Kesenin uzunluğunun yarımçevreden kısa olması, çevrenin uzunluğunun kesenin uzunluğunun 2 katından uzun olmasını da taşır. Aşağıdaki soru bunla alakalı:

Örnek. *ABC ve CDE birer üçgen*
$P \in [BC]$
$Q \in [CE]$
$|AP| = 5$ br
$|DQ| = 7$ br
olduğuna göre ABC ve CDE üçgenlerinin çevreleri toplamı tam sayı olarak en az kaç br olabilir?



A) 12 B) 13 C) 24 D) 25 E) 26

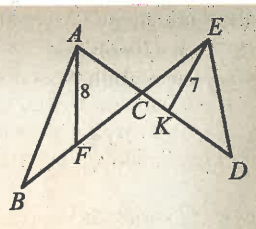
Çözüm: Biraz önce kanıtladığımız teorem gereğince hemen Çevre(ABC) > 10 ve Çevre(CDE) > 14 eşitsizliklerini yazalım. Bu çevrelerin toplamı sorulduğundan eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\text{Çevre}(ABC) + \text{Çevre}(CDE) > 24$$

olur ki buradan cevap 25 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

4.
ABC ve CDE birer üçgen
$|AF| = 8$ br
$|DK| = 7$ br
olduğuna göre ABC ve CDE üçgenlerinin çevreleri toplamı tam sayı olarak <u>en az</u> kaç br olabilir?



A) 15 B) 16 C) 30 **D) 31** E) 32

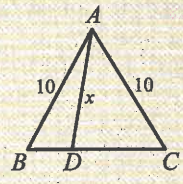
Uyarı. Burada, unutulmaması ve karıştırılmaması gereken bir noktaya da değinelim.

Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir üçgenle, çevresi $a + b + c$ br olan bir üçgende çıkacak sonuçlar değişiklik arz edebilir. Çünkü kenar uzunlukları belli olan üçgen tek iken, çevresi $a + b + c$ br olan üçgen tek değildir, örneğin kenar uzunlukları a br, $b + 1$ br ve $c - 1$ br olan üçgeni de içerir, kenar uzunlukları a br, $b + 2$ br, $c - 2$ br olan üçgeni de... Anlayacağınız, çevre uzunluğunun verilmesi çok daha genel bir durumdur.

Durumu sayısal bir örnekle izah etmeye çalışalım:

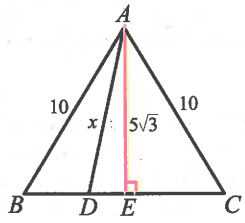
Çevresi 30 br olan bir üçgen düşünelim. Bu üçgene ait bir kesenin boyu 0,1 br olabileceği gibi 14,9 br de olabilir. Yeter ki aldığı değer 0'dan büyük 15'ten küçük olsun. Bir de bir kenarı 10 br olan eşkenar üçgeni masaya yatıralım bakalım, onda durum ne?

Örnek. *Bir kenar uzunluğu 10 br olan bir eşkenar üçgene ait bir kesenin boyu kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*



A) 1 B) 2 C) 9 D) 10 E) 14

Çözüm: $|AD|$'nin en küçük değerini, $[AD]$ yükseklik olduğunda alacağını biliyoruz.



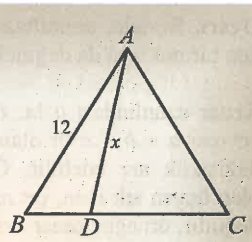
Üst şekildeki gibi eşkenar üçgenin yüksekliği olan $[AE]$'yi çizelim. D noktası, E olduğunda $|AD| = 5\sqrt{3}$ br oluyor. D noktası, E'den B'ye veya C'ye doğru hareket ettikçe $|AD|$ büyüyor ve 10'a yaklaşıyor. Tam B veya C'ye geldiğinde de 10 oluyor. O halde $|AD|$ için

$$5\sqrt{3} \le |AD| \le 10$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Şu durumda $|AD|$, 9'dan başka tam sayı değeri alamaz.

Doğru cevap: A.

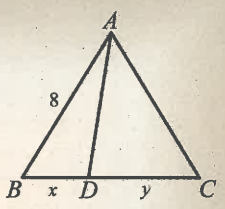
5.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in]BC[$
$|AB| = 12$ br
$|AD| = x$ br
x tam sayı
olduğuna göre x kaçtır?



A) 8 B) 9 C) 10 **D) 11** E) 12

6.
ABC bir eşkenar üçgen
$D \in]BC[$

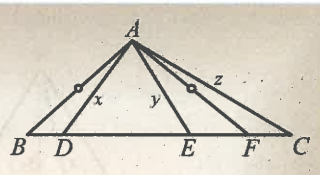
$|AB| = 8$ br
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br



$|AD|$ bir tam sayı olduğuna göre $|x - y|$ kaçtır?

A) 0 B) 1 **C) 2** D) 3 E) 4

7.
ABC bir üçgen
B, D, E, F, C farklı doğrudaş noktalar
$|AB| = |AF|$
$|BD| = |FC| < |EF|$

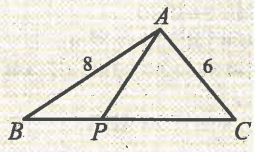


Şekilde x, y, z ile belirtilen uzunluk ölçüleri için aşağıdaki sıralamaların hangisi doğrudur?

A) $x < y < z$ **B)** $y < x < z$ C) $y < z < x$
D) $x = z < y$ E) $y = x < z$

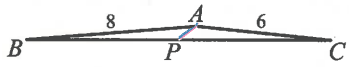
Bir de yan kenar uzunlukları belli olan bir üçgendeki durumu inceleyelim.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$P \in [BC]$
$|AB| = 8$ br
$|AC| = 6$ br
olduğuna göre $|AP|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: ABC belli bir üçgen olmadığı için $|BC|$'yi, üçgen eşitsizliklerini sağlamak üzere, keyfi olarak alabiliriz. Aslında bu, A açısının ölçüsüyle oynayabiliriz demenin bir başka yoludur. A açısının ölçüsünü nerdeyse 180° olacak biçime getirirsek,

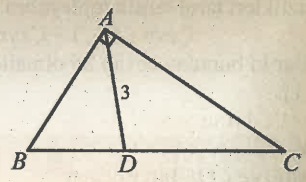


üst şekilden de görüleceği üzere; üçgen, doğru parçası gibi görünmeye ramak kalmış bir hal alır. Bu da $|AP|$'nin 0'a istenildiği kadar yaklaştırılabileceği anlamına gelir. Şimdi gelelim $|AP|$'nin alabileceği en büyük değere... P noktası, B'ye veya C'ye yaklaştıkça $|AP|$ büyür. Fakat $|AB| > |AC|$ olduğundan, tercihimiz P'yi, C'ye değil, B'ye yaklaştırmak olmalıdır. En sonda, yani P noktası B olduğunda $|AP|$ en büyük değerini alır. Demek ki $0 < |AP| \leq 8$ olmalıdır. Yani $|AP|$, 8 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: D.

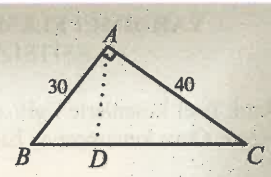
Not: Eğer soruda $P \in [BC]$ değil de $P \in]BC[$ denseydi, P noktasını B de alamazdık, C de... Öyle bir durumda da cevap $0 < |AP| \leq 8$ değil, $0 < |AP| < 8$ olurdu.

8.
ABC bir dik üçgen
$BA \perp AC$
$D \in]BC[$
$|AD| = 3$ birim
olduğuna göre
$|BC|$ tam sayı olarak en az kaç olabilir?



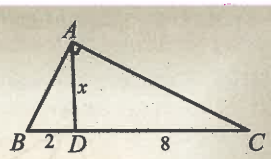
A) 3 B) 4 C) 5 **D) 6** E) 7

9.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$|AB| = 30$ br
$|AC| = 40$ br
$D \in [BC]$
olduğuna göre $|AD|$'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?



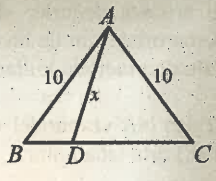
A) 1 B) 12 C) 18 **D) 24** E) 29

10.
ABC bir üçgen
$CA \perp AB$
$|BD| = 2$ br
$|DC| = 8$ br
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



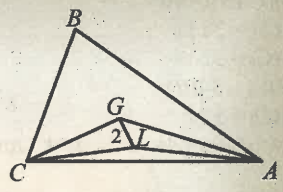
A) 1 B) 2 C) 3 **D) 5** E) 7

11.
ABC bir üçgen
$60° < m(CAB) < 90°$
$|AB| = |AC| = 10$ br
$D \in]BC[$
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



A) 11 B) 13 C) 15 **D) 17** E) 27

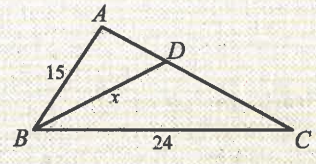
12.
ABC üçgeninde
G ağırlık merkezi
AGC üçgeninde
L ağırlık merkezi
$|GL| = 2$ br
olduğuna göre
B'nin AC'ye en fazla uzaklığı kaç br olabilir?



A) 6 B) 7 C) 8 **D) 9** E) 10

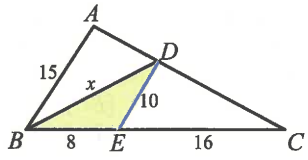
Şimdiyse, kestiği kenarı hangi oranda kestiği bilinen kesenlerle ilgili birkaç eşitsizlik sorusu çözeceğiz. İç açıortay, dış açıortay ve kenarortayda da kesme oranı belli olduğundan, burada kullandığımız metodu onlarla ilgili eşitsizliklerde de kullanabiliriz. Bu yüzden kulakları dört açın lütfen…

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 15$ br
$|BC| = 24$ br
$|CD| = 2 \cdot |DA|$
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

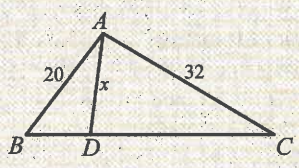
Çözüm: D'den AB'ye paralel çizilen doğru BC'yi E'de kessin.



Tales teoremi gereğince $|EC| = 16$ br ve $|BE| = 8$ br olur. DEC ile ABC'nin 2 : 3 oranındaki benzerliğinden $|DE| = 10$ br olur. BED'de üçgen eşitsizliğinden $2 < x < 18$ bulunur ki x, 3'ten 17'ye kadar 15 farklı tam sayı değeri alabilir.

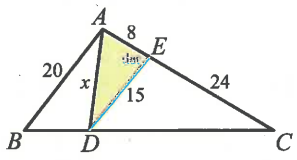
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(CAB) > 90°$
$|AB| = 20$ br
$|AC| = 32$ br
$|DC| = 3\cdot|BD|$
$|AD| = x$ br
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 17 B) 15 C) 13 D) 11 E) 9

Çözüm: D'den AB'ye paralel çizilen doğru BC'yi E'de kessin.

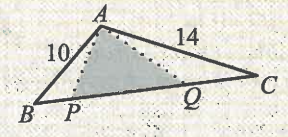


Tales teoremi gereğince $|EC| = 3\cdot|AE|$ olmalı, bu durumda $|AE| = 8$ br ve $|EC| = 24$ br olur. EDC ile ABC üçgenlerinin 3 : 4 oranında benzer olmasından dolayı da $|DE| = 15$ br olmalıdır.

Diğer yandan CAB açısı geniş diye ona yöndeş olan CED açısı da geniştir, bu yüzden DEA açısı dardır. DEA açısı dik olsaydı $x = 17$ olurdu ama $m(DEA) < 90°$ diye $x < 17$ olmalıdır. Aynı zamanda DEA üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $7 < x < 25$ olmalı diye, $7 < x < 17$ olduğunu anlarız. O halde x, 8'ten 16'ya kadar 9 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AB| = 10$ br
$|AC| = 14$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [BC]$
olduğuna göre APQ üçgeninin çevresi tam sayı olarak en çok kaç br *olabilir?*



A) 25 B) 26 C) 47 D) 48 E) 49

Çözüm: APQ üçgeninin çevresini mümkün olduğunca büyük tutmak isteyen biri P ve Q noktalarından birini mümkün mertebe B'ye yakın diğerini de C'ye yakın tutmalıdır. Hatta $P \in [BC]$ ve $Q \in [BC]$ verildiğinden P'yi B, Q'yu da C olarak alabiliriz. Yalnız şunu bilin ki; eğer $P \in]BC[$ ve $Q \in]BC[$ verilseydi böyle bir hakkımız olmazdı. Dolayısıyla ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en büyük tam sayı değeri cevap olacaktır. $|BC| < 24$ olduğundan Çevre$(ABC) < 48$'dir.

$$\text{Çevre}(APQ) \le \text{Çevre}(ABC) < 48$$

olduğundan Çevre(APQ) tam sayı olarak en çok 47 değerini alabilir.

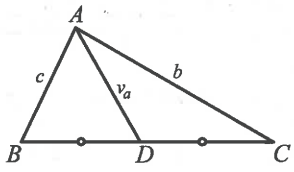
Doğru cevap: C.

YARDIMCI ELEMANLARLA İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

Artık özel kesenlerle ilgili eşitsizlik problemlerine geçiyoruz. Önce kenarortayla başlayalım.

Kenarortay Eşitsizlikleri. Üç kenar uzunluğu da belli olan üçgenlerde, üçgen belli olduğu için, her kenarortayın uzunluğu da belli olur ve o değerler için kenarortay teoremini kullanıyoruz zaten. Burada en azından bir verisi eksik olan üçgenlerde inceleme yapacağız ve kenarortayın boyunun hangi aralıkta değerler alabileceğini araştıracağız. İlk teoremimiz bununla ilgili:

Teorem. *İki kenar uzunluğu belli olan bir üçgenin, üçüncü kenarına inen kenarortayının boyu, uzunluğu belli olan kenarların uzunluklarının pozitif farkının yarısından büyük ama toplamlarının yarısından küçüktür.*



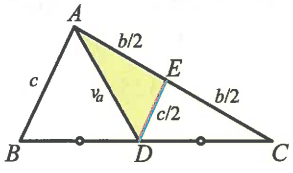
Yani; üstteki gibi A'dan inen kenarortayının boyu v_a olan bir ABC üçgeninde b ve c verilmişse,

$$\left|\frac{b-c}{2}\right| < v_a < \frac{b+c}{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt: Notların başında, eğer bir kesenin kestiği kenarı hangi oranda kestiği biliniyorsa, o kesenin boyunun hangi aralıkta değerler alacağını bulabilmeyi öğrenmiştik. Kenarortay için de bu oran belli (her zaman 1) olduğundan aynı metodu kullanacağız.

D'den AB'ye paralel çizilen doğru AC'yi E'de kessin. $[DE]$ orta taban olur.

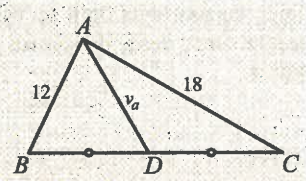


Bu yüzden $|DE| = c/2$ br ve $|AE| = |EC| = b/2$ br olur. DEA üçgeninde, üçgen eşitsizliği gereği

$$\left|\frac{b-c}{2}\right| < v_a < \frac{b+c}{2}$$

olduğu rahatlıkla kanıtlanır.

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] kenarortay
$|AB| = 12$ br
$|AC| = 18$ br
$|AD| = v_a$ br
olduğuna göre v_a *kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

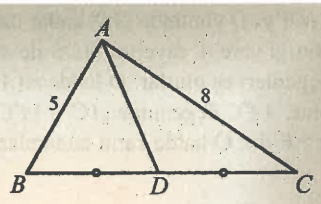
Çözüm: Kanıtladığımız teoremi kullanalım da hemen bitsin. Bu soruda $b = 18$ ve $c = 12$ olduğundan

$$3 < v_a < 15$$

olur. O halde v_a, 11 farklı tam sayı değeri alabilir.

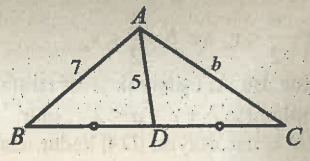
Doğru cevap: B.

13.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DC|$
$|AB| = 5$ br
$|AC| = 8$ br
olduğuna göre $|BD| = x$ **kaç farklı tam sayı değeri alabilir?**



A) 4 **B) 5** C) 6 D) 7 E) 8

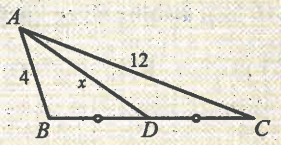
14.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DC|$
$|AB| = 7$ br
$|AD| = 5$ br
$|AC| = b$ br
olduğuna göre ***b*'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?**



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

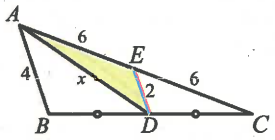
Darlık-Genişlik meselesi, tüm yardımcı elemanlarla ilgili eşitsizlik sorularına burnuna sokar. Şimdi öyle bir örnek çözelim:

Örnek. *ABC bir üçgen*
[AD] kenarortay
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 12$ br
$|AD| = x$ br
$m(B) = \alpha > 90^\circ$
olduğuna göre x'in alabileceği yegane tam sayı değeri kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

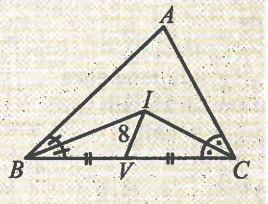
Çözüm: *D*'den *AB*'ye paralel çizilen doğru *AC*'yi *E*'de kessin. [*DE*] orta taban olur, boyu da 2 br olur.



Diğer yandan *EDC* açısı geniş olduğundan *CED* açısı dar, bundan dolayı *AED* açısı geniş olur. *AED* dik açı olsaydı $x = 2\sqrt{10}$ br olurdu. Bu durumda $2\sqrt{10} < x < 8$ eşitsizliği gereği x tam sayı olarak sadece 7 değerini alabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC bir üçgen*
BI ve CI iç açıortay
$|BV| = |VC|$
$V \in [BC]$
$|IV| = 8$ br
olduğuna göre
$|BC|$ *<u>tam sayı</u> olarak <u>en az</u> kaç* br *olabilir?*

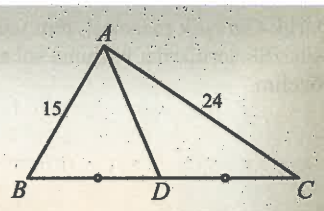


A) 9 B) 15 C) 16 D) 17 E) 25

Çözüm: Burada dikkat edilmesi gereken nokta, *BIC* açısının her zaman geniş olduğudur. Tam 90° olsaydı, muhteşem üçlü gereği $|BC| = 16$ olurdu ama $m(BIC) > 90^\circ$ olduğundan $|BC| > 16$'dır. O halde tam sayı olarak en küçük değeri 17 değerini alabilir.

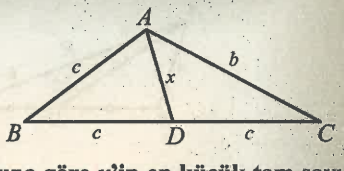
Doğru cevap: D.

15.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$|AB| = 15$ birim
$|AC| = 24$ birim
$m(CAB) < 120°$
olduğuna göre
$|AD|$'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



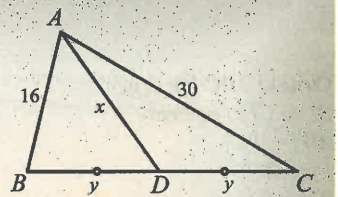
A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

16.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$|AD| = x$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
$|AB| = |BD| = |DC|$
olup $b + c = x^2$ olduğuna göre x'in en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17.
ABC bir üçgen
$[AD]$ kenarortay
$|AB| = 16$ br
$|AC| = 30$ br
$|AD| = x$ br
$|BD| = |DC| = y$ br
$x > y$ olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

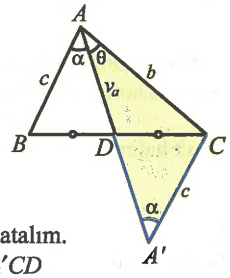


A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 11

Şimdi, kenarortayla ilgili açı eşitsizliklerine örnekler vereceğiz. Önce ilerde de işimize yaracak bir teoremle başlıyoruz:

Teorem. *Bir üçgenin bir kenarortayı, bitişik kenarlardan hangisi kısa boyluysa onunla daha büyük ölçülü açı yapar.*

Kanıt: Üçgenimiz ABC olsun. A'dan inen kenarortayı çizelim. Ayağı D olsun. $m(BAD) = \alpha$, $m(DAC) = \theta$, $|AB| = c$ br ve $|AC| = b$ br diyelim. $c < b$ verildiğini farzedelim. $\alpha > \theta$ olduğunu göstereceğiz.



$[AD]$'yi D yönünde $|AD|$ kadar uzatalım. Bittiği yere A' diyelim. ADB ile $A'CD$ üçgenleri eş olurlar. O halde $m(AA'C) = \alpha$ ve $|A'C| = c$ br olur. $AA'C$ üçgeninde $|AC| > |A'C|$ yani $b > c$ olduğu için $\alpha > \theta$'dır. O halde kanıt tamamlandı demektir.

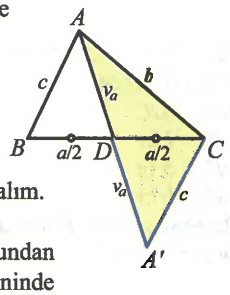
Şimdi bu şekli biraz daha kurcalayacağız. Yaptığımız bu ek çizim yeni eşitsizliklere gebe gibi…

Teorem. *Bir ABC üçgeninde $b + c - a < 2 \cdot v_a < b + c$.*

Kanıt: ADB ve ADC üçgenlerinde üçgen eşitsizliği gereğince

$$c - \frac{a}{2} < v_a \text{ ve } b - \frac{a}{2} < v_a$$

olur. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa $b + c - a < 2 \cdot v_a$ olur. AD kenarortayını $|DA|$ kadar uzatalım. Vardığımız noktaya A' diyelim. ADB ile CDA' üçgenleri eş olduğundan $|A'C| = |AB| = c$ br dir. $AA'C$ üçgeninde üçgen eşitsizliğine göre de



$$|AA'| < |AC| + |A'C|$$

yani $2 \cdot v_a < b + c$'dir. Bulduğumuz iki sonucu birleştirirsek

$$b + c - a < 2 \cdot v_a < b + c$$

bulunur.

Diyeceksiniz ki, v_a için zaten halihazırda bir eşitsizlik bulmuştuk. Bu ne işe yarar? Görün bakın, neye yarıyor:

Teorem. *Bir üçgende kenarortay uzunluklarının toplamı çevreden küçük ama çevrenin yarısından büyüktür.*

Yani; kenarortayları v_a, v_b, v_c olan bir üçgende yarımçevreye u denilirse

$$u < v_a + v_b + v_c < 2u.$$

Kanıt: Daha önce kenarortay için bulduğumuz eşitsizliği çembersel dönüşüm ile her kenarortay için yazalım:

$$b + c - a < 2\cdot v_a < b + c$$
$$c + a - b < 2\cdot v_b < c + a$$
$$a + b - c < 2\cdot v_c < a + b$$

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$a + b + c < 2\cdot v_a + 2\cdot v_b + 2\cdot v_c < 2a + 2b + 2c$$

olduğundan

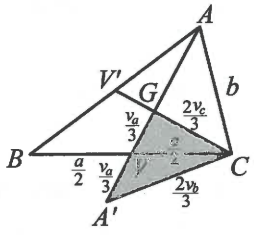
$$u < v_a + v_b + v_c < 2u$$

eşitsizlikleri kanıtlanmış olur.

Yalnız, $v_a + v_b + v_c$ toplamı için bulduğumuz bu aralık en dar aralık değildir.

Teorem. *Bir üçgende kenarortayların uzunlukları toplamı, çevrenin $\frac{3}{4}$'ünden büyüktür.*

Kanıt: AV ve CV' kenarortaylarının kesim noktası G olsun. AV'yi V yönünde $|GV|$ kadar uzatalım, vardığımız yere A' diyelim.



$A'VC$ ile GVB üçgenleri eş olduğundan $|A'C| = \frac{2}{3}v_b$ olur. $|CG| = \frac{2}{3}v_c$ ve $|GA'| = \frac{2}{3}v_a$ olduğunu zaten biliyoruz. O halde CGA' üçgeninde

$$a < \frac{2}{3}v_b + \frac{2}{3}v_c$$
$$b < \frac{2}{3}v_a + \frac{2}{3}v_c$$
$$c < \frac{2}{3}v_b + \frac{2}{3}v_a$$

olur. Bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$2u = a + b + c < \frac{4}{3}v_a + \frac{4}{3}v_b + \frac{4}{3}v_c$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki yanı $\frac{3}{4}$ ile çarpılırsa

$$\frac{3}{2}u < v_a + v_b + v_c$$

olur. Sonuç olarak,

$$\frac{3}{2}u < v_a + v_b + v_c < 2u$$

olduğu da kanıtlanmış olur.

18.
Bir ABC üçgeninin kenarortay uzunlukları v_a, v_b ve v_c dir.

$$v_a = 6 \text{ br}$$
$$v_b = 9 \text{ br}$$

olduğuna göre v_c kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Teorem. *Bir üçgene ait kenarortayların boyları, indikleri kenarların boylarıyla ters orantılıdır.*

Yani;

$$a > b > c \Leftrightarrow v_a < v_b < v_c$$
$$a < b < c \Leftrightarrow v_a > v_b > v_c$$

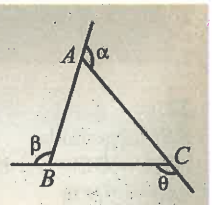
Buradaki ''ters orantı'' tabiri çarpımlarının sabit olması manasında değil, uzun kenara kısa yardımcı eleman, kısa kenara uzun yardımcı elemanın ineceği manasında kullanılmıştır.

Kanıt: Kenarortay formülüne bakalım:

$$2v_a^2 = b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

ifadesinde a'nın büyümesi v_a değerinin küçülmesine yol açacaktır. Bu yüzden ters orantı vardır.

19.
ABC üçgeninin kenarortaylarının uzunlukları sırasıyla v_a, v_b ve v_c br olsun.

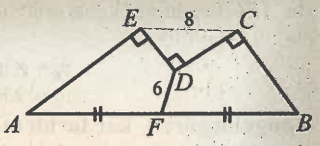


$$v_a < v_b < v_c$$

olduğuna göre ABC üçgeninin dış açı ölçüleri olan α, β ve θ için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?

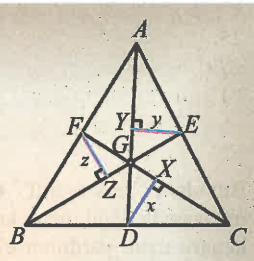
A) $\alpha < \beta < \theta$ B) $\alpha < \theta < \beta$ C) $\theta < \beta < \alpha$
D) $\theta < \alpha < \beta$ E) $\beta < \alpha < \theta$

20.
$ABCE$ dörtgeninde
$AE \perp ED$
$ED \perp DC$
$DC \perp CB$
$|AF| = |BF|$
$|DF| = 6$ br
$|EC| = 8$ br
olduğuna göre $|AB|$ en çok kaç br olabilir?



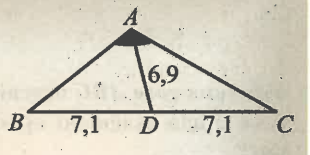
A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

21.
ABC üçgeninde
G ağırlık merkezi
$DX \perp CF$
$EY \perp AD$
$FZ \perp BE$
$|DX| = x$ birim
$|EY| = y$ birim
$|FZ| = z$ birim
$x < y < z$ olduğuna göre a, b, c arasındaki doğru sıralama aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < c < a$
D) $b < a < c$ E) $c < a < b$

22.
ABC üçgeninde
$|BD| = |DC| = 7{,}1$ br
$|AD| = 6{,}9$ br
olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi daima doğrudur?



A) BAC dar açıdır B) BAC dik açıdır
C) BAC geniş açıdır D) ABC ikizkenar üçgendir
E) ABC dar açılı üçgendir

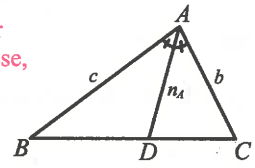
Açıortay Eşitsizlikleri. Üç kenar uzunluğu da belli olan üçgenlerde, üçgen belli olduğu için, her açıortayın uzunluğu da belli olur ve o değerler için iç açıortay veya dış açıortay teoremlerini kullanırız. Burada en azından bir verisi eksik olan üçgenlerde inceleme yapacağız ve açıortayın boyunun hangi aralıkta değerler alabileceğini araştıracağız. İlk teoremimiz bununla ilgili:

Teorem. *İki kenar uzunluğu bilinen bir üçgende, bu kenarlarla noktadaş olan iç açıortayın boyu, bu iki kenarın harmonik ortasından daha kısadır.*

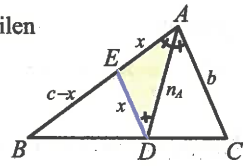
Yani; yandaki gibi A'dan inen iç açıortayının boyu n_A olan bir ABC üçgeninde b ve c verilmişse,

$$0 < n_A < \frac{2bc}{b+c}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.



Kanıt: D'den CA'ya paralel çizilen doğru BA'yı E'de kessin.
AED ikizkenar üçgen olur.
$|DE| = x$ br dersek, $|EA| = x$ br ve $|BE| = c - x$ br olur.



BED ile BAC üçgenlerinin benzerliğinden

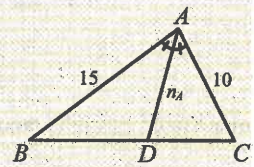
$$\frac{c-x}{c} = \frac{x}{b}$$

bulunur. Düzenlenirse $bc - bx = cx$ olur ki, buradan $x = \frac{bc}{b+c}$ çıkar. AED üçgeninde üçgen eşitsizliği gereği $0 < n_A < 2x$ olduğundan,

$$0 < n_A < \frac{2bc}{b+c}$$

eşitsizlikleri kanıtlanmış olur.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$[AD]$ iç açıortay
$|AD| = n_A$
$|AB| = 15$ br
$|AC| = 10$ br
olduğuna göre n_A kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

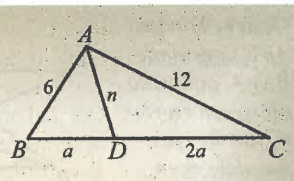
Çözüm: Boşa mı yorulduk, kanıtladığımız teoremi kullanalım. Bu soruda $b = 10$ ve $c = 15$ olduğu için

$$0 < n_A < \frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10+15} = 12$$

olmalıdır, o halde 1'den 11'e kadar 11 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

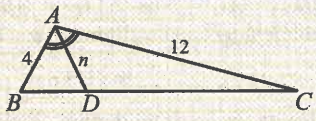
23.
ABC bir üçgen
$|AB| = 6$ br
$|AC| = 12$ br
$|BD| = a$ br
$|DC| = 2a$ br
$|AD| = n$ br
olduğuna göre n kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

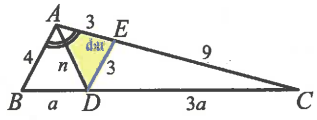
BAC açısının dar/geniş olması, AED üçgenini geniş/dar olarak etkileyeceğine de dikkat etmek gerekir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$[AD]$ iç açıortay
$m(BAD) > 45°$
$|AB| = 4$ br
$|AC| = 12$ br
$|AD| = n$ br
olduğuna göre n; 3, 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$, 5 değerlerinden kaç tanesini alabilir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: D'den AB'ye paralel olarak çizilen doğru AC'yi E'de kessin.



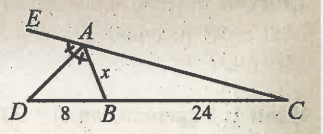
İç açıortay teoreminden $|BD| = a$ br ise $|DC| = 3a$ br olacağını biliyoruz. Bu oran Tales teoreminden $|AE|$ ve $|EC|$ arasındaki orana da yansır. O halde $|AE| = 3$ br ise $|EC| = 9$ br dir. Diğer yandan $m(BAD) > 45°$ olması $m(BAC) > 90°$ olması demektir ki buradan $AB \parallel DE$ diye hem $m(DEA)$ açısının dar olduğunu hem de AED ikizkenar olur diye $|DE| = 3$ br olduğunu anlarız. Şu durumda DEA üçgeninde üçgen eşitsizliği gereğince

$$0 < n < 3\sqrt{2}$$

olmalıdır. O halde n; 3, 4 ve $\sqrt{17}$ olmak üzere, şıklardaki değerlerden 3 tanesini alabilir.

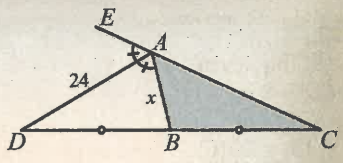
Doğru cevap: C.

24.
ABC bir üçgen
AD dış açıortay
$|DB| = 8$ br
$|BC| = 24$ br
$|AB| = x$ br
Buna göre x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



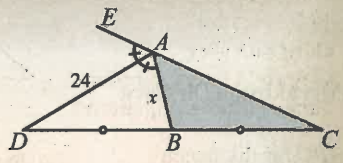
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

25.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
D, B, C doğrudaş
$|DB| = |BC|$
$|AD| = 24$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x'in en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 6 **B) 7** C) 8 D) 9 E) 10

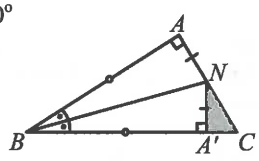
26.
ABC bir üçgen
$[AD]$ dış açıortay
D, B, C doğrudaş
$|DB| = |BC|$
$|AD| = 24$ br
$|AB| = x$ br
olduğuna göre x'in en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Teorem. *Bir dik üçgende, bir dar açının açıortayının karşı kenardan ayırdığı parçalardan dik açı tarafındaki daha küçüktür.*

Kanıt 1: Üçgenimiz $m(A) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeni olsun. B'ye ait iç açıortay ayağına N diyelim. $m(ABN) = m(NBC)$ ise $|NA| < |NC|$ olduğunu kanıtlayacağız. N'den BC'ye inilen dikme ayağına A' diyelim. BAN ile $BA'N$ üçgenleri eş olduğundan $|NA'| = |NA|$ olur. $A'CN$ dik üçgeninde $|NA'| < |NC|$ olduğundan $|NA| < |NC|$ bulunur.

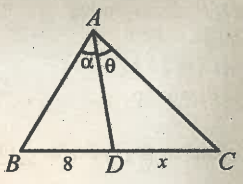


Kanıt 2: Bir üçgende hipotenüs en uzun kenar olduğundan $|BC| > |BA|$'dır. İç açıortay teoremi düşünülürse

$$\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|CN|}{|NA|}$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

27.
ABC bir üçgen
$|BD| = 8$ br
$|DC| = x$ br
$3\cdot|AB| = 2\cdot|AC|$
$m(CAD) = \theta$
$m(DAB) = \alpha$
$\alpha > \theta$



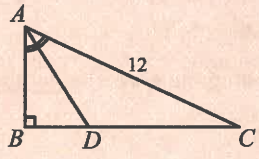
olduğuna göre x'in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 12 **B)** 11 C) 10 D) 9 E) 8

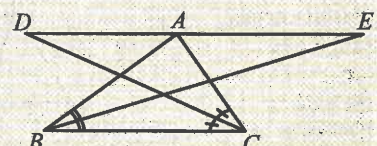
Meraklısına Bir Soru

ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|AC| = 12$ br

$0 < |BD| \leq ?$

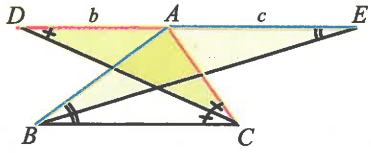


Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde B ve C açılarına ait iç açıortaylar A'dan BC'ye paralel geçen doğruyu sırasıyla E ve D noktalarında kesiyor. Buna göre aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?*



A) $|DA| = |AC|$ B) $|BA| = |AE|$ C) $|AB| + |AC| = |DE|$
D) $|DE| > |BC|$ E) $|DE| = |BE|$

Çözümü: $DE \parallel BC$ olduğundan $m(EDC) = m(DCB)$ ve $m(DEB) = m(EBC)$ olur.



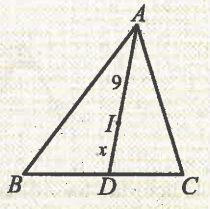
Bu da DAC ve BAE üçgenlerinin ikizkenar olduğu anlamına gelir ki bu sayede A, B, C şıkları doğrudur.

$|DA| = |AC| = b$ br ve $|AE| = |AB| = c$ br olsun. ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $a < b + c$ olduğunu biliyoruz.

Bu da $|BC| < |DE|$ demek olduğundan D şıkkı da doğrudur. O halde yanlış olan önerme E şıkkında olandır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir üçgen*
I iç teğet çember merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AI| = 9$ br
$|ID| = x$ br
olduğuna göre x tam sayı olarak en fazla kaç br *olabilir?*



A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 4

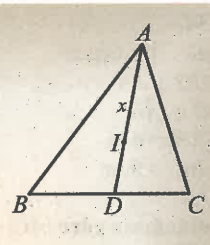
Çözüm: Üçgenin kenar uzunluklarını a, b, c diye adlandıralım.

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{b+c}{a}$$

olduğunu iç açıortay dersinde kanıtlamıştık. Bir üçgende her zaman $b + c > a$ olacağından $|AI| / |ID|$ oranı 1'den büyüktür, yani $|AI| > |ID|$'dir. O halde $9 > x$ olduğundan, x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri 8'dir.

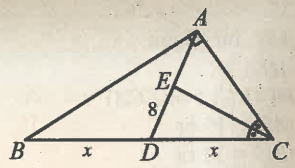
Doğru cevap: D.

28.
ABC bir üçgen
I iç teğet çemberin merkezi
$AI \cap BC = \{D\}$
$|AD| = 13$ birim,
$|AI| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



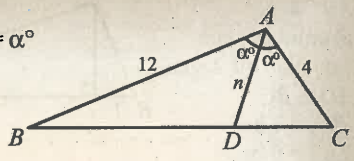
A) 6 **B) 7** C) 8 D) 9 E) 10

29.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
AD kenarortay
CE iç açıortay
$|DE| = 8$ br
$|BD| = |DC| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



A) 15 B) 16 C) 20 **D) 23** E) 24

30.
ABC bir üçgen
$m(BAD) = m(CAD) = \alpha°$
$|AB| = 12$ br
$|AC| = 4$ br
$|AD| = n$ br
$45 \le \alpha \le 60$
olduğuna göre n kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

Teorem. *Bir üçgene ait iç açıortayların boyları, indikleri kenarların boylarıyla ters orantılıdır.*

Yani;

$$a > b > c \Leftrightarrow n_A < n_B < n_C$$
$$a < b < c \Leftrightarrow n_A > n_B > n_C$$

Buradaki ''ters orantı'' tabiri de çarpımlarının sabit olması manasında değil, uzun kenara kısa yardımcı eleman, kısa kenara uzun yardımcı elemanın ineceği manasında kullanılmıştır.

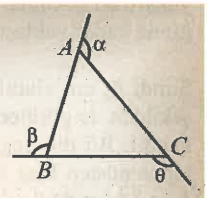
Kanıt: İç açıortayların kenarlar cinsinden boyunu veren formülü kullanacağız:

$$n_A^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

eşitliğinde a'nın büyümesi $\left(\frac{a}{b+c}\right)^2$ ifadesini büyütecek ve neticede $1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2$ ifadesi küçüleceğinden n_A değeri de küçülecektir.

31.
ABC üçgeninin A, B ve C köşelerine ait dış açı ölçüleri sırasıyla α, β ve θ olsun.

$$\alpha < \beta < \theta$$



olduğuna göre ABC üçgeninin iç açıortay uzunluklarını temsil eden n_A, n_B ve n_C değerleri için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?

A) $n_C < n_B < n_A$ B) $n_C < n_A < n_B$ C) $n_B < n_A < n_C$
D) $n_A < n_B < n_C$ E) $n_A < n_C < n_B$

32.
Kenar uzunlukları a, b, c br olan bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının uzunlukları n_A, n_B ve n_C'dir.

$$a + b = 10$$
$$b + c = 12$$
$$c + a = 14$$

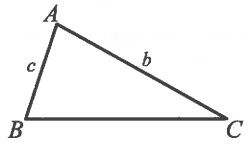
olduğuna göre n_A, n_B ve n_C arasındaki doğru sıralama aşağıdaki şıkların hangisinde verilmiştir?

A) $n_A < n_B < n_C$ B) $n_C < n_B < n_A$ C) $n_A < n_C < n_B$
D) $n_C < n_A < n_B$ E) $n_B < n_A < n_C$

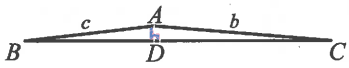
Yükseklik Eşitsizlikleri. Üç kenar uzunluğu da belli olan üçgenlerde, üçgen belli olduğu için, her yüksekliğin uzunluğu da belli olur ve o değerler için yükseklik teoremlerini kullanırız. Burada en azından bir verisi eksik olan üçgenlerde inceleme yapacağız ve yüksekliğin boyunun hangi aralıkta değerler alabileceğini araştıracağız. İlk teoremimiz bununla ilgili:

Teorem. *İki kenar uzunluğu belli bir üçgenin üçüncü kenarına inen yüksekliğinin boyu en fazla yan kenarlardan kısa olanının boyu kadar olabilir.*

Yani; A'dan inen yüksekliğinin boyu h_a olan bir ABC üçgeninde b ve c verilmişse,
$0 < h_a \le \min\{b,c\}$
eşitsizlikleri geçerlidir.



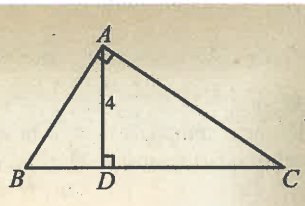
Kanıt: Öncelikle şunu bilelim. A açısının ölçüsü verilmediğinden, o açıyı 180°'ye çok çok yakın tutup,



yukardaki şekilden görülebileceği üzere, h_a'yı 0'a istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. Demek ki $0 < h_a$.

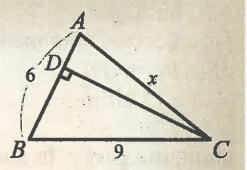
Şimdi h_a'nın alabileceği en büyük değeri arayalım. Üst şekilden de görüleceği üzere, ADB ve ADC birer dik üçgendir. Bir dik üçgende, dik kenar uzunluklarının daima hipotenüsten kısa olduğunu biliyoruz. Şu durumda hem $h_a < c$ hem de $h_a < b$ olmalıdır. Bu eşitsizliklerin ikisinin birden sağlanması gerektiğinden, h_a; b ile c'den hangisi küçükse ondan da küçük olmalıdır. Yalnız burada çoğu kişinin unuttuğu bir durum var: ABC üçgeni ya dikse? Yani ya B açısı dik olup da bizim D dediğimiz yer B ise? İşte bu yüzden $h_a = \min\{b, c\}$ de olabilir.

33.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AD| = 4$ birim
olduğuna göre $|BC|$ tam sayı olarak <u>en az</u> kaç olabilir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

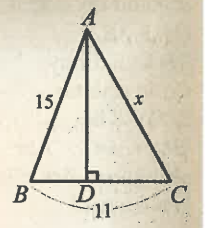
34.
ABC bir üçgen
$CD \perp AB$
$D \in]AB[$
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 9$ br



olduğuna göre $|AC| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

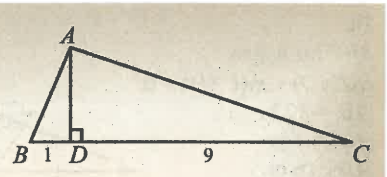
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

35.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$m(ABC) > m(BCA)$
$|AB| = 15$ br
$|BC| = 11$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

36.
ABC kenar uzunlukları tam sayı olan bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 9$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi <u>en az</u> kaç br olabilir?



A) 21 B) 24 C) 30 D) 50 E) 90

Teorem. *Bir üçgene ait yüksekliklerin boyları, indikleri kenarların boylarıyla ters orantılıdır.*

Yani;

$$a>b>c \Leftrightarrow h_a<h_b<h_c$$
$$a<b<c \Leftrightarrow h_a>h_b>h_c$$

Kanıt: Bunu aslında daha önce 'üçgende alan' yazısında da görmüştük, tekrar verelim:

Üçgenin alanının

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$

olduğunu biliyoruz.

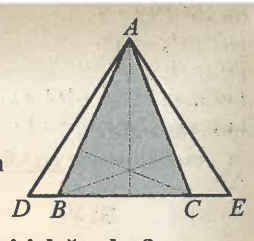
$$a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c=2S$$

olup a, b, c değerleriyle h_a, h_b, h_c değerlerinin çarpımı sabit ($2S$) olduğundan ters orantı mevcuttur. Şöyle de yorumlayabiliriz:

$$h_a=\frac{2S}{a}$$

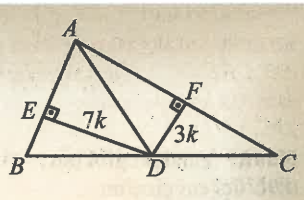
olup a'nın artmasıyla h_a'nın azalacağı aşikardır.

37.
ADE bir eşkenar üçgen
$B\in\,]DE[$
$C\in\,]BE[$
$|DC|<|BE|$
olduğuna göre ABC üçgeninin yüksekliklerini temsil eden h_a, h_b, h_c değerleri için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?



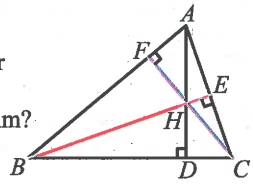
A) $h_a<h_b<h_c$ B) $h_c<h_b<h_a$ C) $h_c<h_a<h_b$
D) $h_b<h_c<h_a$ E) $h_b<h_a<h_c$

38.
ABC üçgeninde
$|BD|=|DC|$
$|DE|=7k$ br
$|DF|=3k$ br
$|AC|+|AB|=20$ br
olduğuna göre
ABC üçgeninin çevresi tam sayı olarak <u>en az</u> kaç br olabilir?



A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

Yükseklikler Üçgen Belirtir mi?
Herhangi bir üçgenin üç yüksekliğini, birer kibrit çöpü gibi elime alsam, uçlarını ikişer ikişer birbirine değdirerek her zaman bir üçgen yapabilir miyim? Öyle ya, bunlar kenarortay olsa yapabiliyordum...



Üzgünüm ki; yüksekliklerde bunu yapmak her zaman mümkün değil! Açıklayalım:

Alanı S br^2 olan bir üçgenin üç kenarına göre alan formülü yazılırsa

$$a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c=2S$$

eşitliği elde edilir ki, kenarlar ile yüksekliklerin ters orantılı oldukları buradan anlaşılır. Üçgen eşitsizliğinde a, b, c değerleri yerine bunlarla ters orantılı olan yükseklikler yerlerine yazılırsa,

$$\left|\frac{2S}{h_a}-\frac{2S}{h_b}\right|<\frac{2S}{h_c}<\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $2S$'ler sadeleştirilir ve benzer durumlar diğer kenarlar için de düşünülürse

$$\left|\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right|<\frac{1}{h_c}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}$$
$$\left|\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_c}\right|<\frac{1}{h_b}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}$$
$$\left|\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right|<\frac{1}{h_c}<\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}$$

eşitilikleri geçerlidir.

Yani ancak yukardaki şartları sağlayan h_a, h_b ve h_c'ler için bu mümkündür.

Örnek. *Bir yüksekliği 3 birim, başka bir yüksekliği de 6 birim olan çeşitkenar bir üçgenin, üçüncü yüksekliği kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}<\frac{1}{h}<\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ eşitsizliklerinin sağlanması gerektiğini biliyoruz.

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{h}<\frac{1}{2}$$

olduğundan h, {3, 4, 5} değerleri olmak üzere 3 farklı tam sayı değeri alabilir.

Fakat çeşitkenar bir üçgende üç kenar uzunluğu birbirlerinden farklı olduğundan üç yükseklik uzunluğu da birbirlerinden farklı olmalıdır. Dolayısıyla üçüncü yükseklik 3 değerini alamaz sadece 4 ve 5 değerleri olmak üzere 2 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: B.

'Ben bu eşitsizliği unuturum' diyenler için benzer bir soruyu başka bir yolla çözelim. Gerçi gizli kapaklı da olsa aynı yol ama yerse... ☺

Örnek. *Bir yüksekliği 4 birim, başka bir yüksekliği de 12 birim olan bir üçgenin, üçüncü yüksekliği h hangi aralıktan değerler alır?*

A) $4 < h < 12$ B) $8 < h < 16$ C) $4 < h < 8$
D) $3 < h < 6$ E) $2 < h < 4$

Çözüm: Üçüncü yüksekliğine h br diyelim. Yüksekliği 4, 12 ve h birim olan bir üçgenin kenar uzunlukları da (bu sayıların OKEK'i $12h$ olduğundan) $3h$, h ve 12 ile orantılıdır. Bulduğumuz bu değerler yükseklik değil kenar için olduğundan üçgen eşitsizliğini sağlamalılar. Farklı olanı ortaya alıp üçgen eşitsizliğini yazalım bakalım:

$$2h < 12 < 4h$$

eşitsizliklerinin sol yanından $h < 6$, sağ yanından da $3 < h$ bulunur ki; birleştirilirse $3 < h < 6$ olduğu görülür.

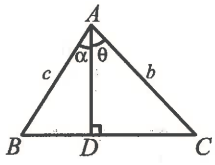
Doğru cevap: B.

Gösterdiğimiz bu ikinci yol, darlık-genişlik gibi kısıtlamalar olduğunda çok daha rahat iş görmenizi sağlar.

Şimdi de yükseklikle ilgili bir açı eşitsizliği çözeceğiz. İlgili teoremi verelim:

Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir yüksekliği, o yüksekliğin geçtiği köşeyi içeren kenarlardan hangisi kısa boyluysa onunla daha küçük ölçülü açı yapar.*

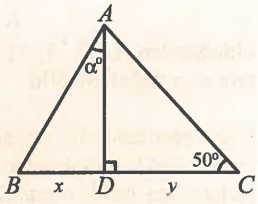
Yandaki ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D olsun. $m(BAD) = \alpha$, $m(DAC) = \theta$, $|AB| = c$ br ve $|AC| = b$ br olsun.



Teoremin dediği şu: $c < b$ ise $\alpha < \theta$.

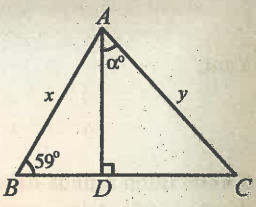
Kanıt: $c < b$ demek $m(C) < m(B)$ demektir. $m(C)$ ile $m(B)$'nin tümlerlerinin α ile θ olduğuna dikkat ediniz. Küçük açının tümleri daha büyük, büyük açının tümleri daha küçüktür. Öyleyse B açısının tümleri, C açısının tümlerinden daha küçük olacaktır. Yani $\alpha < \theta$.

39.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|BD| = x$ br
$|DC| = y$ br
$m(BCA) = 50°$
$m(DAB) = \alpha°$
$x < y$ olduğu bilindiğine göre α'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



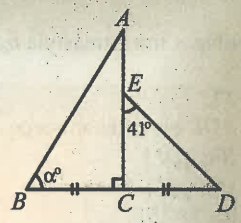
39

40.
ABC bir üçgen
$AD \perp BC$
$|AB| = x$ br
$|AC| = y$ br
$m(ABC) = 59°$
$m(CAD) = \alpha°$
olup $x < y$ olduğu bilindiğine göre α'nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 38

41.
ABC ve ECD birer dik üçgen
$AC \perp BD$
$E \in]AC[$
$|BC| = |CD|$
$m(DEC) = 41°$
$m(ABD) = \alpha°$
olduğuna göre α'nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



A) 50 B) 49 C) 42 D) 41 E) 40

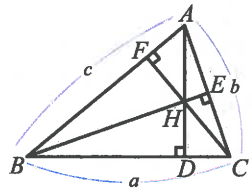
Teorem. *Bir üçgende yüksekliklerin uzunluklarının toplamı çevreden küçük ama çevrenin yarısından büyüktür.*

Yani; üçgende yarım çevreye u denilirse

$$u < h_a + h_b + h_c < 2u$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt: Yandaki gibi bir ABC üçgeni çizelim. $|AD| = h_a$ br, $|BE| = h_b$ br ve $|CF| = h_c$ br olsun. ADB dik üçgeninden $h_a < c$, BEC dik üçgeninden $h_b < a$ ve AFC dik üçgeninden $h_c < b$ bulunur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa



$$h_a + h_b + h_c < a + b + c = 2u$$

olduğu kanıtlanmış olur. Ayrıca H'yi herhangi bir nokta gibi düşünerek;

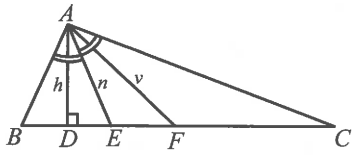
$$u < |HA| + |HB| + |HC| < h_a + h_b + h_c$$

olduğundan eşitsizliğin solu da kanıtlamış olur.

Yardımcı Elemanların Birbirlerine Göre Durumları. Şu ana kadar yardımcı elemanları kendi başlıkları altında inceledik. Şimdi de birbirlerine göre kıyaslamalar yapacağız. Bunla ilgili en önemli teorem şudur:

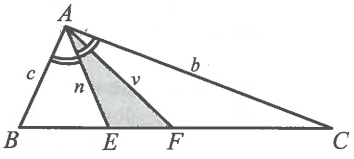
Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir köşesinden inen yüksekliği boyu h* br, *iç açıortayın boyu n* br, *kenarortayın boyu v* br *ise* $h \le n \le v$ *bağıntısı geçerlidir.*

Kanıt: $h = n = v$ eşitliğinin ancak üçgen ikizkenar olduğunda sağlanacağı aşikardır. Biz, çeşitkenar bir üçgende $h < n < v$ olduğunu gösterebilirsek işimizi halletmiş oluruz.



h'nin hem n'den hem de v'den küçük olduğu da barizdir. Çünkü bir noktadan bir doğruya giden en kısa mesafe o noktadan o doğruya inilen dikmenin boyu kadardır. Bunu yukardaki şekilde ADE ve ADF dik üçgenlerine bakarak da anlayabilirsiniz. n ve v değerleri bulundukları dik üçgenlerde hipotenüs uzunluğu iken, h değeri dik kenar uzunluğudur.

Şimdi geriye sadece $n < v$ eşitsizliğini kanıtlamak kaldı. Hani üçgenimiz çeşitkenardı ya, sözgelimi $c < b$ olsun. A'dan inen iç açıortay ayağına da E diyelim.



İç açıortay teoreminden $|BE| : |EC| = c : b$ olduğunu biliyoruz. $c < b$ olması $|BE| < |EC|$ demektir. Bu da $|EC|$ daha büyük olduğundan A'dan inen kenarortayın ayağı olan F noktasının $[EC]$ üzerinde olmasını gerektirir, yani E'nin sağında. Bu da AEF açısının geniş olmasından dolayı $v > n$ olduğunu kanıtlar.

Şu kanıt daha çok hoşunuza gidecek:
Daha önce '*Bir üçgenin bir kenarortayı, bitişik kenarlardan hangisi kısa boyluysa onunla daha büyük ölçülü açı yapar*' teoremini kanıtlamıştık. Halbuki açıortay iki kenarla da eşit ölçülü yapar. Bu yüzden kenarortay uzunluğu b br olan kenara daha yakındır, bu da $n < v$ demektir.

42.
A köşesine ait yükseklik, iç açıortay ve kenarortayının boyları sırasıyla h_a, n_A ve v_a br olan bir ABC üçgeninde

$$h_a = 8$$
$$v_a = 15$$

olduğuna göre n_A aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 14 E) 17

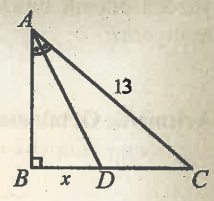
43.
Çeşitkenar bir ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik h_a, B'den inen kenarortay v_b ve C'den çıkan iç açıortayın boyu n_C dir.

$$h_a = v_b = n_C$$

olduğuna göre üçgenin kenar uzunlukları arasındaki doğru sıralama hangi şıkta verilmiştir?

A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $b < a < c$
D) $b < c < a$ E) $c < b < a$

44.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$[AD]$ iç açıortay
$|AC| = 13$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre
x aşağıdakilerden hangisi olamaz?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Geometrik Eşitsizlikler

Geometrinin en ilginç konularından biri de eşitsizliklerdir. Aslında bu konu hakkında başlı başına bir kitap da yazılabilir. Biz burada diğerlerine göre daha çok önem arzeden ve daha çok kullanılanları vermeye çalışacağız.

Bilinen gösterimleriyle;

$$a > b > c \Leftrightarrow m(A) > m(B) > m(C)$$
$$|b-c| < a < b+c$$
$$|c-a| < b < c+a$$
$$|a-b| < c < a+b$$
$$a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c$$
$$a > b > c \Leftrightarrow n_A < n_B < n_C$$
$$a > b > c \Leftrightarrow v_a < v_b < v_c$$
$$h_a \le n_A \le v_a$$
$$h_b \le n_B \le v_b$$
$$h_c \le n_C \le v_c$$
$$u < h_a + h_b + h_c < 2u$$
$$u < n_A + n_B + n_C < 2u$$
$$u < v_a + v_b + v_c < 2u$$

gibi temel bazı eşitsizlikleri şu ana kadar vermiş olduk. Şimdi hem bunlara biraz daha ek yapacağız hem de açılarla ilgili eşitsizliklere ve bunun yanında trigonometrik eşitsizliklere de yer vereceğiz.

Eşitsizlik sorularının birçoğu ortalamalar ve ortalamalar arasındaki eşitsizlikler kullanılarak çok rahat çözülür. Bu yüzden önemli birkaç ortalamayı hatırlayarak yazımıza başlıyoruz:

Aritmetik Ortalama (AO). $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pozitif reel sayılarının aritmetik ortalaması (ortası)

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre; a ve b gibi pozitif iki reel sayının aritmetik ortası

$$\frac{a+b}{2},$$

a, b ve c gibi üç pozitif reel sayının aritmetik ortası

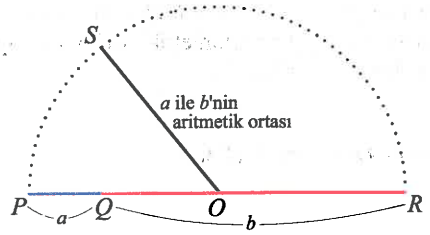
$$\frac{a+b+c}{3}$$

olur.

İki Sayının Aritmetik Ortasının Geometrik Yorumu. a ve b gibi pozitif iki reel sayının aritmetik ortalaması olan $(a+b)/2$ sayısını yorumlamaya çalışacağız. Bu sebeple, uzunluğu a br olan bir $[PQ]$ ile, uzunluğu b br olan bir $[QR]$ alalım.



Bu iki doğru parçasını Q köşelerinden, doğrusal olarak ucuca ekleyelim.



PR doğru parçasını çap kabul eden çember çizildiğinde görülür ki a ile b'nin aritmetik ortası bu çemberin yarıçap uzunluğu kadardır. Çemberin merkezine, yani $[PR]$'nin orta noktasına O der ve çember üzerinde herhangi bir S noktası alırsak, aritmetik orta $|OS|$ kadardır.

Açıkça belli ki; sayılar birbirlerine eşit olursa yani $a = b$ olursa $[PR]$'nin orta noktası Q olur. Yani çemberin merkezi Q olur. Bu da $|PQ| = |QR| = |QS|$ demek olacağından birbirlerine eşit iki sayının aritmetik ortasının sayılardan herhangi biri olduğu da geometrik olarak kanıtlanmış olur.

Geometrik Ortalama (GO). $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pozitif reel sayılarının geometrik ortalaması

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

şeklinde tanımlanır. Geometrik ortanın diğer bir adı ise **orta orantı**dır.

Bu tanıma göre; a ve b gibi pozitif iki reel sayının geometrik ortası

$$\sqrt{ab},$$

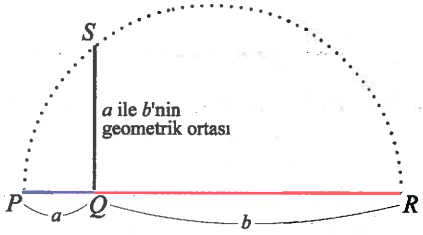
a, b ve c gibi pozitif üç reel sayının geometrik ortası

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

olur.

İki Sayının Geometrik Ortasının Geometrik Yorumu. Bu sefer a ve b gibi pozitif iki reel sayının geometrik ortalaması olan $\sqrt{ab}$ sayısını yorumlamaya çalışacağız. Aynı doğru parçalarıyla çalışalım.

Doğru parçalarının birleşim noktası olan Q'dan $[PR]$'ye çıkılan dikme çemberi S noktasında kesiyor olsun.



Çapı gören çevre açının dik olduğu bilindiğinden RSP açısı diktir. Dik köşeden hipotenüse dik indirildiği için Öklid teoremini uygularsak $|QS| = \sqrt{ab}$ br bulunur. Demek ki $|QS|$; a ile b'nin geometrik ortasıymış.

Yine açıkça görülüyor ki $a = b$ olsaydı, merkez yine Q olacaktı ve bu sayıların geometrik ortalaması sayılardan herhangi birine eşit olacaktı.

Harmonik Ortalama (HO). Her biri sıfırdan farklı $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pozitif reel sayılarının harmonik ortalaması

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre; a ve b gibi sıfırdan farklı pozitif iki reel sayının harmonik ortası

$$\frac{2ab}{a+b},$$

a, b ve c gibi sıfırdan farklı üç pozitif reel sayının harmonik ortası

$$\frac{3abc}{ab+bc+ac}$$

olur.

İki Sayının Harmonik Ortasının Geometrik Yorumu. Bu sefer a ve b gibi pozitif iki reel sayının harmonik ortalaması olan $\frac{2ab}{a+b}$ sayısını yorumlamaya çalışacağız.

Bu da oluşturduğumuz şekil üzerinde, uzunluğu $\frac{2ab}{a+b}$ br olan bir doğru parçası bulmak demektir. Şu an şekilde öyle bir doğru parçası olmadığından biz oluşturacağız.

$$\text{HO} = \frac{2ab}{a+b}$$

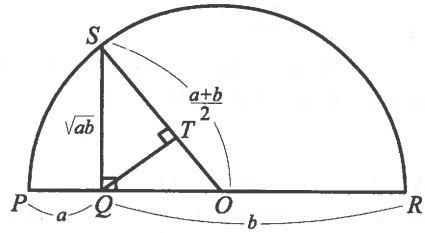
eşitliğiyle oynayıp eşitlikte her sayıyı şeklimizde var olan sayıları içerir hale getirirsek iş biter.

$$\text{HO} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

olduğundan, eşitliği

$$\frac{\text{HO}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

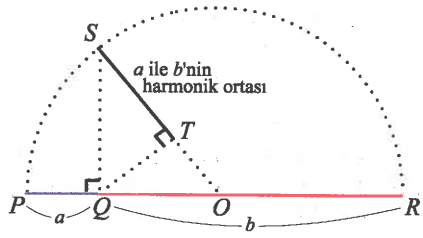
şeklinde düzenleyelim. Elimizde hipotenüsü $\frac{a+b}{2}$ br olan bir dik üçgen zaten var, o halde hipotenüsü $\sqrt{ab}$ br olan bir dik üçgen oluşturmalıyız.



Q noktasından OS'ye indirdiğimiz dikme ayağına T dersek, QTS dik üçgeni aradığımız üçgendir. Gerçekten de QTS ile OQS dik üçgenleri benzer olduğundan

$$|ST| = \frac{2ab}{a+b}$$

olmalıdır.



Şu durumda a ile b'nin harmonik ortası üst şekilde görünen $|ST|$'dir. Bu sefer, çok açık olmasa da, $a = b$ olursa a ile b'nin harmonik ortası yine bu sayılardan biri olur. Çünkü $a = b$ olursa $Q = O$ demektir. T dediğimiz nokta Q'dan OS'ye indirilen dikme ayağı olarak tanımlandığından T ile O çakışık olacaktır.

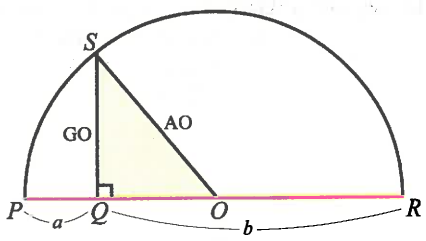
Ortalamalar Arasında Sıralama. Eğer ortalaması aranan sayılar birbirlerine eşit olursa, tüm ortalamalarının birbirlerine ve bu sayılara eşit olduğunu gösterdik. Ama ortalaması aranan sayılar içinde en az bir tanesi diğerlerinden farklıysa, ortalamalar da birbirinden farklıdır. Kim kimden büyüktür, kim kimden küçüktür, niye böyledir, şimdi onu izah edeceğiz. Bu yazı nihayetinde bir geometri yazısı olduğundan, fazla konuyu dağıtmadan, izahatı sadece iki sayı için yapacağız. Hatta pozitif iki sayı için yapacağız.

GO ≤ AO. Reel sayıların karelerinin negatif olamayacağını biliriz. O halde a ve b herhangi birer pozitif reel sayıysa, diğer reel sayılar gibi $a - b$ reel sayısı için de bu geçerlidir. Yani $(a-b)^2 \geq 0$ olmalıdır. Bunu kurcalayacağız:

$$0 \leq (a-b)^2$$
$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$
$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$
$$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$
$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

olduğundan geometrik ortanın, aritmetik ortadan küçük veya ona eşit olduğunu kanıtlamış olduk.

GO ≤ AO İçin Geometrik Yorum. a ile b'nin geometrik ortasının Q'dan çıkılan dikmenin boyu, aritmetik ortasının da çemberin bir yarıçapı olduğunu göstermiştik.



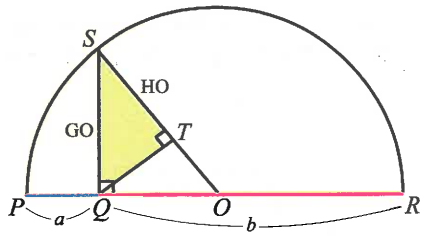
$a = b$ olursa GO = AO olacağı aşikar. Eğer $a \neq b$ ise OQS gibi bir dik üçgen oluşur. Bir dik üçgende hipotenüsün daima dik kenarlardan daha uzun olduğunu kanıtlamıştık. O halde GO ≤ AO.

HO ≤ GO. Bu sefer az önce bulduğumuz GO ≤ AO eşitsizliğini kurcalayacağız:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$
$$\frac{\sqrt{ab}}{ab} \leq \frac{a+b}{2ab}$$
$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab}$$
$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

olduğundan harmonik ortanın, geometrik ortadan küçük veya ona eşit olduğunu kanıtlamış olduk. GO ≤ AO ve HO ≤ GO birlikte düşünülürse, aslında HO ≤ GO ≤ AO olduğunu kanıtladık!

HO ≤ GO İçin Geometrik Yorum. a ile b'nin geometrik ortasının Q'dan çıkılan dikmenin boyu, harmonik ortasının da $[QS]$'nin OS üzerine dik izdüşümü yani $[ST]$ olduğunu kanıtlamıştık.



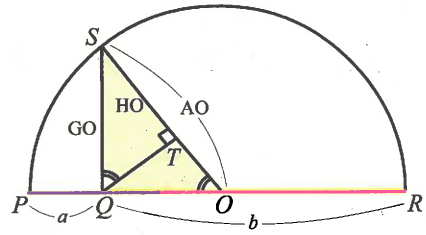
QTS dik üçgeninde HO dik kenar, GO da hipotenüs konumunda olup, hipotenüsün her daim daha uzun olacağını bildiğimizden HO ≤ GO olduğu görülür.

Geometrik orta, Aritmetik Orta ile Harmonik Ortanın da Geometrik Ortasıdır. a ile b gibi iki pozitif sayının aritmetik ortasının $\frac{a+b}{2}$, harmonik ortasının da $\frac{2ab}{a+b}$ olduğunu biliyoruz. Bu iki değer çarpılırsa $a \cdot b$ çıkacağı da ortada. E, $a \cdot b$ denilen sayı da $\sqrt{ab}$ 'nin karesidir. Demek ki

$$GO^2 = AO \cdot HO.$$

Yalnız şunu unutmayın ki bu eşitlik sadece iki sayı için geçerlidir, üç veya daha fazlası için yemez!

$GO^2 = AO \cdot HO$ Eşitliğinin Geometrik Yorumu. Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaların inşasında çizdiğimiz şekil, tekrar derdimize derman olacak.



$m(QOS) = m(TQS)$ olduğundan OQS dik üçgeninde yandan Öklid teoremi yaparsanız, aradığınıza ulaşırsınız.

Şimdi, şu ana kadar gördüğümüz üç ortalamaya yeni bir tanesini ekleyeceğiz. Adı karesel ortalama. Onlar kadar sık duyulmuş olmasa da, çok güzel işler becerdiğini bildiğimden, bilmeyenlerin bilmesinde fayda görüyorum. Çözümü zor görünen birçok soruyu bizim için çok kolay çözecek, göreceksiniz.

Karesel Ortalama (KO). $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ reel sayılarının karesel ortalaması

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre; a ve b gibi iki reel sayının karesel ortası

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

a, b ve c gibi üç reel sayının karesel ortası

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

olur.

HO ≤ GO ≤ AO ≤ KO. Daha önce HO ≤ GO ≤ AO olduğunu kanıtladığımızdan AO ≤ KO olduğunu kanıtlarsak yeter.

Yine a ve b gibi herhangi pozitif iki reel sayı için $a-b$ reel sayısının karesinin negatif olamayacağı gerçeğinden yararlanacağız.

$$0 \le (a-b)^2$$
$$0 \le a^2-2ab+b^2$$
$$2ab \le a^2+b^2$$
$$a^2+b^2+2ab \le 2a^2+2b^2$$
$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \le \frac{2a^2+2b^2}{4}$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

olduğundan aritmetik ortanın karesel ortalamadan daha küçük olduğu, dolayısıyla gördüğümüz dört değişik ortalama içinde en büyük olanın karesel ortalama olduğu kanıtlanmış olur.

Daha adı sanı duyulmamış birçok ortalama var ama bu dört tanesi bizim için yeter de artar bile. Şimdi bu ortalamaların kullanım alanlarına örnekler vereceğiz. Öyle ya, yoksa bir geometri kitabında bunların işi ne? Hiç merak etmeyin, ''iyi ki öğrenmişiz'' diyeceğinize eminim!

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{\text{Çevre}(ABC)}.$$

Kanıt: Çarpmaya göre terslerin toplamı harmonik ortayı, çevre de aritmetik ortayı çağrıştırdığından ikisi arasındaki eşitsizlikten yardım isteyeceğiz.
HO ≤ AO olduğundan

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{a+b+c}{3}$$

olmalıdır. Her iki tarafta pay ile paydayı yer değiştirirsek eşitsizlik yön değiştireceğinden

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \ge \frac{3}{a+b+c}$$

olur. $a+b+c$ yerine Çevre(ABC) yazıp eşitsizliğin her iki yanını da 3 ile çarparsak,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{\text{Çevre}(ABC)}$$

eşitsizliği kanıtlanmış olur.

Eşitlik sadece HO = AO olunca sağlanır. Peki ne zaman HO = AO olur? Biliyorsunuz: $a=b=c$ olunca yani üçgen eşkenar olunca...

1.
Çevresi 5 br olan bir üçgenin kenar uzunluklarının çarpmaya göre terslerinin toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

2.
Kenar uzunlukları a, b ve c br olan çeşitkenar bir ABC üçgeninde

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$$

olduğuna göre ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 **E) 13**

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde*

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\text{Çevre}^2(ABC)}{3}.$$

Kanıt: Kareler toplamı karesel ortayı, çevreyi de aritmetik ortayı anımsatıyor. Bu yüzden AO ile KO arasındaki eşitsizliği yazacağız.

AO ≤ KO olduğundan

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

olmalıdır. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{(a+b+c)^2}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

olur. O halde; her iki taraf 3 ile çarpıp $a+b+c$ yerine de Çevre(ABC) yazarsak

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\text{Çevre}^2(ABC)}{3}$$

eşitsizliği kanıtlanmış olur.

Eşitlik sadece AO = KO olunca sağlanır. Bunun da sadece $a=b=c$ olduğunda olabileceğini biliyoruz. Yani eşitlik durumu ancak üçgen eşkenar olunca olur.

3.
Kenar uzunlukları a, b ve c br olan çeşitkenar bir ABC üçgeninde

$$a^2+b^2+c^2=12$$

olduğuna göre ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
Çevresi 8 br olan bir üçgenin kenar uzunluklarının karelerinin toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

Teorem. *Kenar uzunlukları a br, b br ve c br olan bir ABC üçgeninde*

$$\text{Çevre}^2(ABC) \geq 12\sqrt{3}\cdot \text{Alan}(ABC).$$

Kanıt: Çevre uzunluğu sabit olan üçgenler içinde alanı en büyük olanının eşkenar üçgen olduğunu biliyoruz. O halde çevresi $2u$ br olan tüm üçgenlerin alanı, çevresi $2u$ br olan eşkenar üçgenin alanından küçük veya ona eşittir. Buna göre işlem yapacağız.

Çevresi $2u$ br olan bir eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu $\frac{2u}{3}$ br olacağından

$$|ABC| \leq \frac{\left(\frac{2u}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4u^2}{12\sqrt{3}}$$

olur. $4u^2$ yerine Çevre^2(ABC) yazılırsa

$$\text{Çevre}^2(ABC) \geq 12\sqrt{3}\cdot|ABC|$$

eşitsizliği kanıtlanmış olur.

Sonuç: Daha önce

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\text{Çevre}^2(ABC)}{3}$$

ve

$$\text{Çevre}^2(ABC) \geq 12\sqrt{3}\cdot|ABC|$$

eşitsizliklerini kanıtlamıştık. İkisi birlikte düşünülürse

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot|ABC|$$

olduğu anlaşılır.

5.
Alanı $4\sqrt{3}$ br^2 olan bir üçgenin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

6.
Kenar uzunlukları a br, b br, c br ve alanı 1 br^2 olan bir ABC üçgeninde

$$a^2+b^2+c^2$$

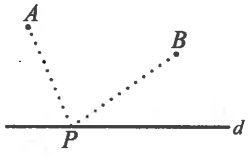
toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

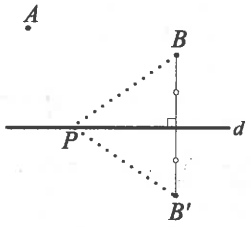
Bazı Minimum-Maksimum Problemleri. Yazımızın sonuna yaklaşırken, çokça bilinen bazı güzel minimum maksimum soruları çözeceğiz. Bu konu temelde analitik geometrinin konusu olduğundan, çok fazla detaya girmeden, yüzeysel olarak göreceğiz. Böyle olsa bile problemin genel çözümünü bilmemizde fayda olacaktır.

En Kısa Yol Problemleri. Düzlemde A ve B gibi iki farklı nokta alalım. A'dan B'ye giden yolların en kısasının AB doğru parçası olduğunu hepimiz biliriz. Yalnız bazı problemlerde A'dan B'ye dümdüz gitmek yasaklanır. Bazen başka sabit bir C noktasına, bazen bir d doğru üzerinde hareketli bir P noktasına uğranması mecbur tutulur. Verilen şartlar altında, en kısa yolun boyu veya yolun en kısa olması için P'nin hangi nokta olması gerektiği sorulur. Şimdi bunlarla ilgili problemlerin genel çözüm mantığını vereceğiz.

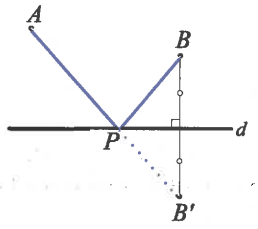
Sözgelimi, aşağıdaki şekilde A'dan B'ye giden en kısa yolu bulacağız ama d doğrusuna uğramak şart olsun.



Koordinatları verilmiş A ve B noktalarını birer köy, d doğrusunu da bir ırmak gibi düşünün. A köyündesiniz. Köyünüzde bir yarışma düzenleniyor. Kim ırmaktan su içmek kaydıyla B köyüne en erken varacak? Herkes, eğer yarışmacıların hızları aşağı yukarı birbirlerine eşitse ırmağa ilk varanın, B'ye de ilk varacağını düşünür. Ama gerçekte kazın ayağı öyle değildir! Tavşan kaplumbağadan hızlıdır ama her zaman tavşan kaplumbağayı geçemez değil mi? Daha hızlı olmaktansa daha kısa yolu tercih etmek daha faydalıdır çoğu zaman. Şimdi dediklerimi iyi dinleyin.



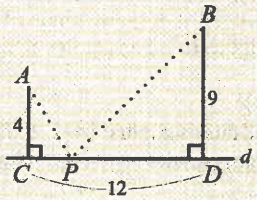
B köyünün ırmağa göre simetriğine, üst şekildeki gibi B' köyü diyelim. d doğrusu üzerindeki herhangi bir noktanın B ve B' noktalarına uzaklıkları eşit olduğundan, P'den ha B köyüne gitmişsin, ha B' köyüne... Yolun boyu aynıdır. O halde $|AP| + |PB|$ toplamını en küçük yapmak demek $|AP| + |PB'|$ toplamını en küçük yapmak demektir. Bu toplamın en küçük değeri de A köyünden B' köyüne giden en kısa yolun boyudur.



O halde ırmaktan su içeceğin yer, tam bu AB' doğru parçasının d doğrusunu kestiği P noktası olmalıdır. Her zamanki gibi hızlı olan değil, zeki olan kazandı!

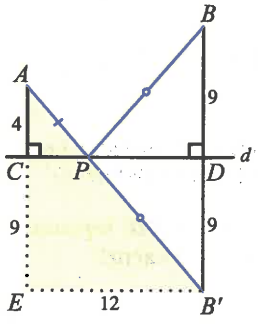
Yani, *$|AP| + |PB|$ toplamının en az olması için A, P, B' noktaları doğrusal olmalıdır.*

Örnek. *A ve B noktalarından d doğrusuna inilen dikme ayakları C ve D olsun. P noktası $[CD]$ üzerinde değişken bir nokta ise $|AP| + |PB|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?*



A) 15 B) $\sqrt{233}$ C) 16 D) 17 E) $\sqrt{313}$

Çözüm: Lafı uzatmadan B'nin d'ye göre simetriğini alalım.



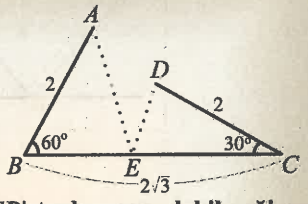
A, P ve B' doğrusal olunca $|AP| + |PB|$ minimum olurdu. Diğer yandan

$$|AP| + |PB| = |AP| + |PB'|$$

olup, şekildeki AEB' dik üçgeninden bu değer $\sqrt{313}$ br olur.

Doğru cevap: E.

7.
$m(ABC) = 60°$
$m(BCD) = 30°$
$|AB| = |CD| = 2$ br
$|BC| = 2\sqrt{3}$ br
$E \in [BC]$

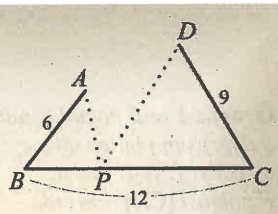


olduğuna göre $|AE| + |ED|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

8.
$|AB| = 6$ br
$|BC| = 12$ br
$|CD| = 9$ br

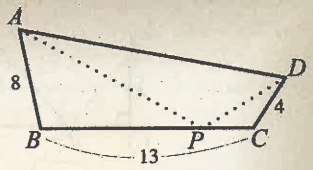
$P \in [BC]$



olduğuna göre $|AP| + |PD|$ toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 **D)** 4 E) 5

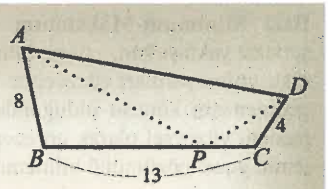
9.
$ABCD$ bir dörtgen
$P \in]BC[$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 13$ br
$|CD| = 4$ br



olduğuna göre $|AP| + |PD|$ toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 17 B) 18 C) 21 **D)** 24 E) 25

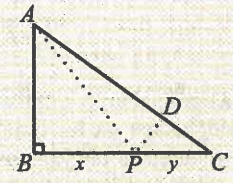
10.
$ABCD$ bir dörtgen
$P \in]BC[$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 13$ br
$|CD| = 4$ br



olduğuna göre $|AP| + |PD|$ toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 **B)** 2 C) 3 D) 4 E) 5

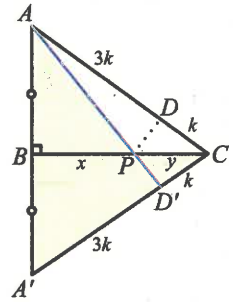
Örnek. ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AD| = 3 \cdot |DC|$
$P \in [BC]$
$|BP| = x$ br
$|PC| = y$ br



olduğuna göre x/y kaç olursa $|AP| + |PD|$ toplamı minimum olur?

A) $\frac{7}{2}$ B) 3 C) $\frac{5}{2}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: ABC dik üçgeninin BC doğrusuna göre simetriğini çizelim. A'nın bu doğruya göre simetriği A', D'nin simetriğiyse D' olsun. P'den D noktasına gitmekle D' noktasına gitmek arasında fark olmadığından $|AP| + |PD|$ toplamıyla $|AP| + |PD'|$ toplamı aynıdır. Bu toplamın da minimum olması için A, P, D' noktalarının doğrusal olmaları gerekir. Şimdi A-A'-C-B hattında Menelaus teoreminden sonuca ulaşacağız:

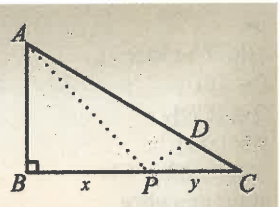


$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

eşitliğinden $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

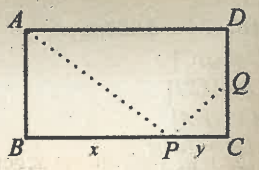
11.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AD| = 4\cdot|DC|$
$P \in [BC]$
$|BP| = x$ br
$|PC| = y$ br



olduğuna göre x/y kaç olursa $|AP| + |PD|$ toplamı minimum olur?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

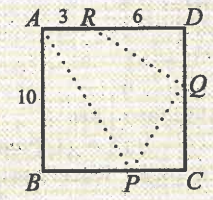
12.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$|BP| = x$ br
$|PC| = y$ br
$|CQ| = |QD|$



olduğuna göre $|AP| + |PQ|$ toplamının <u>en küçük</u> değerini alması için x/y kaç olmalıdır?

A) 1 **B) 2** C) 3 D) 4 E) 5

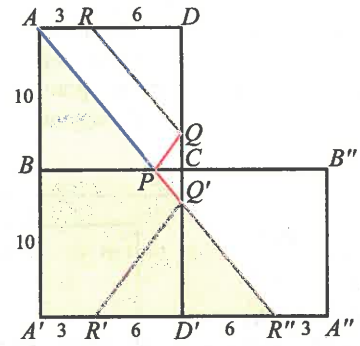
Örnek. *$ABCD$ bir dikdörtgen*
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$R \in [DA]$
$|AB| = 10$ br
$|AR| = 3$ br
$|RD| = 6$ br



olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR|$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 15 B) 17 C) 20 D) 25 E) 26

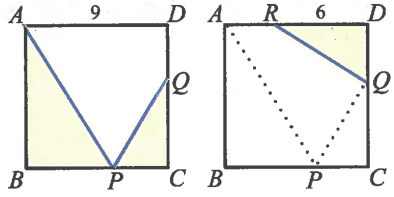
Çözüm: $ABCD$ dikdörtgeninin BC'ye göre simetriğini alalım. P'den Q noktasına, Q'dan da R noktasına gitmekle; P'den Q' noktasına, Q' noktasından da R' noktasına gitmek aynı şeydir.



Şimdi de ilk dikdörtgenin simetriği olan dikdörtgenin $[CD']$ kenarına göre simetriğini çizelim. Q' noktasından R' noktasına gitmekle R'' noktasına gitmek aynı şeydir. Şu durumda $|AP| + |PQ| + |QR|$ toplamını minimum yapmak için $|AP| + |PQ'| + |Q'R''|$ toplamını minimum yapmak yeter. O halde A, P, Q', R'' noktalarını doğrusal kabul etmeliyiz. Şekilden de göreceğiniz üzere $AA'R''$ dik üçgeninden bu toplamın 25 olduğu görülür.

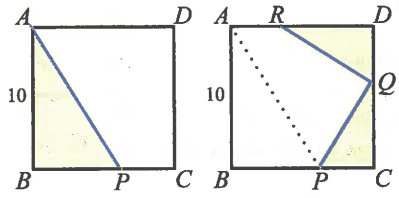
Doğru cevap: D.

Pratik Yol. Bu tarz soruları çözmek için oldukça pratik bir kural var. Çok sevdiğim, değerli meslektaşım Alparslan Ceran'dan yıllar önce duymuştum. İzniyle aktarıyorum:
Açıklamamızı çözdüğümüz soru üzerinde yapalım.



Yatay eksende gidilen yol 9 br — Yatay eksende gidilen yol 6 br

A'dan P'ye, P'den de Q'ya gidince yatay eksende 9 br hareket etmiş oluyoruz. Q'dan R'ye giderken de 6 br hareket ediyoruz. Demek ki A'dan R'ye varıncaya kadar yatay eksende 15 br hareket ettik.

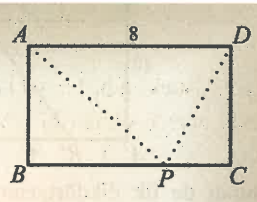


Dikey eksende gidilen yol 10 br — Dikey eksende gidilen yol 10 br

A'dan P'ye giderken dikey eksende 10 br hareket ediyoruz. P'den Q'ya, Q'dan da R'ye giderken de yine dikey eksende 10 br hareket ediyoruz. Demek ki A'dan R'ye varana dek dikey eksende toplam 20 br hareket ediyoruz.

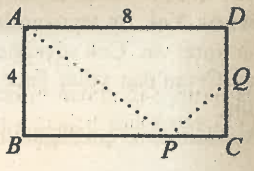
İşte bu yatay eksende ve dikey eksende katedilen yolları bir dik üçgenin dik kenar uzunlukları gibi düşünürsek, $|AP| + |PQ| + |QR|$ toplamının en küçük değeri bu dik üçgenin hipotenüs uzunluğu olur. Bu pratiği nerden mi bulmuşlar? Çözümdeki $AA'R''$ dik üçgenine odaklanın, anlarsınız...

13.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$|AD| = 8$ br
$P \in [BC]$
olduğuna göre $|BP|$ kaç br olursa $|AP| + |PD|$ toplamı en küçük değerini alır?



A) 1 B) 2 C) 3 **D) 4** E) 5

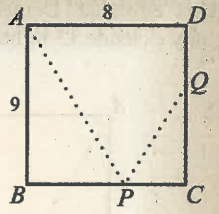
14.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$|AB| = 4$ br
$|AD| = 8$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$|CQ| = |QD|$
olduğuna göre $|AP| + |PQ|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?



A) 9 **B) 10** C) 12 D) 13 E) 15

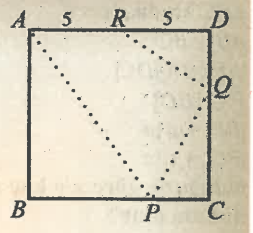
15.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$|AB| = 9$ br
$|AD| = 8$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$|CQ| = 2 \cdot |QD|$

olduğuna göre $|AP| + |PQ|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?



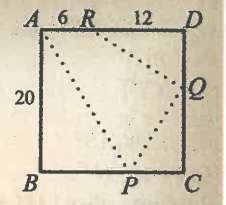
A) 15 **B) 17** C) 19 D) 20 E) 21

16.
$ABCD$ bir kare
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$R \in [DA]$
$|AR| = |RD| = 5$ br
olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?



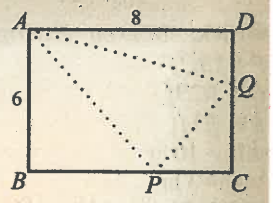
A) 15 B) 17 C) 20 **D) 25** E) 26

17.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$R \in [DA]$
$|AB| = 20$ br
$|AR| = 6$ br
$|RD| = 12$ br
olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR|$ toplamını en küçük yapan P ve Q noktaları için $|PQ|$ kaç br dir?



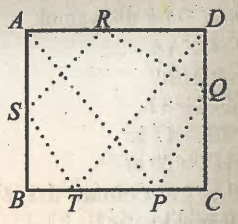
A) 5 B) 7 C) 10 D) 12 E) 13

18.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$|AB| = 6$ br
$|AD| = 8$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QA|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?



A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

19.
$ABCD$ bir kare
$|AB| = 3$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$R \in [DA]$
$S \in [AB]$
$T \in [BC]$

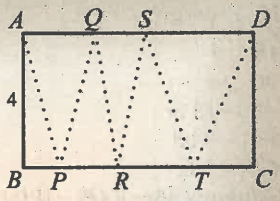


olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR| + |RS| + |ST| + |TD|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 **D)** 15 E) 16

20.
$ABCD$ bir dikdörtgen
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 7$ br

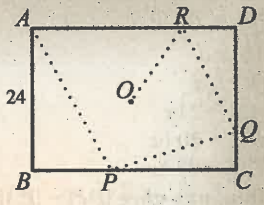
$\{P, R, T\} \in [BC]$
$\{Q, S\} \in [AD]$



olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR| + |RS| + |ST| + |TD|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 25 B) 28 C) 30 D) 32 E) 35

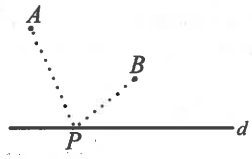
21.
$ABCD$ bir dikdörtgen
O ağırlık merkezi
$|AB| = 24$ br
$|AD| = 30$ br
$P \in [BC]$
$Q \in [CD]$
$R \in [DA]$



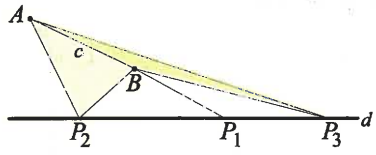
olduğuna göre $|AP| + |PQ| + |QR| + |RO|$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 60 B) 65 C) 70 **D)** 75 E) 80

Farkın En Büyük Değeri. Toplamın en küçük olduğu durum gibi, farkın en büyük olduğu durum da sorulur.



Yani, üstteki gibi bir şekilde P noktası, d doğrusu üzerinde nerede olmalı ki $|PA| - |PB|$ farkı maksimum olsun?



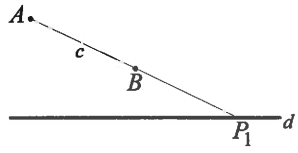
AB'nin d'yi kestiği noktaya P_1 diyelim. P noktasını P_1'in solunda da alsanız, sağında da alsanız illa ki aldığınız nokta A ve B noktalarıyla birlikte bir üçgen belirtecektir. Sözgelimi P'nin solunda alınan nokta P_2, $|AB|$ uzunluğu da c br olsun. BAP_2 üçgeninde üçgen eşitsizliğinden

$$|P_2A| - |P_2B| < c$$

olacaktır. Sağ alınan noktaya da P_3 dersek, bu sefer de BAP_3 üçgeninde üçgen eşitsizliğinden

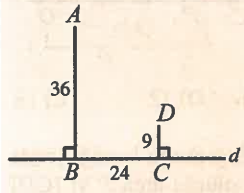
$$|P_3A| - |P_3B| < c$$

olacaktır.



Fakat P noktasını P_1 seçersek $|P_1A| - |P_1B| = c$ olacaktır. Diğer her durumda c'den küçük çıkarken, bu durumda c çıktı diye farkın en büyük değerini alabilmesi için A, B, P noktalarının doğrusal olmaları gerektiğini anlamış olduk.

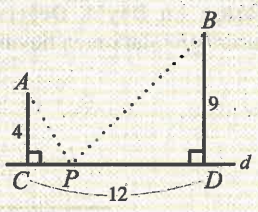
22.



P, d doğrusu üzerinde $|PA| - |PD|$ farkının en büyük olmasını sağlayan nokta ise $|CP|$ kaç br dir?

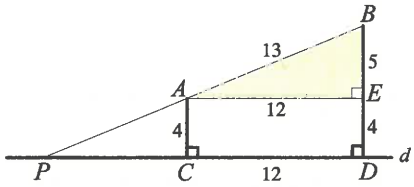
8

Örnek. *A ve B noktalarından d doğrusuna inilen dikme ayakları C ve D olsun. P noktası d doğrusu üzerinde değişken bir nokta ise ||PB| – |PA|| farkının alabileceği en büyük değer kaçtır?*



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

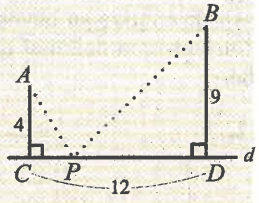
Çözüm: Anlattığımız üzere, P noktası A ve B ile doğrusal olmalı yani AB'nin d'yi kestiği yer olmalıdır.



Öyle olunca da $||PB| - |PA|| = |AB|$ olur. A'dan BD'ye indirilen dikme ayağı E olsun. $|AE| = 12$ br, $|EB| = 5$ br olduğundan $|AB| = 13$ br olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *A ve B noktalarından d doğrusuna inilen dikme ayakları C ve D olsun. P noktası [CD] üzerinde değişken bir nokta ise ||PB| – |PA|| farkının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

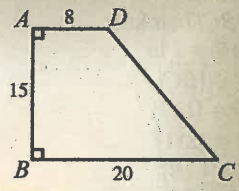


A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: P'yi BA doğrusunun d doğrusunu kestiği yerde alsaydık $||BP| - |PA||$ maksimum olurdu ama P'yi $[CD]$ üstünde alma mecburiyetimiz var. O halde P'yi, olması gereken noktaya en yakın nokta yani tam C'nin olduğu yerde alırsak, $|BP| = 15$ br olacağından $||BP| - |PA||$ farkı $15 - 4 = 11$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

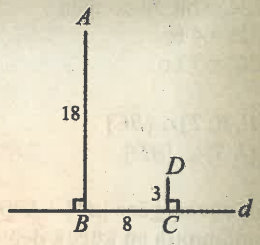
23.
$ABCD$ bir dik yamuk
$DA \perp AB$
$AB \perp BC$
$|DA| = 8$ br
$|AB| = 15$ br
$|BC| = 20$ br



$P \in [AB]$ olmak üzere $|CP| - |PD|$ farkının en büyük değeri kaçtır?

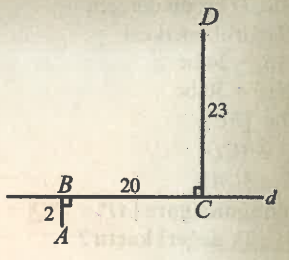
A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

24.
$\{P, B, C\} \in d$
$AB \perp d$
$DC \perp d$
$|AB| = 18$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 3$ br
olduğuna göre $||AP| - |PD||$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?



A) 0 B) 1 C) 3 D) 15 E) 17

25.
$\{P, B, C\} \in d$
$AB \perp d$
$DC \perp d$
$|AB| = 2$ br
$|BC| = 20$ br
$|CD| = 23$ br
olduğuna göre $|DP| - |PA|$ farkının alabileceği en büyük değer kaçtır?



A) 24 B) 25 C) 28 **D) 29** E) 30

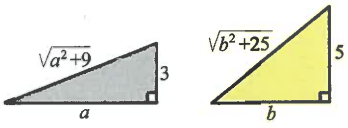
Örnek. *a ve b, toplamları 15 olan pozitif reel sayılar ise*

$$\sqrt{a^2+9}+\sqrt{b^2+25}$$

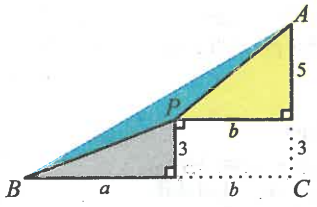
toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 17 B) 18 C) 23 D) 26 E) 31

Çözüm: $\sqrt{m^2+n^2}$ şeklindeki bir ifade, bize dik kenar uzunlukları m br ve n br olan bir dik üçgenin hipotenüsünü hatırlatıyor. Bu sebeple soruyu geometrik yorumlayacağız:

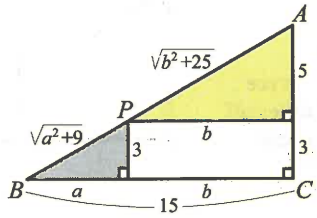


Şu durumda bizden istenen, yukardaki dik üçgenlerin hipotenüs uzunluklarının toplamının alabileceği en küçük değerdir. Hemen bu hipotenüsleri ucuca getirelim.



Şekilden de görüleceği üzere; $|AP| + |PB|$ toplamının en küçük değerini arıyoruz. A, B ve C noktalarını köşe kabul eden üçgene göre Pisagor teoreminden $|AB| = 17$ br bulunur. ABP dik üçgeninde üçgen eşitsizliğinden sorulan toplamın 17'den büyük olduğunu bulduk bile!

Yalnız burada a ile b sabit olmadıklarından, belki de böyle bir ABP üçgeni hiç oluşmuyordur. O halde a ile b'yi A, P, B noktalarını doğrusal yapacak şekilde seçersek, bu toplamın alabileceği en küçük değeri bulmuş oluruz.



$a + b$ toplamı sabit olduğundan, a'yı küçültünce b büyür ve istenen durum oluşur. Oluşan ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi yardımıyla

$$\min\left(\sqrt{a^2+9}+\sqrt{b^2+25}\right)=17$$

olduğu bulunmuş olur.

Doğru cevap: A.

26.
a ve b, toplamları 6 olan pozitif reel sayılar ise

$$\sqrt{a^2+9}+\sqrt{b^2+25}$$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 17 B) 15 C) 13 **D) 10** E) 9

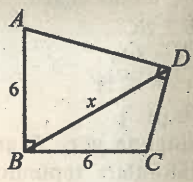
27.
a, b ve c, toplamları 12 olan pozitif reel sayılar ise

$$\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9}+\sqrt{c^2+16}$$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 17 **B) 15** C) 13 D) 11 E) 9

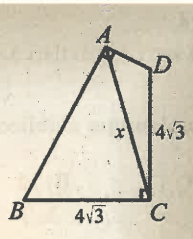
28.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$|AB| = |BC| = 6$ br
$|BD| = x$ br



olduğuna göre x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

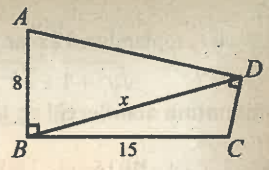
A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 11

29.
$ABCD$ bir dörtgen
$DA \perp AB$
$BC \perp CD$
$|BC| = |CD| = 4\sqrt{3}$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre x'in tam sayı olarak alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?



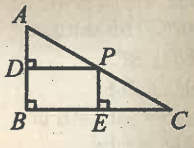
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

30.
$ABCD$ bir dörtgen
$AB \perp BC$
$CD \perp DA$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 15$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x'in tam sayı olarak alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?



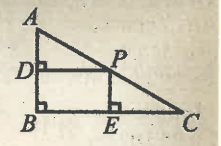
A) 15 B) 16 C) 17 D) 20 E) 22

31.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 12$ br
$P \in [AC]$
olduğuna göre P noktasının AB ve BC doğrularına uzaklıkları toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?



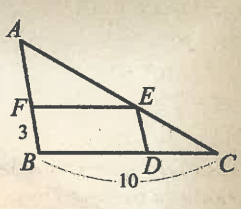
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

32.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 12$ br
$P \in [AC]$
olduğuna göre P noktasının AB ve BC doğrularına uzaklıkları toplamının alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?



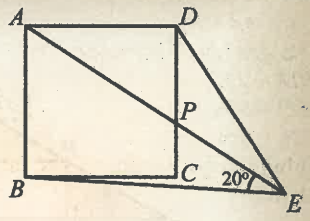
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

33.
ABC bir üçgen
$BDEF$ köşeleri bu üçgen üstünde olan bir paralelkenar
$|FB| = 3$ br
$|BC| = 10$ br
olduğuna göre paralelkenarın çevresi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



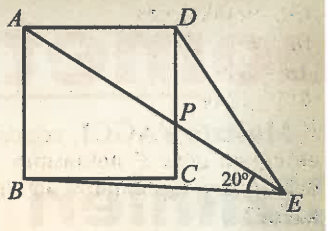
A) 9 B) 10 C) 19 D) 20 E) 21

34.
$ABCD$ bir kare
$P \in]CD[$
$m(BEA) = 20°$
olduğuna göre $m(BED)$'nin derece cinsinden alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?



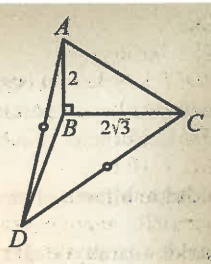
A) 20 B) 21 C) 22 D) 39 E) 40

35.
$ABCD$ bir kare
$P \in]CD[$
$m(BEA) = 20°$
olduğuna göre
$m(BED)$'nin derece cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



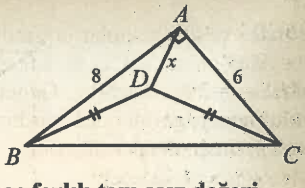
A) 30 B) 31 C) 38 **D) 39** E) 40

36.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$AD \cap]BC[= \emptyset$
$|AB| = 2$ br
$|BC| = 2\sqrt{3}$ br
D noktası, A ve C köşelerine eşit uzaklıkta bulunduğuna göre $|BD|$ en az kaç br olabilir?



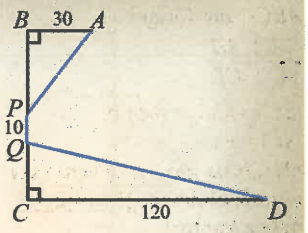
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) 4

37.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
D üçgen içinde bir nokta
$|BD| = |DC|$
$|AC| = 6$ br
$|AB| = 8$ br
olduğuna göre $|AD| = x$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



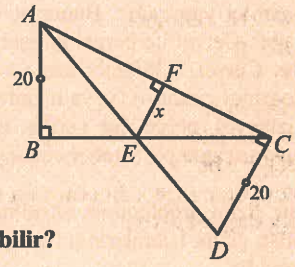
A) 1 B) 2 **C) 3** D) 4 E) 5

38.
$AB \perp BC$ ve $BC \perp CD$
$|AB| = 30$ br
$|BC| = 90$ br
$|PQ| = 10$ br
$|QD| = 120$ br
olduğuna göre
$|AP| + |PQ| + |QD|$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?



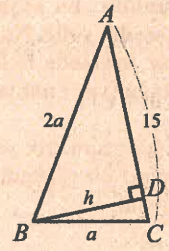
A) 150 B) 160 C) 170 **D) 180** E) 190
[Numan AKKOÇ]

39.
ABC ve ACD birer üçgen
$AB \perp BC$
$AC \perp CD$
$EF \perp AC$
$AD \cap BC = \{E\}$
$|AB| = |CD| = 20$ birim
$|EF| = x$ birim
olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 1 **B) 2** C) 9 D) 10 E) 11
[MY]

40.
ABC bir üçgen
$|AC| = 15$ br
$D \in [AC]$
$|BD| = h$ br
$|BC| = a$ br
$|AB| = 2a$ br
olduğuna göre h'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

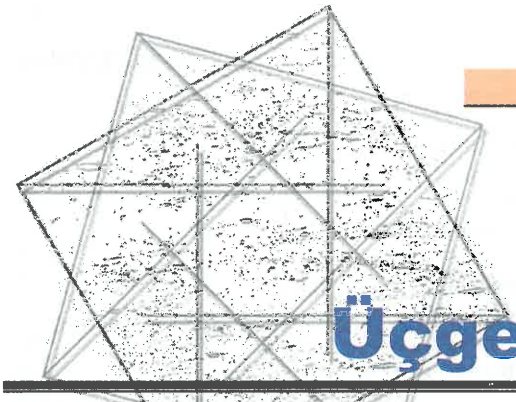


A) 7 **B) 8** C) 9 D) 10 E) 11
[MY]

www.mustafayagci.com.tr, 2011

Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Üçgen Çizimleri

Geometride ''çizim'' denince, bazı elemanları bilinen bir geometrik şeklin kağıt üzerine resmedilmesi akla gelir. Yalnız, 'nokta', 'doğru' gibi kavramlar geometride tanımsız olduklarından çizimleri en yaygın anlaşıldıkları manada yapılır. Anlayacağınız çizdiğimiz bir gerçek resim değil, taslak resim olacak.

Resimler taslak olacak diye ''kabataslak'' bir çizim yapacağımızı sanmayın. Yani elimize kağıt kalem alıp 'olsa olsa böyledir' diye karalama yapmayacağız. Daha net çizimler yapacağız. Bunun için de bazı araçlar kullanacağız. Cetvel ile pergel bu işte en çok kullanılan araçlardır. Cetvel, bildiğiniz üzere verilen iki noktadan geçen doğruyu çizmeye (veya uzunluğu belli bir doğru parçası çizmeye), pergel ise verilen bir merkeze sahip, bilinen bir yarıçapla bir çember çizmeye yarar.

Bir çizim probleminin çözülmesi, cetvel ve pergelle yapılan çizim işlemlerinin bir veya birkaç defa tekrar edilmesidir.

Şimdi izlenecek metotlar hakkında aşağıdaki kısa bilgiyi verelim:

Bir kısım çizim problemlerinin çözümü, bilinmeyen bir noktanın belirtilmesine götürülür. Bu takdirde izlenecek metot şudur:

Aranılan noktanın gerçeklediği iki koşul ayrı ayrı düşünülür; bu koşullardan herbirine bir geometrik yer karşılık gelir. Nokta, aynı zamanda her iki geometrik yer üzerinde bulunacağından bunların kesim noktasında (veya noktalarında) bulunur.

Eğer geometrik yerler kesişen birer doğru ise problemin yalnız bir çözümü vardır, fakat doğrular paralelse çözüm yoktur.

Eğer geometrik yerler iki çember veya bir çember ile bir doğru ise, bunların kesişmesi halinde problemin iki, teğet olmaları halinde bir çözümü vardır, kesişmedikleri takdirde çözümü yoktur.

Geometrik yerler bir doğru veya bir konik ise, bu doğru ile koniğin kesim noktalarını (en çok iki nokta) pergel ve cetvelle bulmak mümkün olduğundan problem çözülmüş sayılır. Fakat iki koniğin veya bir konik ile bir çemberin kesim noktaları her zaman cetvel ve pergelle bulunamaz.

En basit çizim problemleri için gösterilen bu 'iki geometrik yerin kesişmesi' metodu, en karışık problemlere de uygulanmak üzere şöylece genişletilir:

Şekil için bilinen koşullardan birisi geri bırakılır ve böylece belirsiz kılınan şeklin noktalarının geometrik yerleri aranır. Sonra geri bırakılan koşul da kullanılarak çizim tamamlanır. Öyleyse, birçok geometrik yer bilmek, bunlar doğru veya çember olduğu takdirde, büyük bir önem taşır.

Geometrik yerleri hemen uygulamak mümkün olmazsa izlenecek metot şudur:

a. Şekle bilinen elemanlar katılır.

Örnek olarak, iki uzunluğun toplamı (yahut farkı) verilmişse bu iki uzunluğu ayrı ayrı göstermek yetmez, toplamın kendisinin (yahut farkın) gösterilmesi gerekir. Genel olarak, bu toplamın (yahut farkın) bir ucunu verilen bir noktaya düşürmeye çalışırız.

b. Verilmedikleri halde, bilinenler yardımıyla kolayca belirtilmesi mümkün olan doğru parçalarını ve açıları bulmak için şekil dikkatle incelenir.

c. Bundan sonra, bilinenler yardımıyla şeklin çizilebilecek öyle bir kısmı aranır ki bundan esas şeklin çizimine geçmek mümkün olsun.

Burada, çeşitli kısımlar arasından birini seçmek gerekince, genel olarak şeklin derhal en büyük parçasını verecek olan kısmı seçilmelidir. Genellikle şeklin içinde çizim yolu hemen görülebilen yardımcı bir üçgenin aranması, esas prensip olarak kullanılır.

Yukarıda açıkladığımız iki metodun dışında, çizim problemlerine; doğru ötelenme, simetri, dönme ve benzerlik metotları da uygulanabilir. İlerde yeri geldikçe bu metotlarla yapılacak çizimlere de örnekler vereceğiz. Bu bölümde geometrik yerler yardımıyla hemen yapılabilen çizimler ile, bilinenler yardımıyla kolayca çizilebilen yardımcı bir üçgenden hareket edilerek yapılan çizimler üzerinde duracağız.

Çizimlere başlamadan önce notlarından istifade ettiğim İbrahim Etem Özdemir hocama teşekkürlerimi sunarım.

Bir çizim problemi, sırayla şu safhalardan geçilerek yapılır:

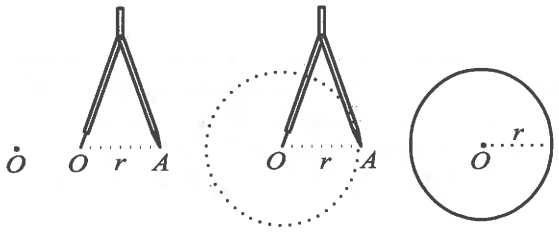
1. Bilinenler tespit edilir.
2. Taslak çizilir ve bilinen elemanlar bu taslak üzerinde işaret edilir.
3. Çizimin düşünüş yolu açıklanır.
4. Çizim yapılır.
5. Çizimin doğruluğu gerçeklenir. Yani yapılan çizimin koşulan şartlara uyup uymadığı gösterilir. (Çizim düşünüş yolundaki esaslara göre koşulan şartlar altında yapılacağından çizimin gerçeklenmesi işi yapılmasa da olabilir.)
6. Çizimin irdelenmesi yapılır. Yani koşulan şartlar altında çizimin mümkün olup olmadığı ve sayısı incelenir. Eşit şekiller tek bir çizim olarak kabul edilir.

Öncelikle temel çizim tekniklerini öğreneceğiz. Bunların her biri diğer çizim problemlerinde kullanılacaktır. Bazen hiç anlatılmayıp atıfta bulunulacağından temel çizim problemlerinin ezbere bilinmesi gerekir.

Çember çizimi

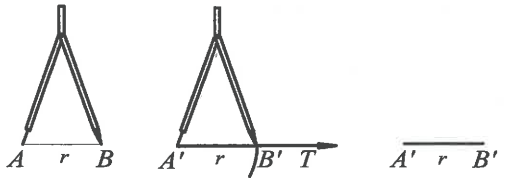
Düzlemde, verilen sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine **çember** denir.

Düzlemde alınan O noktasından sabit r br uzaklıktaki noktaları çizmek için pergelin ağız genişliğini r br kadar açıp pergelin sivri ucunu O noktasına batırıp genişliği bozmadan bütün r br uzaklıktaki noktaları işaretlediğimizde bir çember elde etmiş oluruz.



Bir Doğru Parçasına Eş Bir Doğru Parçası Çizimi

$[AB]$'ye eş bir doğru parçası çizmek için ilk önce $[A'T$ ışını çizilir ve pergelin ağzı $|AB|$ kadar açılıp genişliği bozmadan pergelin sivri ucunu A' noktasına batırıp ışın üzerinde $[A'T$ ışınını kesen bir yay çizilir.

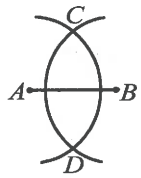


Yayın ışını kestiği noktaya B' dersek $[AB]$'ye eş $[A'B']$ doğru parçasını çizmiş oluruz.

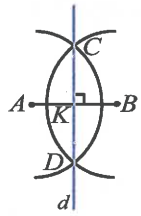
Verilen Bir Doğru Parçasının Orta Dikmesinin Çizimi



Verilen doğru parçası yukardaki $[AB]$ olsun.



Bu doğru parçasına orta dikme çizmek için pergelin genişliğini göz kararı yarıdan fazla açıp pergelin sivri ucunu doğru parçasının herhangi bir ucuna batırıp bu noktayı merkez kabul eden çember çizilir.



Daha sonra pergelin genişliğini bozmadan diğer uca da aynı işlemi uyguladığımızda ortaya çıkan bu iki çemberin keşişim noktalarından geçen doğruyu çizdiğimizde, doğru parçasına orta dikme çizmiş oluruz.

İki çemberin kesiştiği noktalara C ve D dersek, C ve D'den geçen d doğrusu istenilen orta dikmedir.

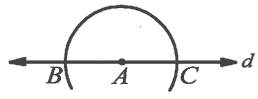
$$d \perp AB \text{ ve } |AK| = |KB|$$

Bir Doğruya Üzerindeki Bir Noktadan Dikme Çizimi

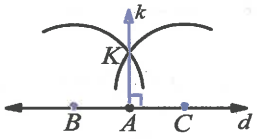
Düzlemdeki bir d doğrusuna, üzerindeki A noktasından bir dikme çizelim.



Pergelimizin sivri ucunu A noktasına batırıp doğruyu kesen iki ayrı yay (ya da 180°'den büyük ölçülü bir yay) çizelim.



Yayların doğruyu kestiği noktalara B ve C diyelim. Pergelin genişliğini $|BC|$ uzunluğunun yarısından fazla açıp sivri ucu B noktasına batırıp doğrunun dışında bir yay çizilir daha sonra genişliği bozmadan sivri uç C noktasına batırılıp bir önce çizilen yay kesilir. A noktasından başlayıp bu kesim noktasından geçen ışın çizildiğinde doğruya A noktasından dikme çizilmiş olur.



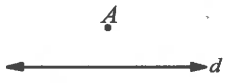
$[AK \perp d$ ve $|BA| = |AC|$ dir.

UYARI

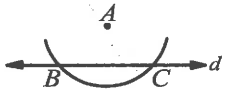
✓ Şekilde B ve C noktaları K'ye birleştirilirse yani $[BK]$ ve $[KC]$ doğru parçaları çizilirse $|BK| = |KC|$ olur. Anlayacağınız ikizkenar üçgen çizme metotlarından birini de bu arada halletmiş olduk. ☺

Bir Doğruya Dışındaki Bir Noktadan Dikme Çizimi

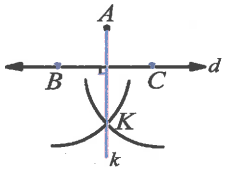
Aşağıdaki d doğrusuna dışındaki A noktasından cetvel ve pergel yardımıyla bir dikme indirmeye çalışalım bakalım.



Pergelin sivri ucunu A noktasına batırıp doğruyu iki ayrı noktada kesecek bir yay çizelim.



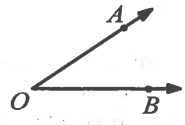
Yayın doğruyu kestiği noktalara B ve C diyelim. Pergelin genişliğini $|BC|$ uzunluğunun yarısından fazla açıp sivri ucu B noktasına batırıp doğrunun dışında bir yay çizilir daha sonra genişliği bozmadan sivri uç C noktasına batırılıp bir önce çizilen yay kesilir.



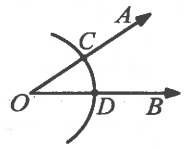
A noktasından başlayıp bu kesim noktasından geçen ışın çizildiğinde doğruya A noktasından dikme çizilmiş olur.

Verilen Bir Açının Açıortayının Çizimi

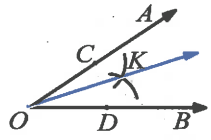
Şekildeki AOB açısına açıortay çizelim.



Pergelin sivri ucunu açının köşe noktası olan O noktasına batırıp, açının kollarını kesecek bir yay çizelim.



Yayın açının kollarını kestiği noktalara C ve D dedikten sonra, pergelin genişliğini $|CD|$'nin yarısından fazla açıp pergelin sivri ucunu C ve D noktalarına batırıp açının iç bölgesinde kesişen iki yay çizelim.



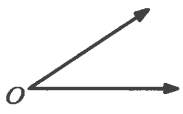
Bu yayların kesim noktası K olsun. OCK ile ODK üçgenleri eş olacağından, OK doğrusu AOB açısının açıortayı olur.

UYARI

✓ C ve D noktaları belirlendikten sonra, $[CD]$ doğru parçasının orta dikmesini çizsek de olurdu. Hatta bir doğruya dışındaki bir noktadan dik çizmeyi de öğrendiğimizden, O'dan $[CD]$'ye dik çizsek de olurdu.

Verilen Bir Açıya Eş Açının Çizimi

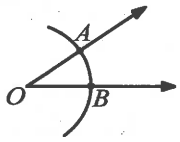
Pergel ve cetvel yardımı ile aşağıda verilen O açısına eş bir açı çizelim.



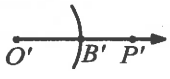
Çizimi yapabilmek için ilk önce $[O'P$ ışınını çizelim.



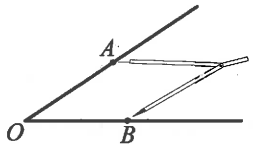
Daha sonra pergelin sivri ucunu O noktasına batırıp açının iki kolunu da kesecek bir yay çizilir. Yayın açının kollarını kestiği noktalara A ve B diyelim.



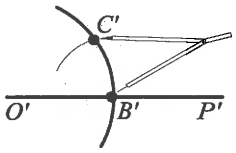
Pergelin genişliğini bozmadan sivri ucu O' noktasına batırıp aynı şekilde bir yay çizilir. Yayın ışını kestiği noktaya ise B' diyelim.



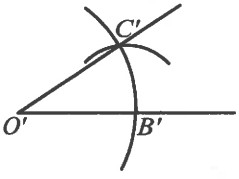
Daha sonra pergelin genişliğini $|AB|$ kadar açıp



pergelin sivri ucunu B' noktasına batırıp daha önce çizdiğimiz yayı kesecek şekilde bir yay çizeriz.



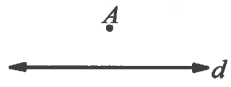
Bu iki yayın kesim noktasına C' deyip O' ve C' noktalarından geçen ışını çizdiğimizde ilk açıya eş bir açı çizmiş oluruz.



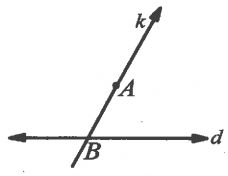
$m(O) = m(C'O'B')$ ve $O \cong C'O'B'$

Bir Doğruya Paralel Doğruların Çizimi

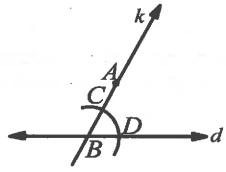
1. Eş Açı Yöntemi İle. Bir d doğrusuna dışındaki bir A noktasından cetvel ve pergel yardımı ile eş açı yöntemini kullanarak paralel bir doğru çizelim.



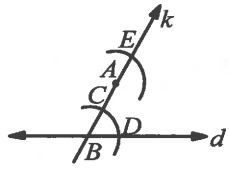
İlk olarak A'dan geçen ve d'yi B gibi bir noktada kesen bir k doğrusu çizelim.



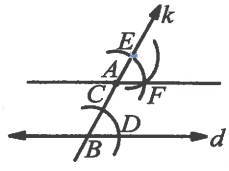
Daha sonra pergelin genişliğini $|AB|$'den kısa olacak şekilde açıp pergelin sivri ucunu B noktasına batırıp her iki doğruyu da kesecek bir yay çizelim.



Yayın doğruları kestiği noktalara C ve D diyelim. Pergelin genişliğini bozmadan aynı şekilde sivri ucu A'ya batırıp k doğrusunu kesecek şekilde aynı büyüklükte başka bir yay çizelim ve yayın k doğrusunu kestiği noktaya E diyelim.

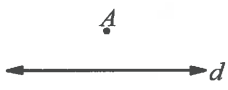


Pergelin genişliğini $|CD|$ kadar açıp sivri ucu E noktasına batırıp E noktasından geçen yayı kesecek bir yay çizelim. İki yayın kesiştiği noktaya F noktası dersek ve A ile F'den geçen doğruyu çizdiğimizde d doğrusuna paralel ve A noktasından geçen doğruyu çizmiş oluruz.

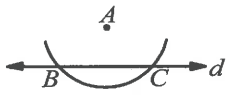


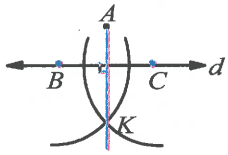
$m(EAF) = m(CBD)$ olduğundan $d \,//\, [AF]$'dir.

2. Dikler Yöntemi İle. Şekildeki d doğrusuna dışındaki A noktasından cetvel ve pergel kullanarak dikler metodu ile paralel çizelim.

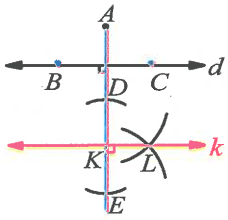


İlk olarak A'dan d doğrusuna (bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme çizmede olduğu gibi) bir dikme çizilir.





Çizdiğimiz dikme yukardaki AK olsun. Daha sonra çizilen bu doğru üzerindeki K noktasından (herhangi başka bir nokta da olabilir) bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme çizmede olduğu gibi bir dikme çizilir.



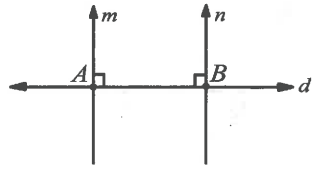
Bu dikme de KL (k doğrusu) olsun. $BC \perp AK$ ve $AK \perp KL$ olduğu için $d \;//\; k$ dir. Yani d'ye paralel bir k çizmiş olduk!

Bir Doğruya Verilen Uzaklıktaki Paralellerin Çizimi

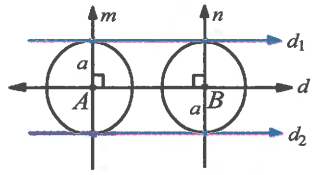
Aşağıdaki d doğrusuna paralel ve ona a birim uzaklıkta olan iki paralel doğru çizelim.



Önce üzerindeki A ve B noktalarından geçen ve d'ye dik iki doğru çizilir (Şekildeki m ve n doğruları).



Daha sonra pergelin genişliğini a birim açıp sırasıyla A ve B noktalarına batırıp çizilen dikleri iki ayrı noktada kesecek dört yay çizilir (Tam bir çember de olabilir).

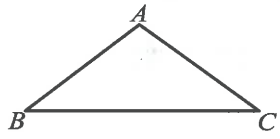


Yaylarla doğruların kesiştikleri noktalardan geçen doğrular çizildiği zaman d doğrusuna paralel ve ona a birim uzaklıkta olan iki doğru çizilmiş olur (Şekildeki d_1 ve d_2 doğruları).

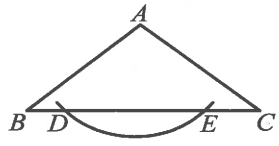
Üçgenin Yardımcı Elemanlarının Çizimi

1) Üçgende Yükseklik Çizimi.

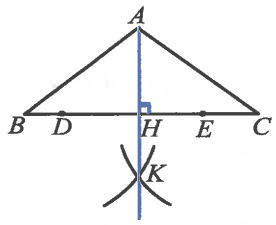
Şekildeki ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait yüksekliği çizelim.



Bir doğruya, dışındaki bir noktadan dikme çiziminde olduğu gibi pergelin sivri ucunu A'ya batırıp $[BC]$'yi iki noktada kesecek bir yay çizelim ve yayın $[BC]$'yi kestiği noktalara D ve E diyelim.



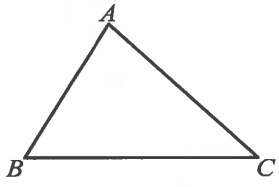
Daha sonra pergeli $|DE|$'nin yarısından fazla açıp sırasıyla pergelin sivri ucunu D ve E noktalarına batırıp üçgenin iç bölgesinde ya da dış bölgesinde kesişecek iki yay çizelim ve yayların kesiştiği noktaya K diyelim.



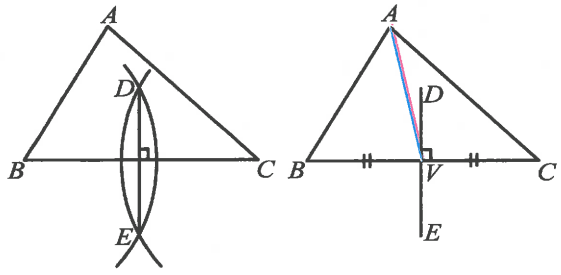
K ve A noktalarından geçen doğruyu çizdiğimiz zaman h_a'yı (AK ışını) çizmiş oluruz.

2) Üçgende Kenarortay Çizimi.

Aşağıdaki ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait olan kenarortayı çizelim.



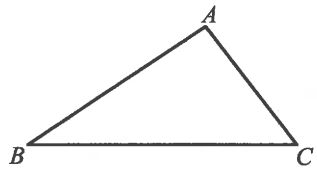
Çizimi yapabilmek için $[BC]$'nin orta noktasını bulmamız gerekir. Bunun için pergelin genişliğini $|BC|$'nin yarısından fazla açıp sırasıyla B ile C'ye batırıp $[BC]$'yi ve birbirlerini iki noktada kesecek iki yay çizelim. Yayların kesiştikleri noktalara D ve E dersek ve D ve E'den geçen doğrunun $[BC]$'yi kestiği nokta (V noktası) $[BC]$'nin orta noktası olur.



Bu nokta ile A noktasını birleştirdiğimizde v_a'yı çizmiş oluruz.

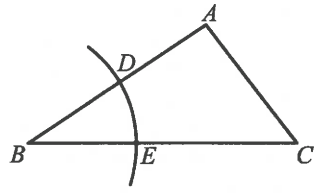
3) Üçgende Açıortay Çizimi.

ABC üçgeninde B açısına ait iç açıortayı çizelim.

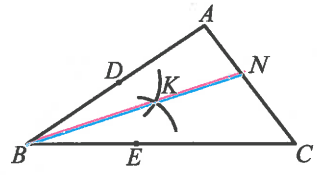


Bir açının açıortayının çiziminde uyguladığımız metodu B açısına uygularsak, B açısının açıortayını çizmiş oluruz.

Pergelin sivri ucunu B noktasını batırıp ABC açısının kollarını kesecek şekilde bir yay çizelim.



Yayın, açının kollarını kestiği noktalara D ve E deyip pergelin genişliğini $|DE|$ den az olmayacak şekilde açıp D ve E noktalarına batırarak kesişen iki yay çizelim.

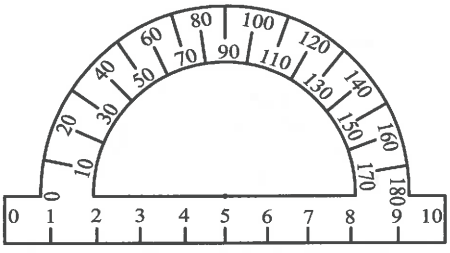


Bu yayların kesim noktalarından biri K olsun. B noktasından başlayıp, K noktasından geçen ışını çizdiğimizde B açısının açıortayını çizmiş oluruz.

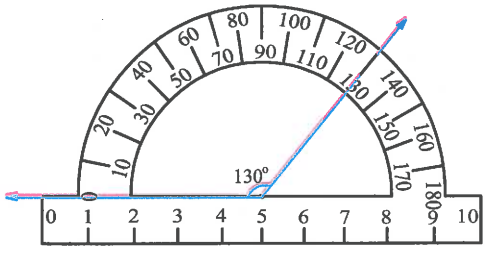
Üçgen Çizimleri

Üçgen dersinden hatırlarsınız, bir üçgenin çizilebilmesi için en az 3 bilginin lazım olduğunu söylemiştik. Hatta daha genel olarak, bir n-genin çizilebilmesi için de en az $2n-3$ bilgi gerekliydi.

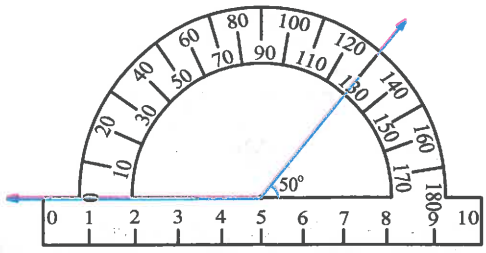
Şimdi bu bilgilerdeki ''en az'' tabirine kafa yoracağız. ''En az'' dendiğine göre, demek ki her $2n-3$ bilgi n-geni çizmeye yetmiyor. Gerçekten de öyledir. $2n-3$ bilginin $2n-3$ tanesi de açı ölçüsüyse çokgeni nasıl çizeceğiz ki? Olsa olsa çizilmesi istenen şeye benzer bir şey çizebiliriz. Herhangi bir uzunluk ölçüsü bilinmedikçe gerçek boyutta çizip çizmediğimizi hiçbir zaman bilemeyiz. Bir de olayın şu boyutu var: Bir n-genin iç açılarının ölçüleri toplamını bildiğimiz için $((n-2)\cdot 180°)$, n tane açı ölçüsünün n tanesinin de verilmesine gerek yoktur, ''en çok'' $n-1$ tanesi yeterli, biz o bilgileri kullanarak n'ninciyi zaten bulabiliriz. O halde ''en çok'' $n-1$ açı ölçüsü olacaksa, ''en az'' da $n-2$ tane uzunluk ölçüsü olmalıdır. Her neyse... Uzunluk ölçülerini çizmek kolay... Elimizde nihayetinde bir cetvel var. Peki açıları nasıl net olarak çizeceğiz, ya ölçüsü bire-bir uymazsa? Bazı açılar, uzunluklar çizildikçe kendiliğinden oluşacaklar ama bazen veriler arasında açı ölçüsü olur ki, o ölçüye sahip açılar çizilmeden işlemlere başlanamaz ya da devam edilemez. İşte bunun için de **açıölçer** ya da **iletki** denen bir alet kullanılır.



Bu aletle, her açı, ölçüsü ne olursa olsun, teorik olarak çizilebilir kabul edilir.



Örneğin, ölçüsü 130° olan açı yukardaki gibi çizilir. Benzer şekilde ölçüsü 40°, 50° veya 60° olan açılar da çizilebilir. Tüm açıların yönünün sol tarafa doğru olacağını sanmayın.



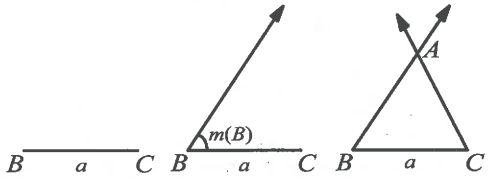
Örneğin, yukardaki gibi çizilmiş 130°'lik açının bütünleyenini kullanarak ölçüsü 50° olan ve sağa bakan açı da çizilebilir.

a, $m(B)$, $m(C)$ verileriyle ABC üçgeni çizimi

Bir kenarının uzunluğuyla, iki iç açısının ölçüsü bilinen üçgenlerin çizimini öğreneceğiz.

Bu çizime **Açı-Kenar-Açı Temel Çizimi (*AKA* Çizimi)** denir.

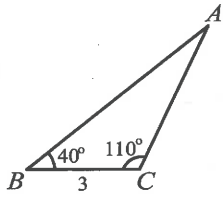
Bunun için önce, cetvelle uzunluğu a birim olan $[BC]$ kenarı çizilir. Daha sonra açıölçer yardımıyla bir kolu BC'yi taşıyan ve ölçüsü $m(B)$ kadar olan bir B açısı çizilir. Hemen ardından yine açıölçer yardımıyla, bir kolu BC'yi taşıyan ve ölçüsü $m(C)$ olan C açısı çizilir.



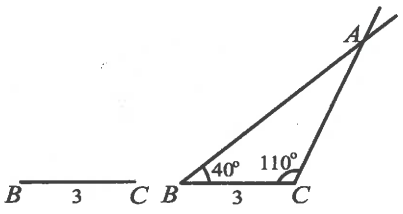
A noktası çizilen ışınların her ikisinin de üzerinde olması gerektiğinden, bu açıların BC'yi taşımayan kollarının kesişim noktası A köşesini verir.

Örnek.
$a = 3\ cm$
$m(B) = 40°$
$m(C) = 110°$
olan ABC üçgenini çizelim.

Çözüm: İlk önce verilere uyacak bir taslak üçgen çizelim.



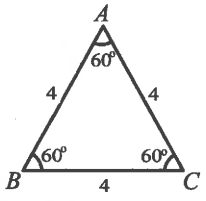
$[BC]$ kenarını cetvel yardımı ile çizelim ve taslak çizime göre B ile C noktalarını belirleyelim.



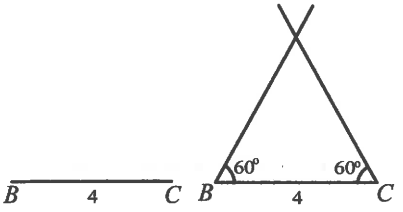
Daha sonra iletki yardımı ile B ve C açılarını oluşturup açıların kollarının kesiştiği noktaya A noktası dersek ve $[AB]$ ile $[AC]$ doğru parçalarını çizdiğimizde üçgenimizi tamamlamış oluruz.

Örnek.
$a = 4\ cm$
$b = 4\ cm$
$c = 4\ cm$
olan ABC üçgenini çizelim.

Çözüm:
Hemen taslak şeklimizi çizelim.

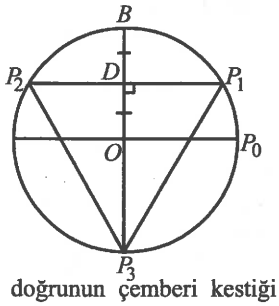


Şu an için üç kenar uzunluğu da bilinen üçgenlerin çizimini bilmediğimizden, eşkenar üçgeni, bir kenarının uzunluğu 4 *cm* olup, iki iç açısının ölçüsü 60° olan üçgen diye düşüneceğiz.
$[BC]$ kenarını cetvel yardımı ile çizelim ve taslak çizime göre B ile C noktalarını belirleyelim.



Daha sonra iletki yardımı ile B ve C açılarını oluşturup açıların kollarının kesiştiği noktaya A noktası dersek ve $[AB]$ ile $[AC]$ doğru parçalarını çizdiğimizde üçgenimizi tamamlamış oluruz.

Şimdi de bir eşkenar üçgenin cetvel ve pergel ile nasıl çizilebileceğine bir bakalım:



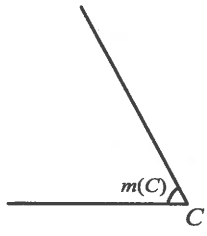
1. Önce O merkezli OP_0 yarıçaplı bir çember çizelim.
2. Sonra çember üzerinde $m(P_0OB) = 90°$ olacak şekilde bir B noktası işaretleyelim.
3. $[OB]$ doğru parçasının orta noktası D ve çemberi kestiği diğer nokta P_3 olsun.
4. D'den geçen OB'ye dik doğrunun çemberi kestiği noktalar P_1 ve P_2 olsun.
5. O halde $P_1P_2P_3$ bir eşkenar üçgendir.

a, b, $m(C)$ verileriyle ABC üçgeni çizimi

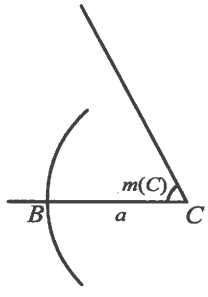
İki kenar uzunluğuyla, bu kenarlarının belirttiği açısının ölçüsü bilinen üçgenlerin çizimini öğreneceğiz.

Bu çizime **Kenar-Açı-Kenar Temel Çizimi (*KAK* Çizimi)** denir.

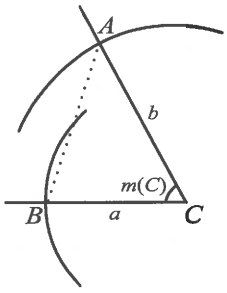
Bunun için önce iletki yardımıyla C açısı çizilir.



Daha sonra C merkezli ve a birim yarıçaplı bir çember yayıyla açının kollarından biri kesilir. Kesim noktası bize B köşesini verir.



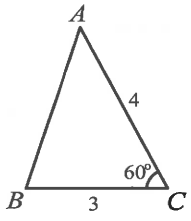
Ardından C merkezli ve b birim yarıçaplı bir çember yayıyla açının diğer kolu kesilir. Bu kesim noktası da A köşesini verir.



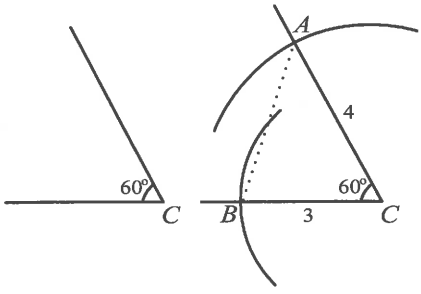
A ve B noktalarını birleştiren doğru cetvel yardımıyla çizilerek, çizim tamamlanır.

Örnek.
$a = 3\ cm$
$b = 4\ cm$
$m(C) = 60°$
olan ABC üçgenini çizelim.

Çözüm:
İlk önce verilere uyacak bir taslak üçgen çizelim.



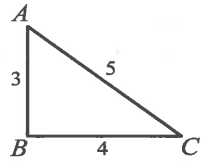
Şekildeki taslak üçgene uyacak şekilde iletki yardımı ile ölçüsü 60° olan bir C açısı çizelim.



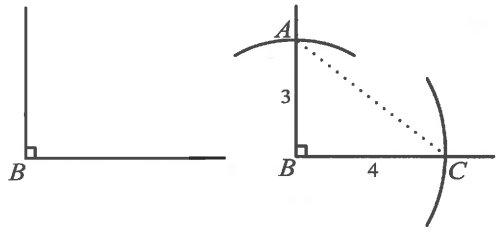
Daha sonra pergelin ucunu 3 cm açıp sivri ucunu C noktasına batırıp açının alt kolunu kesecek şekilde bir yay çizilir ve B noktası işaretlenir, yine pergelin genişliğini 4 cm açıp diğer kolunu kesecek bir yay daha çizilir ve A noktası işaretlenir. A ve B noktaları birleştirildiğinde ABC üçgeni çizilmiş olur.

Örnek.
$a = 4\ cm$
$b = 5\ cm$
$c = 3\ cm$
olan ABC üçgenini çizelim.

Çözüm: İlk önce bu verilere göre taslak bir üçgen çizelim.



Pisagor Teoremi'nin tersi gereği, B açısının dik olacağını görmüşsünüzdür. Şu an için üç kenar uzunluğu da bilinen üçgenlerin çizimini bilmediğimizden, bir dik açı çizerek çizime başlayacağız.



B açısını iletki yardımıyla çizebileceğimiz gibi, B'den çıkan bir ışın çizip, ardından bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme çizmede kullandığımız teknikle dik açının diğer kolunu da çizebiliriz.

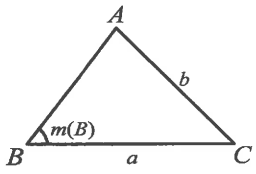
Daha sonra pergelin ucunu 3 cm açıp sivri ucunu B noktasına batırıp açının dikey kolunu kesecek şekilde bir yay çizilir ve A noktası işaretlenir, yine pergelin genişliğini 4 cm açıp diğer kolunu (yatay) kesecek bir yay daha çizilir ve C noktası işaretlenir. A ve C noktaları birleştirildiğinde ABC üçgeni çizilmiş olur.

a, b, $m(B)$ verileriyle ABC üçgeni çizimi

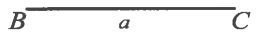
İki kenar uzunluğuyla, bu kenarlardan birinin karşısındaki iç açısının ölçüsü bilinen üçgenlerin çizimini öğreneceğiz.

Bu çizime **Kenar-Kenar-Açı Temel Çizimi (*KKA* Çizimi)** denir.

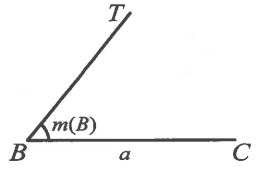
Önce bir taslak şekil çizelim.



[BC] çizildikten sonra, A'yı aramaya koyulacağız. Bunun için önce cetvelle boyu a birim olan [BC] kenarını çizelim.

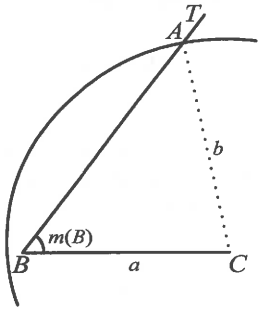


Ardından [BT ışını çizilerek, iletki ve cetvel yardımıyla ölçüsü $m(B)$ olacak şekilde TBC açısı oluşturulur.

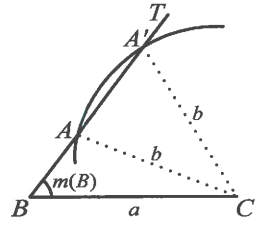


Önce B açısını çizip, ardından cetvel veya pergel yardımıyla da C noktasını işaretleyebilirdik. Neyse... A noktası çizilen [BT ışını üstünde olmalıdır. Şimdi bu ışın üstünde C köşesine uzaklığı b birim olan noktayı aramaya koyulacağız.

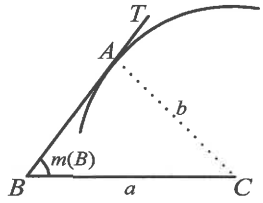
C köşesine uzaklığı b birim olan noktaların geometrik yeri C merkezli b birim yarıçaplı çember olduğundan, bu çemberi çizelim. A noktası aynı zamanda bu çemberin de üstünde olmalıdır. O halde [BT ışınıyla çember yayının kesim noktası bize A noktasını verecektir.



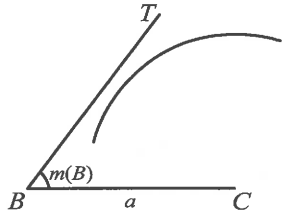
Eğer $b > a$ verilirse ışın çemberi tek noktada keseceğinden üçgenin çizimi tektir.



Eğer $a \cdot \sin B < b < a$ olarak verilirse, (C noktasının [BT ışınına uzaklığının $a \cdot \sin B$ olduğunu fark ediniz) ışın çemberi iki farklı noktada keser. O zaman iki farklı ABC üçgeni çizilir. Yani bu veriler tek bir üçgen belirtmezler.



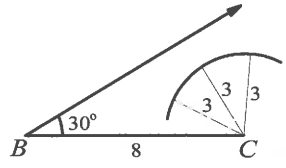
Eğer $b = a \cdot \sin B$ verilirse, ışın çembere teğet olur. Bu durumda kesişme noktası sadece 1 tane olduğundan ABC üçgeni çizilebilir ve çizim tek türlü olur.



Eğer $b < a \cdot \sin B$ verilirse ışınla çember kesişmezler. Bu durumda bir A noktası belirmez. Dolayısıyla ortada üçgen olmadığından, çizim de mümkün olmaz.

Örnek.
$a = 8\ cm$
$b = 3\ cm$
$m(B) = 30°$
verileri bir üçgen belirtiyorsa, o üçgeni çizelim.

Çözüm:



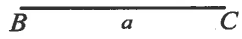
$3 < 8 \cdot \sin 30°$ olduğundan yani ışın çemberi kesmediğinden bu veriler üçgen belirtmez, dolayısıyla çizim de yapılamaz.

a, b, c verileriyle ABC üçgeni çizimi

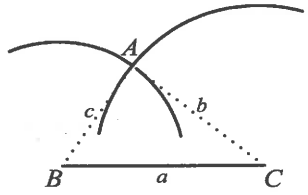
Nihayet üç kenar uzunluğu da bilinen üçgenlerin nasıl çizileceğini öğrenme sırası geldi.

Bu çizime **Kenar-Kenar-Kenar Temel Çizimi (*KKK* Çizimi)** denir.

Bunun için önce cetvelle üçgenin herhangi bir kenarı çizilir. Önce hangisini seçeceğinizin bir önemi yoktur ama önce en uzun kenarın çizimiyle başlamak daha küçük çemberler çizdireceğinden yer tasarrufu sağlar. En uzun kenarın $[BC]$ olduğunu farzedelim ve $[BC]$'yi çizelim.



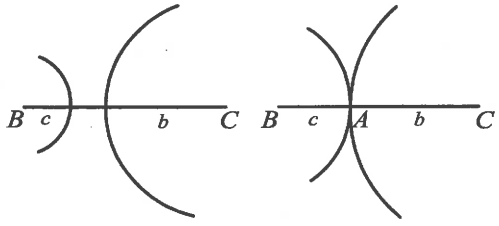
Şimdi öyle bir A noktası bulacağız ki B köşesine uzaklığı c birim, C köşesine uzaklığı da b birim olacak.



B köşesine uzaklığı c birim olan noktaların geometrik yeri B merkezli c yarıçaplı çember olduğundan A köşesi bu çember üstünde olmalıdır. Diğer yandan C köşesine uzaklığı b birim olan noktaların geometrik yeri de C merkezli b yarıçaplı çember olduğundan, A köşesi bu çemberin de üstünde olmalıdır. O halde bu çemberlerin kesiştiği yer A noktasıdır.

Tabi bu noktada okur şunu sorabilir: ''Bu çemberlerin kesişeceğini ne biliyorsun ki?''

Okur haklı. Bu çemberler kesişmeyebilir. Bunun için çizilmesi istenen üçgenin kenar uzunluklarının daha önce öğrendiğimiz ''üçgen eşitsizlikleri''ni sağlaması gerekir. Gerçi o eşitsizliklerin çıkışı da bu problemin çözümüne dayanmaktadır. Anlatalım:



$b + c < a$ olursa, üst sol şekilde göreceğiniz üzere çemberler kesişmeyecektir. Bu durumda da bir A noktası elde edilmeyecektir.
$b + c = a$ olursa da, üst sağ şekilde göreceğiniz üzere çemberler birbirlerine BC doğrusu üzerinde teğet olurlar. Bu durumda da B, A, C noktaları doğrusal olup, üçgen belirtmezler.

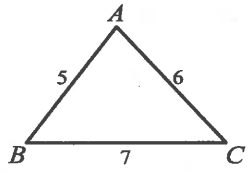
Bu irdeleme sonucunda ''**üçgen eşitsizlikleri**'' diye bilinen

$$b + c > a$$
$$c + a > b$$
$$a + b > c$$

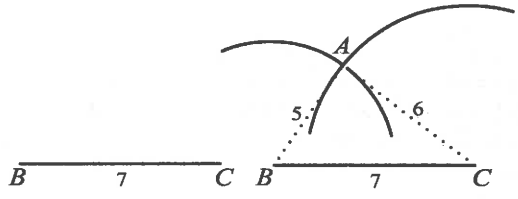
eşitsizliklerine ulaşmış oluruz.

Örnek.
$a = 7\ cm$
$b = 6\ cm$
$c = 5\ cm$
olan ABC üçgenini çizelim.

Çözüm: Verilerin üçgen eşitsizliklerini sağladığını kontrol ederek, taslak şeklimizi çizelim.



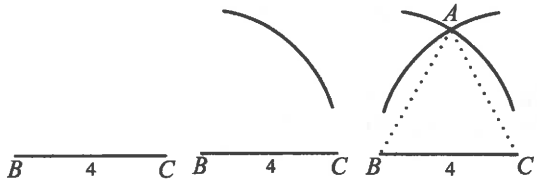
Önce en uzun kenar olan $[BC]$'yi cetvelle çizelim.



Pergelin ucunu 5 *cm* açıp, sivri ucunu B'ye batırıp doğru parçasının üst bölgesinde bir yay çizelim. Hemen ardından pergelin uçları arasındaki mesafeyi 6 *cm*'ye çıkartıp, sivri ucunu C'ye batırıp, yine üst bölgede başka bir yay çizelim. Bu yayların kesim noktası bize A köşesini verir.

Örnek. *Bir kenar uzunluğu 4 cm olan bir eşkenar üçgen çizelim.*

Çözüm: Daha önce bu çizimi yapmıştık ama açı ölçülerinden yardım alarak iletkiyle yapmıştık. Şimdi tüm kenar uzunlukları belli üçgen çiziminden yapacağız.



Uzunluğu 4 *cm* olacak şekilde cetvelle $[BC]$ kenarı çizilir. Pergelin bir ucu B'ye diğer ucu C'ye konarak daha sonra da bu uçların yerleri değiştirilerek, doğru parçasının üst bölgesinde iki yay çizilir. Bu yayların kesim noktası A köşesini verir. Böylelikle ABC eşkenar üçgeni çizilmiş olur.

Sonuçlar:

✓ Bir önceki örnekte, iletki kullanmadan bir eşkenar üçgeni çizmeyi başardık. Yani iletki kullanmadan 60 derece ölçüye sahip bir açı çizmiş olduk. Ayrıca cetveli de sadece 4 *cm* uzunluğu çizmek için kullandık başka bir işe yaramadı. Anlayacağınız 60° ölçülü bir açı çizmek için sadece pergel yeterlidir. Hatta bir kenarının uzunluğu önemsenmeyen bir eşkenar üçgen çizimi de sadece pergel ile yapılabilir.

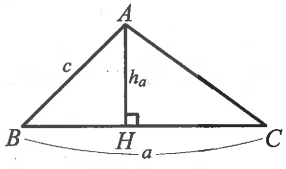
✓ Dersimizin başında bir üçgene ait yardımcı elemanların nasıl çizileceğini de göstermiştik. O metotları, çizilen eşkenar üçgenin herhangi bir yardımcı elemanını çizersek, ölçüsü 30° olan bir açıyı da iletki kullanmadan çizmiş oluruz.

✓ Eşkenar üçgendeki yardımcı eleman çizimleri aslında bir dik açının da iletkisiz çizilebileceğini anlatır. Ama biz zaten (o an vurgulamamış olsak da) bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan dikme çizimini öğrenirken bunu başarabilmiştik.

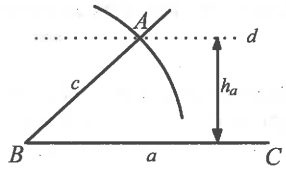
✓ Sadece cetvel ve pergel kullanarak (iletki olmadan) bir açının açıortayını da çizmeyi öğrendiğimizden, iletkisiz çizilebilecek açıların yarısı kadar ölçüye sahip açıları da iletkisiz çizebileceğimizi anlarız. Dik açı iletkisiz çizilebildiğinden, ölçüsü 45° olan açı da iletkisiz çizilebilir. Hatta 45° / 2 = 22,5° ve 22,5° / 2 = 11,25° bile... Benzer şekilde 30° ölçüye sahip bir açı da iletkisiz çizilebileceğinden, 15° ölçüye sahip bir açı da iletkisiz çizilebilir. Hatta 15° / 2 = 7,5° ve 7,5° / 2 = 3, 75° bile... Hatta ve hatta iletkisiz çizilebilen açıları ortak köşeli çizerek bu ölçülerin toplamları ya da farklarını da iletki kullanmadan çizebiliriz. 60° + 45° = 105°, 105° - 15°/2 = 97,5° gibi...

a, h_a, *c* verileriyle *ABC* üçgeni çizimi

Şimdi de iki kenar uzunluğu ve bu kenarlardan birine inen yüksekliğinin uzunluğu bilinen üçgenlerin çizimini öğreneceğiz. Hemen bir taslak çizelim.



[*BC*]'yi cetvelimizle hemencecik çizebiliriz. Ardından yüksekliği öyle bir konumlandıracağız ki *A* noktasının *B* noktasına uzaklığı tamtamına *c br* olacak.

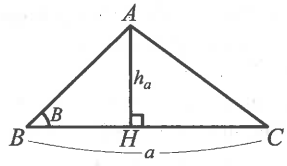


Önce boyu *a br* olan [*BC*] kenarını çizelim. *BC*'ye uzaklığı h_a olan bir *d* doğrusu çizelim. *A* noktası bu *d* doğrusunun üstünde olmalı. Diğer yandan *B*'ye uzaklığı *c br* olan noktalar da *B* merkezli *c* br yarıçaplı çember üzerinde olacağından pergelin ucunu *B*'ye batırıp, *c* merkezli çember yayını çizelim. *A* noktası hem *d* doğrusu üzerinde hem de çember yayı üzerinde olması gerektiğinden bunların kesişim noktası olmalıdır. O halde çizim tamamlanmıştır.

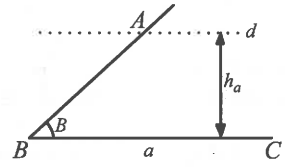
Peki bu çember yayıyla *d* doğrusu her zaman kesişir mi ki? Hayır! *d* doğrusuyla çemberin kesişmesi için $ha \leq c$ olarak verilmelidir. Yoksa üçgen çizilemez, hatta öyle bir üçgen de yoktur!

a, *m*(*B*), *A*(*ABC*) verileriyle *ABC* üçgeni çizimi

Bir kenar uzunluğu, bu kenarı taşıyan bir açısının ölçüsü ve alanı bilinen bir üçgenin çizimini öğreneceğiz. Hemen bir taslak çizelim.



Bazı açıları çizerken açıölçer (iletki) icat etmişler ama maalesef alanölçer diye bir şey icat etmemişler. Bu yüzden verilen alan bilgisinden başka bir elemanı bularak çizim yapacağız. *a* değeri ve alan değeri bilindiğinden h_a değerini bulup, çizime geçeceğiz.



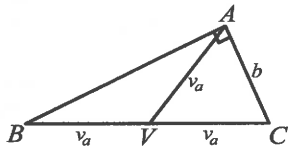
Önce boyu *a br* olan [*BC*] kenarını çizelim. *BC*'ye uzaklığı h_a olan bir *d* doğrusu çizelim. *A* noktası bu *d* doğrusunun üstünde olmalı. Diğer yandan *m*(*B*) değeri uygunsa pergelle, uygun değilse iletkiyle *CBA* açısını çizeceğiz. *A* noktası [*AB* ışını üstünde olmalıdır. O halde hem bu ışın üstünde, hem de *d* doğrusunun üstünde olacaksa, *A* noktası bunların kesiştiği yerde olmalıdır.

$m(A) = 90°$, b, v_a verileriyle ABC üçgeni çizimi

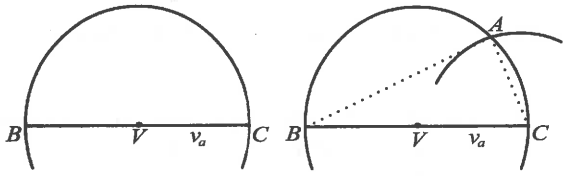
Dik kenarlarından biriyle, hipotenüse inen kenarortayının boyu bilinen bir dik üçgenin çizimini öğreneceğiz.

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay, hipotenüsün yarısına eşit idi. Öyleyse $|VB| = |VC| = v_a$ olup bellidir.

Hemen taslak şekli çizelim:



$|BC| = 2 \cdot v_a$ alınırsa çizimin tamamlanması A köşesinin bulunmasına kalır. V merkezli v_a yarıçaplı çember ile C merkezli b yarıçaplı çemberin kesim noktası A köşesini verir.



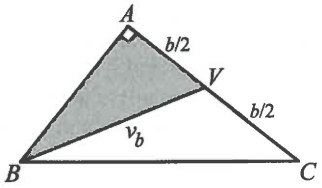
ABC üçgeni, $|BC| = 2v_a$ alınarak çizildiğinden bir dik üçgen olur. Sonra $|VA| = v_a$ ve $|CA| = b$ kadar alındığından bu üçgen koşulan şartlara uygundur.

A köşesinin bulunabilmesi, iki geometrik yerin kesişmesine bağlıdır. Bunun için de; $|AC| - |AV| < |VC| < |AC| + |AV|$ yani $b - v_a < v_a < b + v_a$ veya $b < 2v_a$ olarak verilmelidir. Bu takdirde V ve C merkezli çemberler VC doğrusuna göre simetrik iki noktada kesişirler. Fakat elde edilen iki üçgen farklı biçimde olmayıp, birbirine eşit olduğundan problemin tek bir çözümü vardır.

$m(A) = 90°$, b, v_b verileriyle ABC üçgeni çizimi

Dik kenarlarından biriyle, bu kenara inen kenarortayının boyu bilinen bir dik üçgenin çizimini öğreneceğiz.

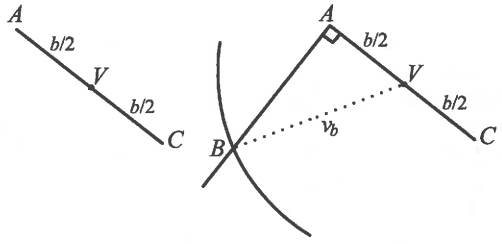
$|AC| = b$, $|BV| = v_b$ biliniyor. Ayrıca A açısının da dik olduğu. Hemen buna göre taslak çizim yapalım.



Akla gelen ilk çizim şu olsa gerek: VAB dik üçgeninin iki kenar uzunluğu da bilindiğinden Pisagor Teoremi yardımıyla üçüncü kenarın boyu bulunur ve üç kenarı uzunluğu da bilinen üçgenlerin çizim metoduyla VAB dik üçgeni çizilir. Ardından da C işaretlenir ve çizim tamamlanır. Bu çizim teorikte mümkün olsa da pratikte imkansız veya çok zor olabilir. Zira Pisagor Teoremi'nden bulunacak $|AB|$ değeri cetvel veya pergelle çizilmesi çok zor bir irrasyonel sayı çıkabilir.

Bu yüzden biz başka bir metot kullanacağız:

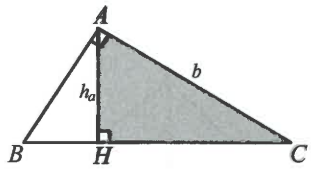
$|AC| = b$ olacak şekilde cetvelle $[AC]$ çizilir ve orta dikme çizimindeki metotla (veya cetvelle) ortası bulunur. Bu orta noktaya V diyelim. Şimdi V merkezli v_b yarıçaplı çember çizilir. B noktası bu çember üzerinde olmalıdır. Diğer taraftan bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme çizimi metoduyla A'dan $[AC]$'ye dik çıkılır. B noktası aynı zamanda bu dikme üzerinde de olmalıdır. O halde B noktası bu çemberle bu dikmenin kesişim noktasıdır. Son olarak, B ile C'yi birleştiren doğru çizilerek, çizim tamamlanır.



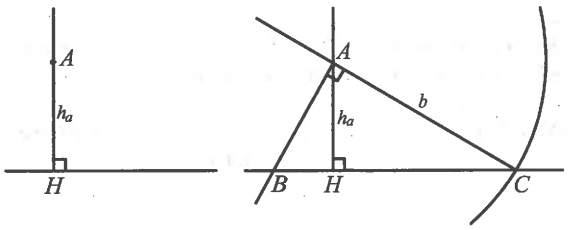
Yalnız, VAB bir dik üçgen olduğundan dolayı $|VB| > |VA|$ yani $v_b > b/2$ olmalıdır. O halde $2v_b > b$ olarak verilirse çizim mümkündür ve tek bir biçimlidir, yoksa değil!.

$m(A) = 90°$, b, h_a verileriyle ABC üçgeni çizimi

Dik kenar uzunluklarından biriyle, hipotenüse ait yüksekliğinin boyu bilinen bir dik üçgenin çizimini öğreneceğiz. Hemen bir taslak çizim yapalım:



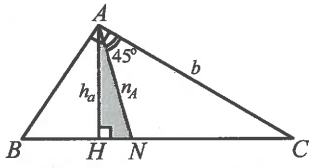
AHC dik üçgeninin iki kenar uzunluğu bilindiğinden dolayı, uygunsa üç kenarı da bilinen üçgenlerin çizim metodundan, uygun değilse '$K.K.A$' temel çizimine göre AHC dik üçgeni çizilir. Ardından A'dan AC'ye çıkılan dikmenin CH doğrusunu kestiği nokta da B olarak işaretlenir.



Çizimin mümkün olabilmesi için $b > h_a$ olarak verilmesi yeter. Çünkü AHC bir dik üçgendir ve hipotenüs her zaman en uzun kenardır. Böyle verilirse tek bir çizim vardır.

$m(A) = 90°$, h_a, n_A verileriyle ABC üçgeni çizimi

Hipotenüse inen yüksekliğinin boyu ve dik açısına ait iç açıortayının boyu bilinen bir dik üçgeni çizmeyi öğreneceğiz. Hemen bir taslak çizim yapalım:



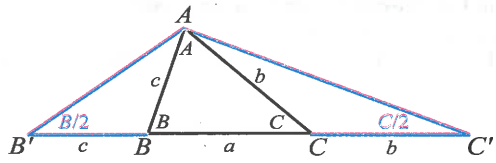
$|AH| = h$, $|AN| = n_A$ biliniyor. AHN dik üçgeni '*K.K.A.*' temel çizimine göre çizilir. Sonra AN açıortay olduğu için, bunun iki tarafında 45'er derecelik açılar alınarak AB ve AC kenarları elde edilir.

$h < n_A$ olarak verilirse AHN yardımcı üçgeni derhal çizilir. Fakat ABC üçgeninin tamamlanabilmesi için $m(HAN) < 45°$ olmalıdır. Bunun için de $n_A < h\sqrt{2}$ olması gerekir. Öyleyse $h < n_A < h\sqrt{2}$ olarak verilirse çizim mümkündür ve bir tanedir.

$m(B)$, $m(C)$, Çevre(ABC) verileriyle ABC üçgeni çizimi

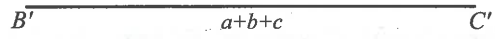
İç açılarının ölçüleri ve çevresinin uzunluğu bilinen üçgenlerin çizimini öğreneceğiz.

İç açılarının ölçüleri belliyse üçgeni çizmek kolay ama çevreyi tutturmak zor. Üçgen eşkenar değilse tabii ki... Bunun için ufak bir alicengiz oyunu yapacağız. Tersten gideceğiz. Üçgenin çizilmiş olduğunu farzedelim. $[BC]$ kenarını B yönünde c birim kadar, C yönünde de b birim kadar uzatalım. Vardığımız noktalara sırasıyla B' ve C' diyelim.

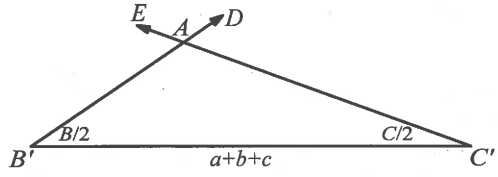


Üst şekildeki ABB' ve ACC' üçgenleri ikizkenar olur. Oluşan $AB'C'$ üçgeninde de iç açıların ölçüleriyle birlikte $|B'C'|$ biliniyor olur. Bu üçgeni çizmeyi de biliyoruz. Bu üçgeni çizince ABC üçgenini çizmek çocuk oyuncağı olacak. Başlıyoruz:

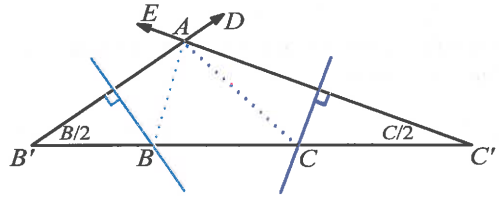
Önce cetvelle, boyu $a + b + c$ birim olacak şekilde bir doğru parçası çizeriz. Taslak şeklimize uygun şekilde B' ve C' köşelerini işaretleriz.



Sonra iletki yardımıyla $m(DB'C') = m(B)/2$ ve $m(B'C'E) = m(C)/2$ olacak şekilde $[B'D$ ve $[C'E$ ışınlarını çizeriz.



Bu ışınların kesim noktası bize çizilmesi istenen üçgenin A köşesini verir. Şimdi B ve C köşelerini bulacağız. ABB' ve ACC' üçgenlerinin ikizkenar olacağını bildiğimizden $[AB']$ ve $[AC']$ kenarlarının orta dikmelerini çizeceğiz.



Bu orta dikmelerin $[B'C']$ kenarını kestiği noktalar bize ABC üçgeninin B ve C köşelerini verir. İsteyen yine iletki yardımıyla $B'AB$ ve $C'AC$ açılarını çizebilirdi. Biz orta dikmeyi çizmeyi tercih ettik.

1.

$a = 3\ cm, b = 4\ cm, c = 5\ cm$
$a = 4\ cm, b = 5\ cm, c = 6\ cm$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, c = 6\ cm$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, c = 7\ cm$
$a = 1\ cm, b = 9\ cm, c = 9\ cm$

Yukarda kenar uzunlukları verilmiş beş üçgen adayının kaç tanesinin çizimi mümkündür?

A) 1 B) 2 C) 3 **D)** 4 E) 5

2.

$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(C) = 30°$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(B) = 30°$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(A) = 30°$
$a = 2\ cm, b = 4\ cm, m(B) = 30°$
$a = 2\ cm, b = 4\ cm, m(A) = 30°$

Yukardaki verilere sahip beş üçgenin kaç tanesinin çizimi tek türlüdür?

A) 1 B) 2 C) 3 **D)** 4 E) 5

3.

$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(C) = 120°$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(B) = 120°$
$a = 3\ cm, b = 4\ cm, m(A) = 120°$
$a = 2\ cm, b = 4\ cm, m(B) = 120°$
$a = 2\ cm, b = 4\ cm, m(A) = 120°$

Yukardaki verilere sahip beş üçgenin kaç tanesinin çizimi tek türlüdür?

A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

4.

Aşağıda bilindik gösterimleriyle elemanları verilen *ABC* üçgenlerinden hangisi çizilemez?

A) a, b, c B) $a, b, m(C)$ **C)** $m(A), m(B), m(C)$
D) $m(A), h_a, v_a$ E) $m(A), h_a, n_A$

5.

Aşağıda bilindik gösterimleriyle verilen elemanlardan hangisi *ABC* üçgenini çizmek için her zaman yeterli olmayabilir?

A) a, b, c B) h_a, h_b, h_c C) v_a, v_b, v_c
D) $m(A), b, c$ **E)** $m(A), b, a$

6.

Bir *ABC* üçgeninde $n_A = 6$ cm olarak veriliyor.
Bu üçgenin çizilebilmesi için h_a ve v_a değerleri nasıl verilmelidir?

A) $h_a \le v_a \le 6$ B) $v_a < h_a < 6$ C) $6 < v_a < h_a$
D) $6 < h_a < v_a$ **E)** $h_a \le 6 \le v_a$

7.

Aşağıdaki açı ölçülerinden hangisine sahip bir açı, cetvel ve pergel yardımıyla çizilemez?

A) 22,5° B) 30° C) 45° D) 60° **E)** 80°

8.
Aşağıdaki açı ölçülerinden hangisine sahip bir açı, cetvel ve pergel yardımıyla çizilemez?

A) 21° B) 33° C) 48° **D)** 52° E) 81°

9.
Sadece pergel ve cetvel kullanarak aşağıdaki ölçüleri verilen açılardan hangisi tam olarak çizilemez?

A) 67,5° B) 60° **C)** 50° D) 30° E) 22,5°
1985 ÖSS

10.
Ölçüsü α olan bir açı çizilebiliyorsa, aşağıdaki ölçülerden hangisine sahip bir açı çizilemeyebilir?

A) $\frac{\alpha}{8}$ B) $\frac{\alpha}{4}$ **C)** $\frac{\alpha}{3}$ D) $\frac{\alpha}{2}$ E) 16α

11.
$|AB| = 6\ cm$
$|BC| = 7\ cm$
olan bir *ABC* üçgeninin çizilebilmesi için $|AC|$ tam sayı değeri kaç farklı şekilde verilebilir?

A) 1 B) 10 **C)** 11 D) 12 E) 13

12.
$|AB| = 4\ cm$ ve $m(ABC) = 45°$ olan bir *ABC* üçgeninin tek türlü çizilebilmesi için $|AC|$ en az kaç *cm* olmalıdır?

A) 2 **B)** $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

13.
$|AB| = 4\ cm$
$|AC| = x\ cm$
$m(ABC) = 45°$
olan bir *ABC* üçgeni *x* hangi aralıkta olursa iki değişik şekilde çizilebilir?

A) $\sqrt{2} < x < 2$ B) $\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$ C) $2 < x < 2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2} < x < 4$ E) $x > 4$

14.
Aşağıdaki verilerden hangisinin tek başına bilinmesi, cetvel ve pergel kullanıldığı halde bahsi geçen kareyi çizmeye yetmez?

A) Karenin bir kenar uzunluğu B) Karenin alanı
C) Karenin bir köşegen uzunluğu D) Karenin çevresi
E) Karenin bir iç açısının ölçüsü

15.
Aşağıdakilerden hangisi tek bir kenarının uzunluğu bilinerek çizilebilir?

A) Dik üçgen B) İkizkenar üçgen
C) Eşkenar üçgen D) Dikdörtgen
E) Eşkenar dörtgen

16.
Çevrel çemberinin yarıçapı olan R ve A açısının ölçüsünün sinüsü olan sin A değeri bilinen bir ABC üçgeninin aşağıdaki elemanlarından hangisi çizilebilir?

A) A açısı
B) $|BC|$ kenarı
C) $|AC|$ kenarı
D) $|AB|$ kenarı
E) İççember yarıçapı

17.
Aşağıda bilindik gösterimleriyle verilen elemanlardan hangisi ABC üçgenini çizmek için her zaman yeterli olmayabilir?

A) a, b, sin C
B) a, b, cos C
C) a, b, tan C
D) a, b, cot C
E) a, b, sec C

18.
Aşağıda bilindik gösterimleriyle verilen elemanlardan hangisi ABC üçgenini çizmek için her zaman yeterli olmayabilir?

A) a, cos B, cos C
B) a, tan B, tan C
C) a, cot B, cot C
D) a, sec B, sec C
E) a, csc B, csc C

19.
Konveks bir deltoitin çizilebilmesi için <u>en az</u> kaç bilgiye ihtiyaç duyulur?

A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

20.
Bir dik yamuğun çizilebilmesi için <u>en az</u> kaç bilgiye ihtiyaç vardır?

A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

21.
Bir düzgün ongen çizebilmek için <u>en az</u> kaç bilgiye ihtiyaç vardır?

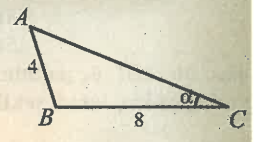
A) 1 B) 3 C) 9 D) 10 E) 17

22.
I. $a = 8$ br, $b = 9$ br, $m(A) = 95°$
II. $a = 5$ br, $h_a = 12$ br, $m(C) = 90°$
III. $a = 6$ br, $b = 4$ br, $h_a = 5$ br

Yukarda bulunan üçer bilgilik üç verinin hangisi veya hangileri bir üçgen belirtir?

A) Yalnız I
B) Yalnız II
C) Yalnız III
D) I ve II
E) II ve III

23.
ABC bir üçgen
$|AB| = 4$ br
$|BC| = 8$ br
$m(BCA) = \alpha°$
olduğuna göre
α <u>en çok</u> kaç olabilir?



A) 15 **B)** 30 C) 45 D) 60 E) 90

[Eyüp Kamil YEŞİLYURT]